Caracterização de modelos de divisão por professores de Matemática ao interpretar problemas de alunos

Gabriela Félix **Brião**
Instituto de Aplicação, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)
Universidade Estadual Paulista (UNESP-Rio Claro)
Brasil
gabriela.felix@gmail.com
João Luiz **Muzinatti**
Universidade Estadual Paulista (UNESP-Rio Claro)
Brasil
joaomuzinatti@uol.com.br
C. Miguel **Ribeiro**
Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações (CIEO) – Universidade de
Algarve
Portugal
Universidade Estadual Paulista (UNESP-Rio Claro)
Brasil
cmribeiro@ualg.pt

Resumo

O presente trabalho analisa aspectos do conhecimento especializado do professor de Matemática (MTSK) na Educação Básica na operação aritmética de Divisão. A partir de um estudo de caso em que alunos de 7º ano do ensino fundamental formularam problemas que pudessem ser resolvidos por divisões inicialmente propostas, e os mesmos analisados e comentados por professores de matemática, foi possível inferir sobre a falta de vivência dos mestres nas questões conceituais mais profundas que envolvem a Divisão. Os professores pelo fato de não abordarem cotidianamente os modelos de Repartição e Agrupamento, acabam por apresentar dificuldades em reconhecer tais modelos. Daí, constata-se, a necessidade da Formação Continuada dos professores, pois o sentido que o aprendizado de Matemática poderá ter para os alunos dependerá também da fluência como os mestres tratam as especificidades da disciplina em sala de aula.

Palavras-chave: Formação de professores de Matemática. Conhecimento do professor. Estudo de caso. Educação Matemática.

Introdução

A ideia de número é, sem dúvida, um dos temas mais importantes da chamada Matemática Fundamental, com contribuição de diversas civilizações antigas. Segundo o que se encontra referido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs - Brasil), o aluno, à medida que se depara com situações-problema – envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação – vai ampliando [dialeticamente] seu conceito de número. Atendendo ao fato que a divisão, a par da subtração (e.g., Fosnot e Dolk, 2001; Martins e Ribeiro, 2013), é uma das operações mais sofisticadas a ser aprendida nas séries iniciais do ensino básico e em que alunos e professores revelam maiores dificuldades (e.g., Lamon, 2007; Newstead e Murray 1998). Essas dificuldades dos alunos podem estar associadas ao fato de a divisão se encontrar diretamente relacionada com as demais operações, podendo ser encarada tanto como subtração, adição ou multiplicação – dependendo da abordagem que seja efetuada. Assim, dividir exige uma compreensão clara e profunda do sentido das demais operações e, portanto, do sentido de número.

No sentido de que seja possível diminuir as dificuldades dos alunos, em particular no âmbito da divisão, e considerando que o conhecimento do professor é um dos fatores que influi diretamente na aprendizagem dos alunos (e.g., Grossman, 2010), é essencial um foco no conhecimento do professor sobre a operação. Esse conhecimento do professor é encarado de forma mais ampla e profunda que o conhecimento esperado dos alunos que ensina (virá a ensinar) e no contexto deste trabalho é encarado na perspectiva do *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008). Um dos aspetos centrais da prática letiva relaciona-se com a elaboração e implementação de tarefas pelo que, de forma a potenciar as aprendizagens dos alunos, é essencial que o professor detenha um conhecimento que lhe permita atribuir sentido ao que os alunos dizem e fazem, tanto em termos de produções escritas como de comentários (e.g., Ribeiro, Mellone e Jakobsen, 2013).

Os problemas que, para serem resolvidos utilizam a divisão, em sua grande maioria podem ser classificados em problemas de repartição e em problemas de agrupamento. Nos modelos primitivos de multiplicação e divisão desenvolvidos por Fischbein, Deri, Nello e Marino (1985) há a descrição da divisão por repartição, onde um objeto ou coleção de objetos é dividida em um mesmo número de fragmentos ou sub-coleções. Neste modelo há a ideia de partilha. Já a divisão por agrupamento é entendida como a busca por determinar-se quantas vezes uma dada quantidade está contida em outra. Este modelo lida com o conceito de medida.

