
# Interpretação e compreensão de demonstrações em matemática: uma dificuldade para professores de matemática dos Ensinos Fundamental II e Médio

Cristiana Abud da Silva **Fusco**
PUC-SP1
Brasil
cfusco@pucsp.br
Saddo Ag **Almouloud**
PUC-SP1
Brasil
saddoag@pucsp.br

**Resumo**

Pesquisas mostram que professores dos ensinos fundamental e médio apresentam dificuldades na compreensão e utilização de provas e demonstrações em suas aulas. A partir de dados coletados num projeto de formação continuada de professores intitulado “O raciocínio dedutivo no processo de ensino-aprendizagem da Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental”, pretendemos investigar como esses professores reagem frente a uma demonstração da fórmula do número de combinações de m elementos tomados r a r. Discutiremos alguns conceitos de provas e demonstração sob a ótica de Duval (1995, 2000), Balacheff (1982), De Villiers (2002) e Harel (2008), além de trazer alguns resultados recentes de pesquisas. Nessa pesquisa, de caráter qualitativo, realizaremos um estudo de caso com alguns desses professores que deveriam ler uma usual demonstração da referida fórmula a fim de que pudéssemos verificar seu grau de compreensão do texto. Concluiremos esse trabalho com uma análise das dificuldades apresentadas por esses professores.

*Palavras-chave:* combinatória- prova - demonstração- formação de professores- grau de compreensão

**Abstract**

Research shows that teachers of primary and secondary education have difficulties to understand and how to use proof and demonstrations in their classes. From data collected on a project of continuous formation of teachers entitled "Deductive reasoning in the process of teaching-learning of mathematics in the final series of elementary school", we intend to investigate how these teachers react facing a demonstration of the formula for the number of combinations of r objects from a set of m objects. We discuss some concepts of proof and demonstration from the perspective of Duval (1995, 2000), Balacheff (1982), De Villiers (2002) and Harel (2008), besides bringing some recent findings. In this research of qualitative character, we will perform a case study with some of those teachers who should read a usual demonstration of that formula so that we could check their degree of understanding of the text. We will conclude this work with an analysis of the difficulties presented by those teachers.

*Key-words:* combinatory - proof – demonstration - teacher training - degree of understanding.

## Introdução

Nessa pesquisa utilizaremos dados obtidos a partir de um projeto de formação continuada de professores desenvolvido durante dois anos e intitulado “O raciocínio dedutivo nos processos de ensino-aprendizagem da Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental”. O projeto foi coordenado e desenvolvido por pesquisadores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP e contou com o financiamento do CNPq[2]. Participaram das atividades de formação professores do Ensino Fundamental e Médio das redes pública e particular do estado de São Paulo.

Nesse trabalho adotamos uma metodologia de caráter qualitativo, no qual realizamos um levantamento bibliográfico de publicações sobre prova e demonstração. Pretendemos discutir alguns conceitos de provas e demonstração sob a ótica de Duval (1995,2000), Balacheff (1982), De Villiers (2002) e Harel (2008), além de trazer alguns resultados recentes de pesquisas. Destacaremos alguns resultados do trabalho que vem sendo desenvolvido com os professores citados no projeto, registrando de forma detalhada algumas ações que ocorreram durante a realização do projeto. A partir de depoimentos de alguns desses professores discutiremos os entraves ainda existentes quanto à utilização de provas e demonstrações em sala de aula.

A questão da dificuldade que alguns professores possuem em utilizar um procedimento de validação de proposições matemáticas já vem sendo discutido por alguns autores. Almouloud (2006) discutiu as noções que alguns professores da rede pública do Estado de São Paulo possuíam a respeito de teoremas e demonstrações que aparecem nos textos didáticos. Essa pesquisa também descreveu uma atividade em que vários livros didáticos de matemática da segunda fase dos ensinos fundamental e médio foram colocados à disposição dos professores que tiveram como tarefa identificar qualquer tipo de demonstração e discutir a viabilidade de ensino dessa demonstração em sala de aula. Fusco (2009) realizou um estudo de caso em que observou as dificuldades de um professor do ensino básico em identificar a hipótese e a tese em uma afirmação matemática da área de geometria, especialmente, quando essa não apresenta a famosa expressão “se e, somente se”. Discutiu, ainda, a importância da compreensão da informação dada no enunciado de uma proposição matemática e o reconhecimento de elementos cruciais como hipótese e tese que são fundamentais para o processo de construção de uma demonstração aceitável. Almouloud (2010) discutiu os entraves existentes quanto à utilização de provas e demonstrações em sala de aula dos ensinos fundamental e médio a partir de depoimentos de alguns professores a respeito da demonstração da fórmula de Baskhara utilizada na resolução de equações do 2º grau.

