



Desarrollo profesional y la reproducibilidad de situaciones de aprendizajes

Ma. Soledad **Montoya** González
Universidad Alberto Hurtado
Chile

mmontoya@uahurtado.cl

Javier **Lezama** A.

CICATA-IPN

México

jlezamaipnm@gmail.com

Resumen

Esta ponencia corresponde a una investigación realizada en una tesis doctoral. Considera dos aspectos - formación continua de profesores de enseñanza básica que hacen clases de matemáticas y un elemento teórico de la didáctica de la matemática llamado reproducibilidad-. El propósito fue identificar elementos del quehacer docente cuando los profesores en ejercicio reflexionan sobre la reproducibilidad de situaciones de aprendizajes que ellos diseñaban y aplicaban en distintos escenarios. La metodología fue cualitativa, es un estudio de caso, donde se realiza un seguimiento a cuatro docentes que diseñan situaciones de aprendizajes en el marco de un curso para su desarrollo profesional. La reflexión se realizó en el marco del Estudio de Clases. Los hallazgos muestran, elementos de articulación teoría-práctica y cómo esto lleva a la mejora de producción de las situaciones de aprendizajes y su gestión. También devela dificultades en el planeamiento y ejecución de clases basada en resolución de problemas.

Palabras clave: reproducibilidad, matemática, didáctica, pedagogía, formación, desarrollo profesional.

Problemática y antecedentes

Problemática

Consideramos por una parte los datos que arrojan las pruebas internacionales como PISA (2009), en donde se devela que Chile está bajo del promedio en la prueba de matemática. Esta

información se toma en cuenta puesto que a partir de dichos resultados se cuestiona desde el exterior la eficiencia de los sistemas educativos y hacen visible tanto los éxitos como las limitaciones y fracasos. Además que lidera la investigación educativa para informar y orientar las decisiones curriculares y políticas (Artigue, 2008). Por otra parte, considera los cambios que ha sufrido la enseñanza-aprendizaje de la matemática en los últimos años, cambios que obedecen a los procesos que se han producido en la educación a nivel mundial como aquellos relacionados con los ámbitos tecnológicos y sociales. Dichos cambios conllevan plantear reformas educacionales, pues de un modelo tradicional de enseñanza se propone un nuevo enfoque que está orientado al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante y no sólo a la transmisión pasiva de información.

En este proceso de adaptación y aceptación de los modelos que surgen en las reformas educacionales, se proponen diversos cursos de actualización para los profesores que están en servicio y que consideran por igual los saberes matemáticos, didácticos y pedagógicos. La idea fundamental de la reactualización es el desarrollo profesional, sin embargo cada profesor que tiene la necesidad de cambiar el enfoque en la enseñanza de la matemática tiene una historia propia; la cual está constituida –también– por creencias que se han instalado en su quehacer profesional y que se han validado por su propia práctica. Las observaciones empíricas en el trabajo con docentes permiten exponer que hay profesores que en el proceso de actualización de saberes logran con dificultad poner en acción dichos saberes al servicio de su profesión y diseñar sesiones de clases con un nuevo enfoque.

De este modo, surge la inquietud de vincular el fenómeno de reproducibilidad con el quehacer docente en un programa de reactualización de saberes (Postítulo de Mención en matemáticas). En estos cursos los docentes tienen posibilidad de apropiarse, o al menos de conocer, elementos de la didáctica de la matemática. Estos elementos pueden convertirse en herramientas para el diseño y ejecución de propuestas de enseñanza y aprendizaje fundamentada en marcos teóricos como la teoría de situaciones didácticas.

La reproducibilidad como fenómeno es establecida precisamente en la teoría de situaciones didácticas, específicamente en los fenómenos ligados a la transposición didáctica y en particular al envejecimiento de situaciones de enseñanza (Brousseau, 1984). El constructo emerge en las puestas en escena de las ingenierías didácticas en distintos escenarios. Investigaciones de Artigue (1986), Arsac (1989), Arsac, Balachef y Mante (1992), Perrin–Glorian (1993), Lezama (2005), exponen que el profesor es un factor fundamental en la reproducibilidad de diseños didácticos. Esto lleva a cuestionar sobre lo que ocurre en la trayectoria del profesor que está haciendo intentos por articular teoría y práctica. Así nuestra pregunta de investigación fue: ¿La reflexión sobre reproducibilidad en el proceso de formación continua, qué elementos agrega al quehacer docente para que los diseños didácticos sean aplicados en distintos escenarios?