A operação de divisão não constitui simplesmente um domínio cuja dificuldade operatória - caracterizada por uma forma algorítmica complexa - seja o ponto mais relevante quando se pensa no ensino e na aprendizagem da mesma. A reflexão acerca dos significados do que é dividir, sem dúvida, é um instrumental muito importante para que o estudante possa lidar com situações relacionadas à proporcionalidade e às sub-multiplicidades, que caracterizam muitos dos aspectos de ciências como Física e Química, por exemplo. Mas, esses modelos são normalmente discutidos em sala de aula? Esse corresponde a um dos aspetos do conhecimento matemático para ensinar (MKT) e, apesar de a divisão fazer parte do ensino nas séries iniciais, sua relevância se apresenta indiscutivelmente em vários conteúdos apresentados em etapas posteriores na formação escolar. Tendo em consideração esse conhecimento específico do professor, neste trabalho procuramos responder à seguinte pergunta:

Como professoras de Matemática interpretam e que significado atribuem a problemas de divisão criados por alunos do sétimo ano?

Para responder a tal pergunta, é importante não apenas procurar entender o que os professores sabem/conhecem, mas essencialmente como o sabem/conhecem, tanto em termos do tipo e natureza do conhecimento procedimental como da existência, ou não, de uma conceitualização mais ampla e aprofundada sobre o tema envolvendo, entre outros, um profundo conhecimento do sentido de número e de operação.

Algumas notas teóricas

Considerando o contexto deste trabalho iremos abordar quatro dimensões teóricas de forma imbricada. Como aspecto nuclear temos o conhecimento do professor, que aqui é encarado na perspetiva do *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball et al., 2008) e como elementos desse conhecimento abordaremos aspectos da divisão, da formulação de problemas (Leung & Silver, 1997) e da atribuição de sentido às resoluções/comentários dos alunos (Jakobsen, Ribeiro & Mellone, 2014; Ribeiro, et al., 2013).

De entre as diversas concetualizações do conhecimento do professor, neste trabalho, assumimos o MKT, cujos subdomínios se ilustram na Figura 1, e focamo-nos nos três subdomínios do conhecimento do conteúdo.

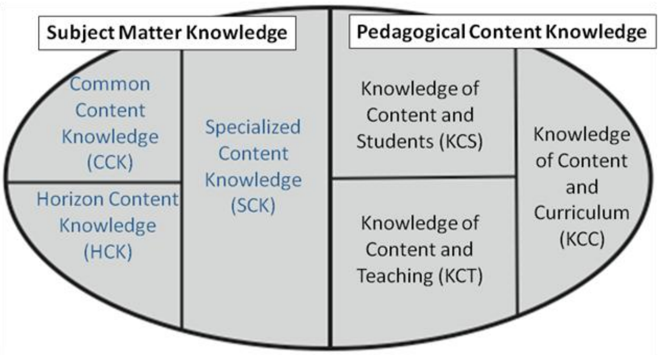

Figura 1. Domínios do Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball et al., 2008)

O Conhecimento Matemático, envolvido na atuação docente engloba um *Common Content Knowledge* (CCK), que corresponde a um conhecimento associado ao “saber fazer” e, portanto, comum a qualquer pessoa com algum tipo de formação matemática. Complementarmente, ao professor cumprirá um conhecimento matemático mais especializado, que os autores denominam por *Specialized Content Knowledege* (SCK) e que se associa às especificidades da atuação docente, referindo-se, entre outros, ao entender os porquês associados a determinado procedimento ou raciocínio, atribuir sentido às resoluções de outros (alunos), ou seja, deter uma compreensão integral dos conteúdo, para que possa, posteriormente, preparar e implementar tarefas e formular problemas que permitam que os seus alunos desenvolvam um conhecimento matemático de forma sustentada e relacional. Para além destes aspectos do conhecimento do conteúdo, e segundo a conceitualização do MKT, ao professor cumpre ainda um *Horizon Content Knowledge* (HCK) que se corresponde a um conhecimento que o permite ouvir os alunos e fazer conexões entre o que estes dizem e/ou fazem e alguns temas matemáticos mais avançados que poderão estar envolvidos nesses comentários e/ou raciocínios, ainda que implicitamente (e.g, Jakobsen, Thames, Ribeiro e Delaney, 2012).