Nessa linha de pesquisa, pretendemos investigar como professores do ensino fundamental e médio reagem frente a uma demonstração da fórmula do número de combinações de *m* elementos tomados *r* a *r*. Tal demonstração lhes é familiar? As notações matemáticas e conceitos utilizados na demonstração são usuais no seu dia-a-dia como professor? Então, nós formadores, nos perguntamos: como os professores em atuação se relacionam com demonstrações? Eles apresentam demonstrações para seus alunos? A demonstração faz parte de seu cotidiano profissional? Vale mencionar que a Análise combinatória(AC) consiste em resolver problemas do cotidiano, nos quais é necessário determinar de quantas maneiras certo evento pode ocorrer. Em muitos casos, o conjunto considerado é grande para se fazer a contagem de seus elementos de forma explícita e, por isso, são necessários outros processos de contagem. A combinatória que inclui o estudo dos arranjos, das permutações e das combinações, permite determinar o número de possibilidades lógicas de certo evento, sem necessariamente enumerar cada caso. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) conteúdos como Estatística, Probabilidade e Combinatória estão incorporados ao item "Tratamento da Informação" e estão previstos para serem abordados com atenção no Ensino Médio conforme retratado no seguinte trecho:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, tanto das Ciências da natureza quanto das Ciências humanas. Isso mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da matemática e das demais ciências. e áreas. (PCNEM,2000,p.44)

## Reflexão teórica

Balacheff (1982) observou que as palavras prova, demonstração e explicação são frequentemente utilizadas como sinônimos. Apresentaremos a distinção feita pelo autor com relação a esses termos. A explicação situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático. A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social, constituindo-se uma prova para esta comunidade, seja a proposição "verdadeira" ou não. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, o autor a chama, somente neste caso, de *demonstração*.

Quando o professor introduz um novo conteúdo matemático ele pode aparecer como sequência de algo que já vem sendo estudado ou algo totalmente novo. É possível que o professor apresente esse conteúdo de forma que o aluno se sinta motivado a aprende-lo. Mas em muitos manuais didáticos ainda encontramos formas de ensinar que levam o aluno a "acreditar" nas fórmulas e resultados que lhes são apresentados.

As *provas* são explicações aceitas por outros num determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro. As demonstrações são provas particulares com as seguintes características:

- são as únicas aceitas pelos matemáticos
- respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas

- trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência.

Também não podemos deixar de considerar a crença de De Villiers (2002) de que a demonstração tem funções diversas em matemática uma vez que elas podem aparecer como um recurso para eliminar as dúvidas:

i) **Verificação**: convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;

ii) **Explicação**: compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;

iii) **Descoberta**: de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura;

iv) **Comunicação**: negociação do significado de objetos matemáticos;

v) **Desafio intelectual**: satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;

vi) **Sistematização**: organização de resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

Enquanto alguns autores procuram diferenciar explicação, argumentação, prova e demonstração de um ponto de vista de estrutura de construção ou de discurso outros se dedicam a explicações sobre demonstrações sob um ponto de vista cognitivo como é o caso de Duval (1995). Este autor, ao analisar as causas do fracasso no ensino e na aprendizagem da demonstração em Matemática entende a demonstração como uma atividade cognitiva específica cuja aprendizagem não está ligada a uma situação de interação social, nem subordinada às pressões internas de um objeto. Pelo contrário, é um modo de processamento cognitivo autônomo com características específicas quando comparada com outras formas de funcionamento de raciocínio como a indução, a argumentação ou a interpretação. Para o autor a aprendizagem da demonstração consiste primeiramente na conscientização de que se trata de um discurso diferente do que é praticado pelo pensamento natural. No entanto, tal conscientização só ocorre por uma articulação de dois registros, sendo um deles o da linguagem natural, que acredita deva ser utilizado pelo aluno. Além disso, existe um “gap” estrutural entre prova e argumentação uma vez que as inferências da argumentação são baseadas em conteúdos enquanto que as provas seguem um esquema dedutivo (dados, afirmações e regras de inferência).