Antecedentes

Los antecedentes, que a continuación se exponen, son la síntesis de la revisión en la literatura sobre dos focos del estudio. Uno centrado en antecedentes relacionados con estudios vinculados a la investigación en el ámbito de la formación de profesores en servicio y el otro pertenece al campo de análisis de los estudios que permiten plantear la problemática a partir del fenómeno de reproducibilidad.

Antecedentes sobre formación de profesores

Al revisar la literatura en relación a los estudios que se han realizado sobre la formación de profesores en servicio se detecta que la bibliografía es numerosa y que hay una variedad de tópicos al respecto. Esto nos permite reconocer que existe un cuestionamiento profundo sobre diversos aspectos en relación a la labor del profesor y su formación.

Ponte y Champan (2006) mencionan que el estudio de los profesores y la enseñanza ha sido un campo activo por un largo tiempo en particular en la comunidad del PME¹. Señalan que en la década de los ochenta toman gran impulso los estudios focalizados en el profesor, los representantes de esas investigaciones son: Elbaz(1983), Shulman(1986) y Schön (1983). Estos estudios se refieren a la práctica reflexiva y al conocimiento pedagógico del contenido. Cardeñoso, Flores y Azcárate (2001) plantean dos grandes bloques en la línea del desarrollo profesional; por una parte, problemáticas sobre el conocimiento profesional del profesor, sus dimensiones, sus relaciones, su estructura; y por otra problemáticas sobre elaboración del conocimiento profesional. Azcárate (2004) se refiere al desarrollo profesional y lo vincula a la evolución por parte del docente en la capacidad de reflexión en y sobre la práctica diagnosticando, comprendiendo para descubrir, criticar y modificar los referentes, esquemas y creencias que subyacen a la misma. Agrega que los profesores son capaces de diseñar, gestionar la puesta en práctica y evaluar propuestas curriculares sin olvidar la complejidad del contexto educativo. También menciona que el conocimiento docente es un conocimiento práctico; es complejo e integrador; es crítico y es profesionalizado sobre la enseñanza de los contenidos. Señala la necesidad de las acciones de formación inicial y continua y la investigación acerca del fuerte vínculo que deben tener con la práctica docente actual o futura; centrándose preferentemente en procesos de investigación relacionados con algunos de los aspectos específicos implicados con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Con respecto al cómo y qué aprende el profesor en procesos de formación continua, Llinares (2007) señala que el aprendizaje del profesor de matemáticas (tanto en su contexto de formación inicial como en el de formación continua) pasa por llegar a comprender la enseñanza de las matemáticas de una determinada manera y aprender a realizar las tareas y usar y justificar los instrumentos que la articulan en un contexto institucional. Perrin-Glorian, Deblois y Robert (2008) remarcan la complejidad de poner en práctica los conocimientos matemáticos que reciben los profesores. Las autoras revisan la literatura en relación a un estudio que realizan en el contexto del desarrollo profesional docente e indican lo difícil que es organizar la variedad de conceptos. Identifican tres cuestiones principales. La primera tiene relación con los cambios de paradigmas propuestos en la formación de profesorado en ejercicio que plantea nuevos problemas en la enseñanza. La segunda tiene relación con los cambios que tienen que hacer los profesores por las reformas o nuevos programas de estudio. Indican que es difícil para los docentes hacer esos cambios y que algunos estudios muestran que cambios aislados no son suficientes para garantizar una mejora real en la práctica. Las dificultades vienen dadas por las imbricaciones entre las creencias y conocimientos de los profesores. La tercera, tiene relación con la importancia de la construcción de conceptos o sistemas capaces de tomar en consideración la variedad de trabajo de los profesores (planificación, análisis, interacciones en el aula, incluyendo las relaciones con los padres, etc.)

Por otra parte, se revisaron algunos antecedentes que muestran ciertos modelos que determinan los conocimientos didácticos del profesor y, en consecuencia, nos permiten

¹ PME Psychology of Mathematics Education

interpretar la práctica del profesor. Así Godino(2009) muestra un modelo del conocimiento del profesor que propone categorías de análisis más finas sobre los conocimientos didácticos-matemáticos del profesor basado en el enfoque ontosemiótico. Y define el conocimiento matemático-didáctico del profesor como el conjunto de conocimientos y competencias profesionales. Agrega que se incluye en el contenido didáctico, el conocimiento del contenido matemático, en cuanto éste es contemplado desde la perspectiva de su enseñanza. También, Godino (2009) menciona tres modelos: el primero de ellos es el “conocimiento del contenido para la enseñanza” planteado por Shulman(1986); el segundo “conocimiento matemático para la enseñanza” conocido por sus siglas MKT formulado por (Hill, Ball y Shilling, 2008) y el tercero es “Proficiencia en la enseñanza de las matemáticas” propuesto por Schoenfeld y Kilpatrick (2008). Estos tres modelos se centran en el conocimiento del profesor y sus competencias. Lo anterior enfatiza que el conocimiento del profesor de matemática se focaliza en dos áreas: en la matemática y su didáctica, y el ámbito pedagógico. Esto nos permite conjeturar que dichos modelos son más amplios o, mejor dicho, ven la generalidad del quehacer del profesor.