Como parte desse conhecimento do professor, ao pensarmos no conteúdo concreto da divisão, e em particular na formulação de problemas envolvendo a divisão, ao professor cumprirá um conhecimento que lhe permita efetuar corretamente a operação, aplicando ou não um determinado algoritmo; reconhecer respostas incorretas; utilizar notações matemáticas corretamente ou resolver corretamente um determinado problema (Ribeiro, Amaral, Pinto & Flores, 2014). Para além disso cumprirá também um conhecimento associado aos modelos primitivos de divisão, sustentando também o seu conhecimento interpretativo, no sentido de ampliar o seu próprio espaço de exemplos (Jakobsen, et al., 2014), de modo a que possa atribuir efetivo significado aos comentários dos alunos, encontrando-se, assim, em condições de fornecer um *feedback* construtivo (e.g., Santos e Pinto, 2009).

Tirosh e Graeber (1990), apresentam um conjunto de mal-entendidos associados à divisão e que dizem respeito às concepções primárias do que denominam de dois modelos primitivos de divisão (repartição e agrupamento). Um conhecimento associado a estes modelos (primitivos), influenciam o reconhecimento, por parte dos futuros professores, de inconsistências entre a convicção expressa por eles (o quociente deve ser menor que o dividendo) e os resultados de um cálculo com um divisor decimal menor do que a unidade (e.g., considerando a operação 3.75:0.75, ao fazer a pergunta sobre quantas vezes o número 0.75 cabe no número 3.75, a resposta é 5 vezes, daí que estimular a inserção do modelo de agrupamento torna mais natural, neste caso, perceber que o quociente se tornou maior que o dividendo).

Assim, no sentido de que os professores possam desenvolver um conhecimento especializado que lhe permita explorar os diferentes conteúdos com os seus alunos de modo a que estes efetivamente possam entender o que fazem e porque o fazem, a cada momento é essencial que detenham, também, o que Ma (1999) denomina de compreensão profunda da matemática fundamental e que tem conectividade, promove múltiplas abordagens para resolver um dado problema, revisita e reforça ideias básicas e tem coerência longitudinal. Esta relação do conhecimento do professor com a resolução de problemas segue o que referem muitos dos Currículos de diferentes países relativamente à importância de que os alunos resolvam problemas (e.g., MEC, 1998; NCTM, 2000). No entanto, para que os alunos possam resolver "bons" problemas, eles têm de ser formulados, daí que consideramos que um conhecimento que permita formular bons problemas, e antecipar um conjunto diversificado de respostas e raciocínios é um dos aspectos essenciais do conhecimento especializado do professor.

Ao pensarmos na formulação de (bons) problemas temos de ter em conta diversos factores, entre eles o contexto, o tipo de variáveis, a diversidade de respostas ou mesmo a correspondencia, ou não, entre o problema formulado e a expressão fornecida inicialmente, quando esse é o caso (e.g., Ribeiro, et al., 2014). Considerando a categorização de Leung e Silver (1997) relativamente à formulação de problemas, consideramos a existência de uma diferença sutil entre um problema matemático considerado *impossível* e um problema matemático *insuficiente*. O problema será impossível quando não possuir uma resposta. O problema será insuficiente quando possuir diversas respostas possíveis, por conta de *faltarem dados*, de maneira que não se tenha uma resposta única.

Contexto e método

Este texto forma parte de uma pesquisa maior onde um dos objetivos se relaciona com o entender o conhecimento matemático para ensinar revelado por professores de matemática (professores de alunos na faixa dos 11 aos 17 anos) no âmbito da divisão, mesmo não tendo de ensinar esse tema aos seus alunos. Uma das justificativas para este fato é sugerir que talvez as dificuldades apresentadas pelos alunos, em diversos tópicos mais a frente na sua trajetória escolar, são decorrência de uma falta de embasamento teórico por parte dos professores para superar o paradigma dos modelos primitivos e suas restrições. Com esta pesquisa pretendemos obter um mais amplo entendimento sobre a(s) forma(s) como um grupo de professores (seis) lida com o conhecimento e produções dos alunos sobre um assunto específico da matemática básica: a divisão e seus modelos de ação. Segundo Shulman (1985), para realizar um trabalho de investigação, os pesquisadores devem necessariamente reduzir seu escopo, concentrar sua visão e formular uma pergunta muito menos complexa do que a forma em que o mundo se apresenta na prática.