Julgamos enriquecedor considerar, ainda, algumas definições relativas a prova elaborada por Harel (2008) que numa série de dois artigos discute duas questões:

1) Qual é a matemática que deveríamos ensinar na escola?

2) Como nós deveríamos ensiná-la?

A primeira questão está principalmente ligada a contextos relacionados à prova. E Harel (2008) faz as seguintes distinções: provar, prova e esquema de prova. Primeiramente, o autor define “provar” como o *ato mental* que uma pessoa (ou comunidade) emprega para remover dúvidas sobre a veracidade de uma afirmação. O ato de provar é incorporado por um de dois atos: verificar e persuadir, ou por uma combinação dos dois. Verificar é o ato que o indivíduo emprega para tirar suas próprias dúvidas sobre a veracidade de uma afirmação, enquanto que persuadir é o ato que o indivíduo emprega para tirar as dúvidas dos outros sobre a veracidade de uma afirmação. As definições a seguir são feitas dentro destas perspectivas. “Uma *prova* é o argumento particular que se produz para certificar para alguém ou para convencer os outros que uma afirmação é verdadeira, enquanto que um *esquema de prova* é uma característica cognitiva coletiva de provas que alguém produz” (Harel, p.489, nossa tradução)

Balacheff (1982) faz uma distinção entre *prova* e *demonstração,* enquanto que Harel (2008) distingue *provar* de *prova* . Acreditamos que as definições apresentadas acima se completam de alguma forma e nos permite refletir sobre o leque de possibilidades que uma prova ou demonstração nos oferece: desde o convencimento próprio da veracidade de uma afirmação, do convencimento de uma comunidade, passando pela aprendizagem de conteúdos diversos até a apreensão de um discurso diferente do qual estamos habituados como a linguagem natural.

**Estudo de caso**

Nesse projeto sobre o raciocínio dedutivo foram adotados os princípios da pesquisa-ação, uma vez que foi concebido e realizado com uma ação ou com a resolução de problema coletivo no qual tanto os pesquisadores quanto os professores participantes estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo (Thiolent, 1998).

Este trabalho consiste numa pesquisa qualitativa. Pretendemos relatar, em detalhe, parte de uma das atividades realizadas com professores que estavam participando do grupo de formação continuada, o que vem a caracterizar um estudo de caso. André (1995, p.30) coloca que o estudo de caso aparece há muitos anos nos livros de metodologia da pesquisa educacional como *“estudo descritivo de uma unidade, seja uma escola, um professor, um aluno ou uma sala de aula”*. A autora ainda pontua que o estudo de caso pode advir de uma questão particular que o pesquisador vai ajudar a elucidar. Nesse sentido, Ponte (2006) esclarece que um estudo de caso objetiva conhecer uma entidade bem definida, em profundidade, é uma investigação voltada para o “como” e o “porquê”, além de estar inserida em um certo contexto. Para o pesquisador:

> É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais especial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse. (Ponte, 2006, p.107)

Os professores participantes do projeto atuavam tanto na rede pública quanto privada e a formação acadêmica era variada: alguns possuíam licenciatura em matemática e outros algum tipo de complementação que os habilitava a lecionar. Os encontros do grupo eram semanais com duração de três horas. Nesses encontros os participantes costumavam receber, inicialmente, algum material fotocopiado com questões a serem discutidas ou problemas a serem resolvidos. A professora formadora solicitava que trabalhassem individualmente, em duplas ou trios. Havia momentos de discussão em que a formadora interagia com o grupo enriquecendo as conclusões ou eliminava dúvidas indo para a lousa.