Margolinas, Coulange y Bessot (2005) investigan el conocimiento del profesor centrándose en sus procesos de aprendizaje a partir de la observación y la interacción con los estudiantes. Señalan la importancia de distinguir un tipo de conocimiento específico del profesor: el conocimiento didáctico del profesor. Este conocimiento didáctico del profesor se inserta en el campo de investigación de la Didáctica de la Matemática (francesa) y se refiere al conocimiento matemático y a su enseñanza. Desarrollan un modelo para la actividad del profesor y lo diseñan para comprender mejor la complejidad de la actividad del mismo. En resumen, el modelo presentado por Margolinas et al(2005) difiere de los otros que se presentaron -por ejemplo en Godino(2009)- en cuanto no menciona las competencias generales y su centro es lo específico de la matemática.

Bosch y Gascón (2009) expone la relación de la teoría antropológica de lo didáctico (en adelante TAD) con la formación inicial y continua de profesores. Los autores mencionan que la TAD fue uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio de investigación no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado. Dicho objeto de estudio incluye todas las instituciones que participan en este proceso, entre las que se cuentan al profesorado como institución y también aquellas que intervienen en su formación inicial y continua.

La revisión de antecedentes nos permitió situar nuestra investigación en el conocimiento didáctico del profesor, siguiendo la idea de Margolinas et al(2005).

Antecedentes relacionados con la reproducibilidad

A continuación, se presentan algunos antecedentes que permiten conceptualizar la reproducibilidad de situaciones de aprendizaje el cual se relaciona con el contexto en que surge el problema de nuestra investigación. Artigue (1986), presenta una investigación sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas en la que expone el estudio de la dinámica de clase de una situación didáctica particular con el objetivo de determinar características que las hacen reproducibles. Lo relevante de este artículo es que el modelo que plantea de reproducibilidad que elabora la investigadora lo declara ingenuo, pues no le permite evidenciar la reproducibilidad como tal y en sus conclusiones plantea interrogantes que orientan la reflexión en la dirección a dos subsistemas del sistema didáctico: los constituidos por el profesor y el alumno. Artigue

(1995), señala que Brousseau fue el primero en enfrentarse al problema de la reproducibilidad de su ingeniería didáctica sobre la enseñanza de los decimales. A partir de esto, Brousseau (1986) escribe sobre los fenómenos de obsolescencia y relaciona el hecho de que un profesor de un año a otro reproduce condiciones para que sus alumnos tengan los mismos resultados en la comprensión de un concepto; sin embargo, en lugar de reproducir las condiciones, deja libre las trayectorias y reproducen una “historia” similar a la de años anteriores pero que desnaturaliza las condiciones didácticas que garantizan una significación correcta de los estudiantes. También define el envejecimiento de situaciones de enseñanza, este fenómeno lo relaciona con las dificultades que tiene un profesor para reproducir una misma lección, plantea que la reproducción exacta de lo que ha dicho o hecho anteriormente no tiene el mismo efecto y tiene la necesidad de cambiar la formulación de la exposición o las instrucciones o los ejemplos o los ejercicios; incluso la estructura misma de la clase. Arsac (1989), realiza un estudio de reproducibilidad en el marco de un problema abierto; sus hallazgos le permitieron poner en evidencia la desproporción entre el carácter aparentemente anodino de algunas intervenciones del profesor y sus efectos reales. Lezama (2005) expone que la reproducibilidad de una situación didáctica o situación de aprendizaje necesariamente establece los factores que posibilitan el logro de los propósitos didácticos de una misma clase al repetirse en escenario distintos. Sin embargo, da a conocer otros estudios en los que se señala que la reproducibilidad en estricto rigor no se puede asegurar en didáctica. Artigue (2008) analiza el origen, desarrollo y estado actual del constructo reproducibilidad. Señala que las dificultades encontradas en la transmisión de las realizaciones de ingenierías didácticas han demostrado la necesidad de considerar al profesor como un actor global de la situación didáctica, de conocer mejor su contribución a la dinámica del aula y sus efectos así como los fundamentos de las decisiones que toma. Una mejor comprensión de las prácticas docentes y de los factores determinantes de estos se convierte así en una prioridad en la agenda de investigación.