O trabalho combina uma metodologia essencialmente qualitativa com um estudo de caso instrumental (Stake, 2005). A coleta de dados envolveu três momentos distintos e envolveu tanto alunos como professores (destes alguns responderam as diferentes questões –veja-se abaixo- presencialmente e outros via email). Em um primeiro momento, um conjunto de atividades foi apresentado para duas turmas de alunos de sétimo ano do ensino fundamental (60 alunos de cerca de 12 anos). Os estudantes foram divididos em grupos de quatro e resolveram um conjunto de atividades. Abaixo apresentam-se duas dessas atividades inspiradas em Simon (1993).

Atividade 1*: Escreva um problema que tenha como solução a divisão 51:4.*

Agora, escreva um problema que envolva a divisão 51:4 cuja resultado seja:

a) $12\frac{3}{4}$ *b)* 13 *c)* 12

Atividade 2*: Observe os problemas abaixo:*

i) Tenho 10 lápis e quero distribuí-los igualmente entre 5 pessoas. Quantos lápis cada pessoa receberá?

10 lápis : 5 = 2 lápis (repartição)

ii) Quantas caixas de 5 lápis cada uma se consegue formar com 10 lápis?

10 lápis : 5 lápis = 2 (agrupamento)

Decida sobre cada uma das respostas do exercício anterior em qual tipo de problema se encaixa o que você escreveu. Faça novos problemas para o exercício anterior mudando a categoria escolhida anteriormente. É possível fazer isso em todos?

Na segunda etapa, os professores participaram da pesquisa via email e, também pessoalmente, com a orientação de que deveriam responder à atividade (a mesma que os alunos, apresentada acima) respeitando a ordem em que cada exercício foi apresentado e de que todos os exercícios deveriam ser feitos a caneta (para assegurar que as professoras não revisassem as suas repostas). Por email, esta orientação de não revisar o que foi feito foi mantida. Seis professoras de Matemática (de Ensino Fundamental II e Ensino Médio) aceitaram a proposta – duas presencialmente e quatro via e-mail. Destas seis professoras, três têm cerca de trinta anos de magistério cada uma, uma é recém-formada e as outras duas estão ainda em formação inicial.

O terceiro momento da coleta se caracterizou pela apresentação às professoras de onze problemas selecionados dentre os produzidos pelos alunos ao responderem a atividade 1, com o intuito de que estas efetuassem uma análise dos problemas formulados pelos alunos, tendo sido solicitado que caracterizassem a expressão que resolvia o problema; a resposta do problema; e o modelo de divisão utilizado. Neste texto focamo-nos nas respostas dos professores associadas à análise de um desses problemas formulado por um dos alunos.

> *Gabriela quis distribuir 51 bombons para seus 4 filhos sabendo que um ganharia mais. Qual a quantidade que este ganhou?*

A análise foca-se, assim, nas respostas das professoras quanto ao tipo de problema que consideram ser o apresentado pelo aluno (e.g., possível, impossível, bem ou mal formulado), bem como os modelos primitivos de divisão – repartição ou agrupamento – que consideram estar presente no enunciado anterior. Pretende-se assim, também, expandir um pouco a noção de conhecimento interpretativo apresentado por Jakobsen, et al., (2014) e Ribeiro, et al., (2013) ao contexto da interpretação da formulação de problemas.

Discussão de alguns resultados preliminares

Começamos por apresentar a análise das professoras ao problema formulado em termos do tipo de problema e do modelo de divisão presente. Posteriomente discutimos a dicotomia existente ao classificarem o mesmo problema tanto como de repartição como de agrupamento e o conhecimento matemático associado às classificações e comentários realizados associados ao problema anterior (complementando com alguns dos problemas formulados pelas professores que permitem uma discussão mais fina sobre o seu conhecimento relativo à divisão).

Na Tabela 1 apresentam-se as respostas das professoras quando solicitadas para analisarem o problema proposto pelo aluno.

Tabela 1

Análise do problema VII dos alunos realizado pelas seis professoras

	PROF. 1	PROF. 2	PROF.3	PROF. 4	PROF. 5	PROF. 6
Classificação do problema	Repartição e Agrupamento	Repartição	Mal formulado/ Repartição	Mal formulado/ Repartição	Repartição	Repartição

Ao analisar as respostas ressaltam dois casos distintos. Por um lado o fato de uma das professoras considerar o mesmo problema simultaneamente de repartição e de agrupamento e, por outro lado, ao considerarem que o problema não tinha dados suficientes, o destacavam como mal formulado.