No encontro que selecionamos foi distribuído para os participantes duas folhas fotocopiadas contendo a demonstração da fórmula que fornece o número de combinações de $m$ elementos tomados $r$ a $r$. Essa demonstração selecionada adota na primeira parte o estilo de demonstração por absurdo no qual se nega a tese e após uma sucessão de passagens matemáticas chega-se a um absurdo e, portanto, conclui-se que a tese é verdadeira. Na demonstração são utilizados conceitos prévios da análise combinatória como arranjos e teoria dos conjuntos. Essa redação está de acordo com a definição de Balacheff (1982) que considera como uma das características da demonstração respeitar certas regras e que alguns enunciados são deduzidos de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas. Trata-se de uma demonstração algébrica e, portanto, bastante distante da linguagem natural e segundo Duval (1995), a aprendizagem da demonstração consiste primeiramente na conscientização de que se trata de um discurso diferente do que é praticado pelo pensamento natural.

Transcrevemos abaixo a demonstração que os professores receberam o que possibilitará posteriormente a compreensão dos comentários que realizaram durante a sua leitura. Essa demonstração foi retirada do volume 5 de uma tradicional coleção de livros de matemática (Hazzan, p.33-34, 1993).

## Cálculo do número de combinações

$Seja\ M = \{a_{1,}, a_2, \dots, a_m\}$ *e indiquemos por* $C_{m,\ r}$ *ou* $\binom{m}{r}$ *o número de combinações dos m elementos tomados r a r.*

*Tomemos uma combinação, digamos esta:* $E_1 = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_r\}$. *Se permutarmos os elementos de* $E_1$, *obteremos* $r!$ *arranjos.*

*Se tomarmos outra combinação, digamos* $E_2 = \{a_2, a_3, \dots, a_r, a_{r+1}\}$, *permutanto os elementos de* $E_2$, *obteremos outros* $r!$ *arranjos.*

*Chamemos de x o número de combinações, isto é,* $x = C_{m,r}$ *e suponhamos formadas todas as combinações dos m elementos tomados* ***r a r***. *São elas:* $E_1, E_2, E_3, \dots, E_x$.

*Cada combinação* $E_i$ *dá origem a* $r!$ *arranjos. Chamemos de* $F_i$ *o conjunto dos arranjos gerados pelos elementos de* $E_i$.

*Temos então a seguinte correspondência:*

$$\begin{array}{l} E_1 \to F_1 \\ E_2 \to F_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ E_x \to F_x. \end{array}$$

Verifiquemos que: (I) $F_i \cap F_j = \emptyset\ para\ i \neq j$

(II)$F_i \cup F_2 \cup F_3 \cup \cdots \cup F_x = F$, *em que F é o número de arranjos dos m elementos de M tomados r a r.*

Temos: (I) *Se* $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ *(para* $i \neq$ *de j), então existiria um arranjo que pertenceria a* $F_i$ *e* $F_j$ *simultaneamente. Tomando os elementos desse arranjo obteríamos que coincidiria com* $E_i$ *e* $E_j$ *e, portanto,* $E_i = E_j$. *Isto é absurdo, pois quando construímos todas as combinações:* $E_i \neq E_j$ *(para* $i \neq j$*).*

*Logo,* $F_i \cap F_j = \emptyset$.

(II) *Para provarmos que* $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_x = F$, *provemos que:* $\begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_x \subset F\ e \\ F \subset F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_x. \end{cases}$

a) Seja $a$ um arranjo tal que $a \in F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_x$, *então* $a \in F_i$ *(para algum* $i \in \{1,2 \dots x\}$*)e, evidentemente,* $a \in F$; *logo:* $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \cdots \cup F_x \subset F$

b) *Seja agora a um arranjo tal que* $a \in F$. *Se tomarmos os elementos desse arranjo a, obteremos uma das combinações, digamos* $E_i$. *Ora, Como* $E_i$ *gera o conjunto dos arranjos* $F_i$, *então* $a \in F_i$ *e, portanto,* $a \in F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_i \cup \dots \cup F_x$

Então: $F \subset F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_x$

De (a) a (b) resulta que: $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_x = F$.