Marco Teórico, Método y Análisis de los resultados

Marco Teórico

EL marco teórico consideró la teoría de situaciones didácticas (TSD) de Brousseau, la teoría antropológica de lo didáctico de Chevallard (TAD), la conceptualización de: reproducibilidad, reflexión y desarrollo profesional.

A partir del diseño y aplicación de ingenierías didácticas (ID) en la década de los ochenta surge el constructo reproducibilidad, sin embargo la transmisión de los diseños didácticos resultantes de la investigación ID es rápidamente percibida como algo problemático. Realizaciones ID se difunden a través de diferentes canales: publicaciones de los IREM², de pregrado y la formación de profesores en servicio, libros de texto; pero los resultados son bastante engañosos. Los libros de texto sólo proponen transposiciones parciales y superficiales de las construcciones originales. Realizaciones observadas en las aulas muestran distorsiones importantes, reproducciones desnaturalizadas (Artigue, 2008). En consecuencia se habla del fenómeno reproducibilidad ligado a los fenómenos didácticos de transposición didáctica.

La reproducibilidad en esta investigación se comprenderá por la forma en que una situación de aprendizaje puede ser instalada en distintos escenarios para extrapolar los elementos que

² IREM: Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

permiten que la situación en sí misma no pierda su esencia relacionado con el logro del objetivo didáctico.

La TAD, concibe que la construcción del conocimiento matemático es posible modelarlo a través de una praxeología matemática u organización matemática. Una praxeología matemática tipifica la actividad matemática en dos niveles. El primero lo relaciona con la praxis, es decir, con la práctica y se vincula con los tipos de tareas y las técnicas que permiten hacer ese tipo de tarea. Por lo cual, se puede relacionar con el *saber hacer*. El segundo nivel tiene como centro el *saber* pues se vincula con la justificación de las técnicas que permiten hacer un tipo de tareas, además describe y explica la elaboración de las técnicas a lo que llaman “*discurso tecnológico*” y la teoría que da un fundamento a las producciones tecnológicas. De esta forma, la noción de praxeología resulta de la unión de los dos términos *praxis* y *logos*. En una praxeología matemática se distinguen cuatro componentes que dan origen a las siguientes categorías: tareas, técnicas, tecnología y teoría.

Las praxeologías Didácticas u organizaciones didácticas responden al cómo una praxeología matemática se hace enseñable en el contexto de la escuela. Más preciso lo definen como el conjunto de los tipos de tareas, de técnicas, de tecnologías movilizadas para el estudio concreto de un contenido matemático en una institución concreta (Chevallard, 1999). Dada una praxeología didáctica, fruto de un proceso de estudio que se sitúa en un espacio determinado, se producen tipos de situaciones; pues sus actores -profesor y alumno- ocupan roles diferente pero que a la vez son cooperativos. A esos tipos de situaciones se les denomina *momentos didácticos*. Seis son los momentos didácticos: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento del trabajo de la técnica, el momento tecnológico teórico, el momento de la institucionalización y el momento de la evaluación (Bosch et al, 2003).

La institución, en el marco de la TAD, adquiere un rol relevante en el proceso enseñanza aprendizaje de la matemática. Las instituciones involucradas en este estudio son escuelas en donde ejercen los profesores investigados y el Ministerio de Educación a nivel macro quién da las orientaciones y los programas de estudios de los diferentes niveles del sistema escolar. En nuestra investigación se utilizó la TAD para describir las organizaciones matemáticas y didácticas que los docentes generaron cuando diseñaron y aplicaron diseños didácticos para una clase basada en resolución de problemas sobre la comprensión del teorema de Pitágoras.

Consideramos la definición de reflexión que señala Sánchez (2010) definiéndola como una actividad de tipo cognitiva y la considera un proceso mental por el cual las acciones, creencias, conocimientos o sentimientos son conscientemente consideradas y examinadas. Así, una reflexión matemática es aquella que relaciona la matemática misma con lo que se examina conscientemente en la interpretación de conceptos matemáticos. La *reflexión didáctica* es el proceso en el cual el profesor conscientemente considera su propia práctica, sus valores y acciones asociadas con la misma (Sánchez, 2010). La reflexión pedagógica es transversal en los procesos educativos y tienen relación con las metodologías, planificación y paradigmas de enseñanza.