Repartição e agrupamento. A professora que classificou o problema simultaneamente como de repartição e de agrupamento, apresenta a seguinte resposta para o mesmo:

> *51 = 3 x 12 + 15; 3 filhos ganharam 12 bombons e 1 filho ganhou 15 bombons. Problema de repartição e agrupamento. Este é um problema de repartição, porém não de divisão.*

Esta resposta, apesar de, ou talvez por ser contraditória, revela aspetos importantes do conhecimento matemático da professora relativamente ao sentido de operação. Por um lado, relativamente ao fato de assumir que um mesmo problema pode ser considerado simultaneamente com dois sentidos (impossibilidade que seria expectavel um aluno das etapas iniciais poder identificar) e, portanto, um conhecimento que se encontra num nível elementar do CCK. Por outro lado o assumir de forma disjunta repartição e divisão revela aspetos que urgem, também, ser colmatados na formação (tanto inicial como continua) pois apenas dessa forma poderá ser possível criar as basas sustantadoras para o desenvolvimento de um SCK que possibilite a interpretação significativa das resoluções/respostas dos alunos.

Note-se que, antes de responder a esta segunda etapa, a professora apresentou como resposta o seguinte problema:

> *Tenho que distribuir 51 litros de leite entre 4 famílias, porém todas elas devem receber embalagens fechadas de 1 litro. Como posso fazer esta divisão de modo que três famílias recebam quantidades iguais de leite e uma receba um litro a menos?*

Quando contrastamos o enunciado formulado pela professora com a classificação/comentários que faz do problema enunciado pelo aluno observa-se que, pelo menos parcialmente, esta efetuou uma correspondência direta entre o seu próprio espaço de solução com a resposta do aluno. Este resultado está alinhado com os resultados apresentados por Jakobsen, et al., (2014) relativamente à existência de uma limitação na cardinalidade, e diversidade de elementos do próprio conjunto de soluções, sendo aparentemente este formado apenas por um elemento. Note-se que dividir pode possuir o sentido de repartir, necessariamente de forma equitativa, porém a ação de repartir pode não ser descrita pela operação de divisão (equitativa, subentendido), pois não necessita que seja uma repartição em partes iguais – veja-se, por exemplo o contexto de problemas de divisão justa (e.g., Ribeiro, 2010). No entanto, este é um conhecimento que cumprirá ao professor por forma a poder interpretar as respostas dos alunos e a formular, ele próprio problemas de divisão sabendo que, intuitivamente, os alunos entenderão o dividir tanto como repartição ou agrupamento, mas essencialmente equitativamente – fundamentalmente quando são já conhecedores de algum processo algoritmico para resolver a operação.

Problema mal formulado e/ou repartição. Duas das professoras, apesar de observaram que o problema, tal como estava formulado, não era de divisão em partes iguais, revelam um CCK associado à dificuldade de identificação da origem dessa não divisão e partes iguais, considerando, assim que era um problema que se encontrava mal formulado. Sendo a divisão uma das operações em que os alunos apresentam maiores dificuldades (e.g., Lamon, 2007; Newstead e Murray 1998), em particular nas situações envolvendo resto, ou quantidades não inteiras quando exata, esta configura-se também uma situação matematicamente crítica para estas professoras. Assim corresponde-se a uma situação em que urge um foco na formação, de modo a que seja possível quebrar o ciclo vicioso de ensinar como fomos ensinados (e.g., Mellado, Ruiz e Blanco, 1997), e de modo a que seja possível, portanto, concomitantemente, uma aproximação entre teoria e prática, sendo explorado e desenvolvido esse conhecimento em relação estreita com a prática e situações dessa prática (Thames & Van Zoest, 2013) – de modo que os professores lhe possam atribuir sentido e considera-las como suas.

As três restantes professoras identificam o problema como sendo um problema de repartição, não salientando, no entanto o fato de que, não sendo uma repartição equitativa, dependendo do conjunto em que consideremos o espaço de soluções, o problema poderá ter infinitas soluções. Este corresponde-se a outro aspeto do conhecimento do professor e que se relaciona com a natureza, tipo e diversidade de conexões que esse conhecimento permite efetuar. Essas conexões, incluindo, inclusivamente, possíveis tópicos distantes encontram-se também na base de um conhecimento interpretativo associado à formulação de problemas já que há que ter especial atenção ao dominio em que nos movemos e à natueza e tipo do raciocinio e conheciemnto que pretendemos potenciar nos alunos.