Sabemos ainda que, se *x* conjuntos são disjuntos dois a dois, o número de elementos da união deles é a soma do número de elementos de cada um

Isto é, $\#(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_x) = \#F \Longrightarrow \#F_1 + \#F_2 + \dots + \#F_x = \#F$

$$r! + r! + \cdots r! = \frac{m!}{(m-r)!} \Longrightarrow x \cdot r! = \frac{m!}{(m-r)!}$$

Logo: $x = \frac{m!}{(m-r)!r!}$. *Como x indica* $C_{m,r}$ $\left(ou \binom{m}{r}\right)$, *temos a fórmula do número de combinações:*

$$C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!} \quad \forall\, m, r \in \mathbb{N}^* \quad r < m$$

Nessa sessão estavam presentes uma formadora que indicaremos por F1 e os professores que se manifestaram serão identificados por P1,P2, P3 e P4 . Os professores receberam o material fotocopiado com a demonstração da fórmula do número de combinações e os objetivos da atividade eram que discutissem, compreendessem e interpretassem a demonstração. Inicialmente, os professores deveriam ler em duplas a demonstração e posteriormente haveria uma discussão com a formadora. Os comentários e toda a sessão foram registrados por duas professoras observadoras presentes e por meio de gravação. Passaremos a transcrever o trecho selecionado dessa sessão após a formadora ter solicitado que lessem a demonstração em duplas:

**P1**: Depois da leitura vamos começar a discutir porque

**P2**: Deu vontade de chorar.

**P2** propõe que comecem a ler juntos e começam a ler linha por linha.

**P3**: não entendi esse $a_m$ aqui.

**P1:** explica para ele; não sabemos de quantos em quantos e indica por $m$.

**P4**: quero entender esse $E_1$ e esse $E_2$.

**P1:** explica sempre que eu for permutar os elementos de $E$, vou obter $r!$.

**P4:** até aqui tá bom. Viram a página para 34.

Os professores recorrem à página anterior para entender $E_1 \rightarrow F_1$

**P4:** de onde vem o $j$ e o $i$

**P1**: são índices, para não falar 1, 2, 3, ficar numerando eles, são os conjuntos de arranjos.

Ex.: $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ (**P1** faz a lápis explicando para colegas)

Ex.: $\left.\begin{matrix} abc \\ acd \end{matrix}\right\rangle$ esses conjuntinhos chamamos de combinação.

Permutou elementos das combinações (c,b,a) e esses arranjos chamou de F. Cada combinação tem seus F...

Sabe Deus se é isso mesmo.

Cada combinação tem $r!$ Se ele fizer a intersecção dos arranjos vai dar $\phi$.

O arranjo pode trocar de lugar.

Na combinação $acd = cda$. $\{abc\} \rightarrow \{cba\}\{acb\}$ (arranjos de uma combinação)

A intersecção de arranjos de uma combinação com os arranjos de outra combinação vai dar $\phi$.

**P4**: Aí **P1** matou se $F_i \wedge F_j = \phi$ então $F_i \wedge F_j \neq \phi$ é absurdo.

**P2:** Estou acompanhando tudo, entendi tudo.

**P1** pede para que os colegas também falem; pois só ela fala.

**P4**:Duas combinações diferentes dão arranjos diferentes

**P1:**Tudo bem afirmou isso aqui:

II $\rightarrow$ agora para entender que a "soma" da F. Como perguntei aonde? Me mostrou II e consertou "a união dá F".

Leram e releram silenciosamente.

**P2**:Vai provar que todos os arranjos estão contidos em F, nossa que difícil. Parece que a gente está vendo hieróglifos.

A formadora **F1** interrompe dizendo que se quiserem ela reescreve demonstração

**P3:** parece que a gente está lendo inglês. (forma mais palpável).

**F1:** eu nem comecei por PIF.

**P3**: aí não teria ninguém aqui.

**P1**: tá, então vou pegar um arranjo qualquer que chamo de $\underline{a}$ , que com certeza, vai pertencer a união de todos.