La formación continua de profesores es el desarrollo profesional y se puede comprender como la evolución por parte del profesor en la capacidad de reflexión en y sobre la práctica: diagnosticando, comprendiendo para descubrir, criticando y modificando los referentes esquemas y creencias que subyacen en la misma (Azcárate, 2004). La necesidad de la formación continua de profesores surge por el ejercicio mismo de la profesión, pues un profesor en su trayectoria

como docente tendrá que adaptarse a los cambios propios de la sociedad en función de la situación histórica. En este ejercicio profesional, el profesor tendrá que hacer “tareas profesionales” las que Llinares(2005) define como: diseñar, modificar o elegir tareas, actividades, problemas; organizar y secuenciar el contenido matemático durante las interacciones; analizar y dotar de sentido a las producciones matemáticas de sus alumnos. Agrega, que el desarrollo profesional del profesor puede ser entendido como cambios en cómo participar en las prácticas matemáticas que se generan en el aula y cómo es comprendida por el profesor.

Método

El tipo de metodología utilizado fue cualitativa y consideró un grupo de trabajo de 3 profesores que ejercían en el segundo ciclo básico y realizaban clases de matemáticas a estudiantes entre 10 y 14 años, además participaban de un perfeccionamiento docente de especialización en matemáticas (programa de postítulo) en una universidad.

Para el diseño y aplicación de las situaciones de aprendizaje que plantearon los profesores, se utilizaron dos constructos prácticos: Ingeniería Didáctica y Estudio de Clases japonés (Lesson Study). Estos constructos eran parte del programa de estudio del perfeccionamiento docente y lo desarrollaron en los módulos de didáctica de la matemática.

El Estudio de Clases (EC) es una estrategia de formación continua que se realiza en la escuela para el desarrollo profesional de los profesores. Isoda, Arcaví y Mena (2008) señalan que este programa incluye a todos sus profesores de escuelas y colegios; a quienes permite no sólo compartir sus conocimientos y aprender unos de otros –y, según se suele reiterar, de los alumnos-, sino también aportar como investigadores al desarrollo de su país. Su fundamento es que si los profesores mejoran sus clases en pos de los logros didácticos entonces mejoran los aprendizajes de sus alumnos. Las características esenciales del EC son el trabajo colaborativo y la reflexión de tipo matemática, didáctica y pedagógica. Se distinguen tres fases: preparación de la clase, aplicación y discusión de la clase. Es un proceso cíclico. Finalizada la sesión se ajusta el plan de clases de acuerdo a las reflexiones realizadas y se vuelve aplicar la clase en la misma escuela por otro profesor o en otra escuela con otro docente.

El estudio se realizó en cinco etapas, las cuales contemplaron: un estudio de tipo epistemológico, didáctico y cognitivo del teorema de Pitágoras, las ideas intuitivas de los docentes sobre reproducibilidad, enseguida se realizaron seis talleres de reflexión sobre el diseño de las situaciones de aprendizaje. Cada uno de estos talleres constituyó parte del EC. Se analizaron cuatro videos de clases que corresponden a cada uno de los docentes del grupo de trabajo y a una profesora que se invitó a participar sólo en los talleres de reflexión después de aplicar cada clase. También se le solicitó a la docente que aplicara en su grupo curso la misma clase.

Análisis de los resultados

Se realizaron tres focos de análisis uno relacionado con ideas intuitivas sobre reproducibilidad, el otro fue el análisis de los talleres de discusión y el último es el análisis de los diseños didácticos.

Ideas intuitivas sobre reproducibilidad

Entre los principales resultados, se devela que los profesores manifiestan que la repetición de clase no es posible en forma exacta, es decir, repetir tal cual de un curso a otro o de un año a otro. Siempre va a tener variaciones la clase que se repite. Estas variaciones están focalizadas en

elementos externos de la reproducibilidad como: planificación de la unidad de aprendizaje, planes de clases, actividades de aprendizaje, recursos didácticos. Realizan modificaciones a las clases que repiten y estas se fundamentan en los elementos internos de la reproducibilidad como: logro de aprendizaje de los contenidos matemáticos y el contexto de la enseñanza. Es decir, de la diversidad de aprendizajes que pueden detectarse en el curso que están realizando clases. El contenido matemático no influye en la repetición de la clase, pues para ellos éste no varía, siempre es el mismo.