Algumas notas finais

As professoras, no geral, não parecem acostumadas a discutir as ações envolvidas nas operações aritméticas, inclusive para fomentar a introdução aos alunos de outros modelos não implícitos ou naturais. Esse conhecimento especializado do professor é fundamental para a construção de um saber mais sólido associado ao conceito de divisão – mesmo que esse não seja conteúdo programático (direto) do Ensino Fundamental II. Afinal, há que se ter, sempre, a possibilidade de problematizar, questionar e fazer com que os alunos testem seu repertório, a fim de que este ganhe cada vez mais consistência. A breve discussão efetuada ilustra a necessidade de que a formação de professores de Matemática (inclsivamente a inicial) se foque num aprofundamento conceitual e não nos processos algébricos por si. Estes rsultados servem também como uma chamada de atenção e necessidade de reflexão sobre as nossas próprias práticas enquanto formadores de professores e a necessidade de que se passe (inicie e/ou continue) efetivamemte a utilizar os resultados da investigação em prol da formação.

Pôde-se observar diversas discrepâncias nas interpretações deste grupo de professoras em relação à interpretação da produção dos alunos sobre divisão e seus modelos primitivos. Discutimos alguns aspetos do seu conhecimento interpretativo sendo que será necessário complementar e aprofundar a análise de modo a que permita obter uma visão mais ampla sobre que conhecimento mobilizam e qual o seu conteúdo ao responderem e analisarem a totalidade dos problemas propostos aos alunos (que são de diferentes naturezas).

Tendo em consideração alguns dos aspetos referidos, surge então naturalmente a questão relativamente ao que se poderá fazer para contribuir para o desenvolvimento de um conhecimento especializado (mais amplo, portanto que um saber fazer) do professor. Uma possível aproximação a essa problemática será, consideramos, uma formação continuada que tenha a sala de aula como ponto de partida e de chegada, centrando-se na discussão e reflexão sobre situações da prática (reais ou hipotéticas) que tenham como objetivo primordial discutir e desenvolver o conhecimento matemático para ensinar do professor, iniciando pelo SCK e HCK, já que o desenvolvimento destes tipos de conhecimento do conteúdo sustentam também o posterior desenvolvimento dos subdomínios do conhecimento didático do conteúdo (e.g., Baumert, et al., 2010).

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133-180.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Grossman, P. L. (2010). Learning to Practice: the design of clinical experience in teacher preparation. *Nea policy brief, May*.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), to appear.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. In ICME (Ed.), *12th International Congress in Mathematics Education (12th ICME)* (pp. 4635-4644). Seoul (Coreia): ICME.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook ok mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Greenwich, CT: Information Age Publishing

Leung, S.-k. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers *Mathematics Education Research Journal 9*(1), 5-24.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US*. Mahwash, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Martins, F., & Ribeiro, C. M. (2013). Atribuir sentido aos raciocínios associados às resoluções de alunos no caso da subtração: discutindo o conhecimento de futuros professores. In R. Cadima, H. Pinto, H. Menino & I. S. Simões (Eds.), *Atas da Conferência Internacional de Investigação, Práticas e Contextos em Educação* (pp. 192-200). Leiria: ESECS.

Mellado, V. J., Ruiz, C. M., & Blanco, J. L. (1997). Aprender a enseñar Ciencias Experimentales en la formación inicial de maestros. *Bórdon, 49*(3), 275-288.

Newstead, K., & Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 295-303). Stellenbosch, South Africa.

Ribeiro, C. M. (2010). Una división en que todos ganan: un caso de división justa. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 63, 43-48. ISSN: 1130-488X.

Ribeiro, C. M., Amaral, R. B., Pinto, H., & Flores, É. (2014). Conhecimento matemático especializado do professor - discutindo um caso na formulação de problemas de divisão *Atas II Congresso Nacional de Formação de Professores e*

XII Congresso Estadual Paulista sobre Formação de Educadores (pp. 2058-2070). São Paulo: UNESP.

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - mathematics learning across the life span* (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel, Germany: PME.

Santos, L., & Pinto, J. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 49-56). Thessaloniki, Greece: PME.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp. 443-466). Thousand Oaks: Sage Publications.

Thames, M., & Van Zoest, L. R. (2013). Building coherence in research on mathematics teacher characteristics by developing practice based approaches. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45*, 583-594.