**P3**: $\underline{a}$ seria um elemento, porque o símbolo pertence é para elemento.

**P1**: a gente tem as combinações e os arranjos, subconjunto se relaciona com pertence. Um subconjunto que chamou de $\underline{a}$ pertence a um conjunto.

**P4**: conjunto universo.

**P3 insiste:** conjunto com conjunto não se usa $\in$ .

**P4**: é isso está confuso

**P3**: a não ser que ele esteja......

**P1 relê em voz alta:** $\underline{a}$ é um dos arranjos.

**P4:** pega um dos arranjos.

**P1:** esse arranjo é como se fosse um elemento.

**P4:** estamos pensando num arranjo como elemento único individual, mas não é. É uma parte do conjunto de arranjos....

Como surgiram muitas dúvidas durante a leitura da demonstração foi necessário que a professora formadora fosse para a lousa e fizesse a demonstração prestando os devidos esclarecimentos e sanando as dúvidas.

## Considerações sobre os depoimentos dos professores

O trabalho proposto pela formadora consistia em que os professores lessem uma usual demonstração da fórmula para o cálculo do número de combinações de *m* elementos tomados *r* a *r* a fim de verificar seu grau de compreensão do texto. Mesmo tratando-se de uma atividade em que os professores não deveriam redigir uma demonstração, mas apenas compreendê-la observamos que apresentaram uma série de dificuldades.

Nesse contato inicial com a demonstração da fórmula os professores apresentaram dificuldades básicas como a compreensão do significado de notações como $a_m$ , $E_1$ e $E_2$, índices *i* e *j*. tais dificuldades ficaram evidentes com os seguintes comentários: *não entendi esse $a_m$ aqui; quero entender esse $E_1$ e esse $E_2$; de onde vem o $j$ e o $i$*. Nota-se que as dificuldades já apareceram na primeira linha da demonstração quando se considerou um conjunto qualquer M com *m* elementos indicados por $a_1, a_2, ..., a_m$ . A seguir, as combinações de *r* elementos foram indicadas por $E_1, E_2, ..., E_x$ e tal indicação também não foi aceita com clareza. Cada combinação foi chamada de forma genérica por $E_i$ e $F_i$ foi a denominação dada para o conjunto dos arranjos gerados pelos elementos de $E_i$. Para indicar que conjuntos de arranjos gerados por diferentes combinações não possuem elementos comuns foi utilizada a seguinte notação: $F_i \cap F_j = Ø$. E com relação a esses índices *i* e *j* que alguns professores questionaram de onde haviam surgido. Fica evidente que não estão habituados com notações que possibilitam generalizações.

Os obstáculos que os professores tiveram que enfrentar para tentar entender a demonstração da fórmula do número de combinações foram desde a compreensão das notações utilizadas até os conceitos matemáticos necessários, propriamente ditos. Inclusive, observa-se que alguns dos professores ainda não possuíam noções claras da teoria de conjuntos onde o símbolo utilizado para se relacionar elemento com conjunto é "pertence" ($\in$) e os símbolos utilizados para relacionar conjunto com conjunto são "está contido" ($\subset$) e "contém" ($\supset$). Tal fato é constatado quando P1 diz que *"subconjunto se relaciona com pertence"* e P3 insiste**:** *"conjunto com conjunto não se usa pertence ".*

Esses comentários dos professores que demonstraram ter necessidade de conhecimentos como notações de termos genéricos e noções de teoria de conjuntos para compreender a demonstração de uma fórmula de número de combinações ilustram as considerações de Rav (1999) que afirma que as demonstrações têm uma importância que vai além de estabelecer uma verdade matemática. O autor considera que a prova tem valor não só porque demonstra um resultado, mas também porque apresenta novos métodos, ferramentas, estratégias e conceitos que possuem uma ampla aplicabilidade em matemática e possibilita o desenvolvimento de novas direções matemáticas. Ainda, para o autor, as provas são o alicerce do conhecimento matemático. Essas dificuldades de compreensão que os professores apresentaram na compreensão da demonstração também estão relacionadas com o fato de tratar-se de um discurso diferente do que é praticado pelo pensamento natural, exigindo uma atividade cognitiva específica (Duval,1995).