Talleres de Reflexión

En el análisis de la discusión sobre el diseño y la aplicación de la clase, los resultados principales fueron: los docentes reconocen el teorema de Pitágoras como una técnica para resolver un tipo de tarea que consiste en calcular la medida de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo o calcular la medida de cualquiera de sus catetos. Siendo el teorema de Pitágoras una tecnología, los profesores no lo reconocen como tal; pues se detecta que no tienen el conocimiento acerca de lo que es un teorema en matemáticas ni tampoco que todo teorema es demostrable. Por tanto hay ausencia de teoría en este caso. Frente al tipo de tarea que consiste en comprobar la relación entre áreas de los cuadrados trazados sobre los catetos del triángulo rectángulo y el cuadrado trazado sobre la hipotenusa, se identifican 5 técnicas. Ellos sólo justifican una técnica; sin embargo, para cada técnica identificada se asocia una tecnología. Esto permite señalar que los contenidos matemáticos que justifican las técnicas son conocimientos que el profesor tiene. En el desarrollo de una tarea en uno de los talleres se evidencia la epistemología del teorema de Pitágoras en la demostración que realiza Euclides. Pues en ésta, Euclides explicita la relación establecida en el teorema de Pitágoras, realizando construcciones geométricas auxiliares y justificando a través de la congruencia de triángulos. El análisis de estos talleres permitió concluir que frente al tipo de tarea “aplicar diseños didácticos en diferentes escenarios”, se identifica una praxeología constituida por tipos de tareas, técnicas y tecnologías. El componente tecnológico es justificado en los dos primeros talleres por la práctica del profesor. En el siguiente taller se incorpora un elemento teórico al quehacer del profesor que permita determinar los conocimientos didácticos que tienen los docentes. En esta se completa la praxeología identificada con sus cuatro componentes. Puesto que se ha introducido un componente teórico a través del constructo reproducibilidad de situaciones de aprendizajes. También se concluye que los docentes realizan una organización matemática de la clase, constituida por cuatro *tipos de tareas* y mencionan algunas *técnicas* asociadas al tipo de ellas; en especial el *tipo de tarea* “verificar el teorema de Pitágoras”. En relación a la reproducibilidad de las situaciones de aprendizaje, los docentes plantean ciertos elementos que deben dejar inamovibles para que las mismas situaciones sean aplicadas en distintos escenarios.

Diseños didácticos

En relación a la organización matemática es posible detectar que los docentes han propuesto una praxeología relacionada con medidas de dimensión 1 y dimensión 2. Es decir, vincularon el contenido matemático, teorema de Pitágoras, con la medición. Esto permite percibir que han usado un componente epistemológico del teorema de Pitágoras, pues este objeto matemático emerge a partir de la práctica de medir terrenos y trazar segmentos perpendiculares. Dado que las organizaciones matemáticas son las mismas, se perciben algunos cambios en ciertas gestiones de las situaciones de aprendizaje. Dichos cambios se realizan en las actividades previas a la situación clave para la comprensión del teorema de Pitágoras. Se detecta que en la gestión de la situación clave (tipo de tarea₃), los docentes realizan los mismos momentos didácticos, es

decir, la organización didáctica no varía. En términos de reproducibilidad, los docentes en la reflexión de este constructo teórico establecieron ciertos elementos que debiesen quedar inamovibles para que el diseño didáctico constituido por cuatro situaciones de aprendizajes sea reproducible. Uno de esos elementos involucró no cambiar la situación clave para la comprensión del teorema de Pitágoras. Pues bien, efectivamente se detecta que esa situación no fue cambiada en su esencia ni tampoco varió la gestión de la situación. El análisis de las reflexiones que realizan los docentes sobre sus clases, permiten concluir que: la metodología de Estudio de Clases entrega un método para crear ambientes de discusión y reflexión sobre la práctica de los profesores. Analizan sus clases en los diferentes ámbitos; matemático, didáctico y pedagógico. El foco en las primeras discusiones fueron reflexiones de tipo pedagógico y se devela en función de estudiar la reproducibilidad de las situaciones de aprendizajes que constituye el diseño, por lo que las discusiones de tipo didáctica y matemática aumentan. Por tanto, el Estudio de Clases se constituye como un ambiente de aprendizaje para los docentes, en el que se articula teoría y práctica. La metodología de Ingeniería Didáctica permite que los docentes puedan discutir en el ámbito didáctico especialmente en su análisis preliminar, al considerar los aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos del saber en juego. Los docentes diseñan las situaciones de aprendizaje y realizan un análisis a priori de cada actividad, esto les permite predecir lo que ocurrirá en la clase. Posterior a la aplicación de cada una de las clases, los docentes discuten y reflexionan acerca de lo que ocurrió realmente (análisis a posteriori de la clase), realizan modificaciones a la luz del análisis de las clases, considerando la reproducibilidad de las situaciones de aprendizajes. Es decir, consideran la esencia de la clase, por tanto no pierden de vista el logro didáctico del diseño. Esto nos conduce a plantear que es posible la articulación entre la metodología de Ingeniería Didáctica y la metodología de Estudio de Clases. En relación a la reproducibilidad se observa que los docentes reconocen la reproducción de clase cuando se hacen explícitos los elementos que quedan inamovibles para aplicar el diseño en distintos escenarios.

Respuesta a la pregunta de Investigación y conclusiones

La reflexión de los docentes sobre la reproducibilidad permitió identificar algunos elementos que se agregan al quehacer docente y están vinculados a las organizaciones matemáticas y organizaciones didácticas estos son: focalizar la discusión de las situaciones de aprendizajes en términos de logro didáctico que fue la comprensión del teorema de Pitágoras de tal modo que las adecuaciones o cambios que se realizaron hicieron depurar la organización matemática; determinar y hacer visible el logro didáctico u objetivo de aprendizaje de la sesión de clase; determinar cuáles son las situaciones claves que apuntan al logro didáctico; toma de decisiones fundamentadas desde la didáctica de la matemática; fortalecer la reflexión didáctica centrando las discusiones sobre las clases en aspectos propios de las tareas y técnicas didácticas. Estos elementos aportan a que la aplicación de diseños didácticos sea reproducible. En la investigación se observó que los docentes, a medida que discutían sobre su diseño, no pierden de vista el logro didáctico y mejora la aplicación de las situaciones de aprendizaje claves. Esto se detectó en el análisis de las clases, la profesora 4 (Romina) que no participó en el diseño fue la que más logro obtiene al aplicar la clase en su curso. Esta observación también la hacen los profesores que participaron en el grupo de trabajo. Cabe señalar que ella fue la última en realizar la clase.

Conclusiones

La investigación nos permitió concluir en relación a:

Reflexión didáctica sobre el constructo reproducibilidad

Es posible detectar ciertos elementos que se agregan al quehacer del docente para que los diseños didácticos puedan ser aplicados en distintos escenarios. Esto permitió que la organización matemática y organización didáctica presentada por los profesores evolucione en términos del logro didáctico. Se detecta que tanto la praxeología matemática y didáctica fue depurada, puesto que la profesora que aplicó las situaciones de aprendizaje por última vez exhibe una clase en donde se aprecia modificaciones sin perder la esencia de cada una de las situaciones. Además contribuyó a que en las discusiones de las clases la atención se centrará en el ámbito didáctico, por tanto se vincula teoría y práctica. El tener un escenario en donde se plantea un constructo teórico desde la didáctica de la matemática, permitió establecer o al menos esbozar la idea de la relación mutua entre una organización matemática y didáctica. No fue un tema fácil para los profesores, eso se observó en la medida que las discusiones de los talleres se focalizaban para reproducir las situaciones de aprendizaje.

Contenido matemático

Desde el inicio cuando se plantea el estudio de las ideas intuitivas sobre reproducibilidad, se evidencia que al “repetir clases” el ámbito menos cuestionado por los docentes es la matemática. Si bien en esta indagación se observa que los profesores para repetir clases asumen que siempre hay un cambio, declaran que lo que no puede variar es el contenido matemático. Además, durante el desarrollo del proceso del diseño de las situaciones de aprendizajes, se realizó un taller para detectar cuánto conocían y en qué profundidad comprendían el tema matemático, se observó que sabían el teorema pero no en su profundidad para hacerlo enseñable. Entonces se realizó un taller para profundizar con referente teórico el tema. En las discusiones de los diferentes talleres los docentes mencionan el tema matemático pero no continuaban con la discusión, en ocasiones evadían el tema. Sin embargo, en la medida en que ellos fueron analizando las clases y tenían que reproducirlas analizaban las situaciones de aprendizaje relacionadas estrechamente con el tema matemático. Con esto se quiere inferir que el manejo de la matemática por parte del docente sería un elemento primordial para realizar diseños reproducibles. Por otra parte, no se evidencia que los docentes investigados tengan un conocimiento de tipo cognitivo sobre el teorema de Pitágoras. Por lo cual, al proponer la tarea de verificar el teorema, algunos de los docentes no vinculan el material concreto con las ideas matemáticas. En el transcurso de la discusión de las clases, pudieron abordar el tema y cuestionar la situación de aprendizaje que tenía por objetivo verificar el teorema.

Estudio de Clases

Al respecto, consideramos que dicho constructo es un entorno de aprendizaje para los profesores que están en cursos de formación continua. La justificación de esta conclusión es que desde el inicio se producen diferente tipo de reflexiones en los profesores y se distinguen tareas y técnicas didácticas que permiten llevar a cabo un proyecto de enseñanza aprendizaje. La discusión de los talleres fue sobre la base de la praxis de los docentes para su desarrollo profesional, es decir, los profesores “aprenden” mirando las clases de sus pares. Al considerar el constructo ingeniería didáctica, se necesita un análisis a priori y a posteriori de las situaciones de aprendizajes involucradas, posteriormente se aplican el diseño en las aulas y se discute sobre esa puesta en escena. Los dispositivos evolucionan en base a un discurso tecnológico.