Entretanto, alguns professores possuíam noção de análise combinatória como é o caso de **P1** que explica de forma coloquial que *abc* e *acd* são "conjuntinhos chamados de combinação" e com relação a arranjo diz que "arranjo pode trocar de lugar" e exemplifica " $acd = cda$ ".

As expressões utilizadas durante a leitura da demonstração deixam claro que o texto não era familiar dos professores e que, portanto, não estavam habituados a demonstrar: *Deu vontade de chorar, Sabe Deus se é isso mesmo; parece que a gente está lendo inglês, ... nossa que difícil. Parece que a gente está vendo hieróglifos.*

Considerando toda a dificuldade que os professores tiveram na leitura da demonstração pode-se concluir que:

- Demonstrar não faz parte do cotidiano desses professores
- Possuem deficiências de alguns conteúdos matemáticos que acabam se tornando obstáculos na compreensão de demonstrações

Diante dessa realidade, temos indícios do porque demonstrar não faz parte da rotina de professores do ensino fundamental e médio. Essa realidade mostra também que é muito difícil ou praticamente impossível ensinar algo que não se domina. Essa atividade propiciou aos professores em formação não só o estudo da demonstração da fórmula que permite calcular o número de combinações, mas também o resgate de conteúdos de teoria de conjuntos e notações de termos genéricos.

Usualmente, os alunos são levados a redigir soluções de problemas, mas, geralmente, não vivenciam situações que favorecem a elaboração de demonstrações. Sabe-se que o ensino da prova tem o potencial de tornar conhecido dos alunos outras partes importantes do conhecimento da matemática e fornecer para eles um quadro mais amplo da natureza da matemática conforme acredita Hanna (2008) que ainda considera que as demonstrações possuem uma função que vai além da comprovação da afirmação em questão, "elas têm a capacidade de expandir a caixa de ferramentas de técnicas e estratégias dos estudantes para a resolução de problemas" (Hanna, p.348, 2008). Esperamos que com um projeto de formação continuada mais abrangente, e que seja proposto a nível nacional, essas dificuldades que os professores em serviço encontram com relação a conhecimentos matemáticos possam ser superadas e que esse quadro possa ser revertido com os professores passando a levar a demonstração para a sala de aula.

## Bibliografia e referências


Almouloud, S. A., & Fusco, C. A. (2006). Discutindo algumas dificuldades de professores dos ensinos fundamental e médio a respeito do conceito de demonstração. In *Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3, 2006*. Águas de Lindóia, SP. Anais... Águas de Lindóia.

André, M. E. D. A. de. (1995). *Etnografia da prática escolar.* Campinas: Papirus.

Balacheff, N.. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches em Didactique des Matémathiques*, *3*(3), 261-304. Grenoble.

Brasil. Ministério da Educação. (2000). *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio*. Brasília: Secretaria da Educação Média e Tecnológica

De VillierS, M. (2002). Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica (Trad. Rita Bastos). *ProfMat*, 10, 2002, Visue, Portugal. Actas... (CD-ROM) Visue: Associação de Professores de Matemática.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Suiça: Peter Lang.

Duval, R. (2000). Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *20*(2), 135-170.

Fusco, C. A., & Almouloud, S. A. (2009). A prova e demonstração: uma questão problemática para professores do ensino básico. In *Simpósio de educação matemática, 10, 2009.* Anais ... Chivilcoy, Argentina.

Hanna, G., & Barbeau, Ed. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education*, *40*(3), 345-453. Heidelberg: Springer Berlin, Disponível em: < http://www.springerlink.com/content/l811525732721706/>. Acesso em 25 ago.2014.

Harel, G. (Ed.). (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. ZDM Mathematics Education, *40*(3), 487-500, Heidelberg: Springer Berlin.

Hazzan, S. (1993). *Fundamentos da matemática elementar: combinatória, probabilidade* (6ª ed., Vol. 5). São Paulo: Atual.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *BOLEMA*, *19*(24), 105-132. Rio Claro (SP).

Thiollent, M. (1998). *Metodologia da pesquisa-ação* (8ª ed.). São Paulo: Cortez.