Formación continua de profesores

El constructo Estudio de Clases permitió que en un programa de formación se analizarán diseños didácticos sobre un contenido matemático a la luz de referentes teóricos. Esto reveló que los docentes articularon teoría y práctica. Dicha articulación permitió que los docentes no sólo se ubicaran en el logro de la praxis, sino que evolucionaran hacia el logro tecnológico. Así, cuando tomaron decisiones en relación a las propuestas de enseñanza aprendizaje fueron fundamentadas y reflexionadas. Se concluye también que los docentes investigados presentan dificultades cuando tienen que diseñar y gestionar una clase basada en resolución de problemas.

Finalmente las proyecciones de este trabajo pueden ser por una parte realizar un estudio sobre la identificación de dificultades que el profesor tiene para diseñar y aplicar una clase basada en resolución de problema y por otra diseñar organizaciones matemáticas y didácticas en conjunto con expertos.

Referencias y bibliografía

- Arsac G., Balachef N., & Mante M. (1992) Teacher's Role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23(1), 5-29.
- Arsac, G. (1989). Le rôle de professeur – aspects pratiques et théoriques, reproductibilité. *Cahiers du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'informatique*. Grenoble, France: IMAG-LSD.
- Artigue, M. (1986). Étude de la dynamique d'une situation de classe: Une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 7(1), 5-62.
- Artigue, M. (2008). Didactical Design in Mathematics Education. En C. Winslow (Ed.), *Nordic Research in Mathematics Education* (pp. 7-16). Copenhagen: Proceedings from NORMA08.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Azcárate, P. (2004, septiembre) *Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos*. Seminario de Investigación presentado en VIII Simposio (SEIEM) Recuperado de <http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas08SEIEM/VIIISimposio.pdf>.
- Bosch M., & Gascón J. (2009) Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación el profesorado de matemáticas de secundaria. En M. J. González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII SEIEM* (pp.89-113) Santander: SEIEM
- Bosch M., Espinoza L., & Gascón J. (2003) El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 23(1), 1-57.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-112.
- Cardenoso, J., Flores, P., & Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En P. Gómez, & L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. (pp. 233- 244). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las Prácticas Docentes en la teoría antropológica de lo didáctico, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221 - 266.
- Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. London: Croom Helm.
- Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31. Recuperado de <http://www.fisem.org/web/union/>.

- Hill, H., Ball, D., & Schilling, G. (2008) Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing y Measuring Teacher' Topic- Specific Knowledge of Students, *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4) 372-400.
- Isoda M., Arcavi A., & Mena A. (2008). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas*, Chile. Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Lezama J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de reproducibilidad, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8, 339-362.
- Llinares S. (2007, julio). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizajes para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*. Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, JAEM, Granada. Recuperado de <http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/853/1/llinares-jaem-granada07.pdf>
- Llinares, S. (2005, julio). *Relación entre teorías sobre el aprendizaje del profesor de matemáticas y diseño de entornos de aprendizajes*. Conferencia invitada presentada en el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (V CIBEM), Oporto, Portugal.
- Margolinas et al (2005). What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics*, 59, 205–234. doi: 10.1007/s10649-005-3135-3.
- Ministerio de Educación de Chile (s.f) *Resumen de resultados PISA 2009 Chile*. Recuperado de http://www.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/PISA/Resumen_Resultados_PISA_2009_Chile.pdf
- Perrin-Glorian, M.J (1993) Questions didactiques soulevées a partir de l'enseignement des mathematiques dans les classes "faibles". *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 13(12), 5-18.
- Perrin-Glorian, M. J., Deblois, L. y Robert, A. (2008). Individual Practising Mathematics Teachers. In K. Krainer, & T. Wood (Eds.) *Participants in Mathematics Teacher Education* (Vol. 3 pp. 35-59). The International Handbook of Mathematics Teacher Education
- Ponte J., & Chapman (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense. Recuperado de <http://math.unipa.it/~grim/YESS-5/06%20Ponte-Chapman-PME%20Handbook.pdf>.
- Sánchez, M. (2010). *How to stimulate rich interactions and reflections in online mathematics teacher education?* (Tesis de Doctorado no publicada), IMFUFA tekst nr. 472 - 2010. Universidad de Roskilde: Dinamarca. Recuperada de: <http://milne.ruc.dk/imfufatekster/pdf/472.pdf>.
- Schön, D. (1983). *The reflective practioner: How professionals think in action*. Aldershot Hants: Avebury.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. doi: 10.3102/0013189X05002004.