Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales mediadas por simulaciones interactivas

Juan Carlos **Molina** García
Instituto Tecnológico Metropolitano
Colombia
juanmolina@itm.edu.co

Resumen

Los sistemas interactivos se configuran como una fuente importante de generación de experiencias de aprendizaje ya que cautivan el interés del estudiante y le permiten realizar pruebas de variación, contraste y verificación de resultados. Una experiencia de aprendizaje fundamentada en la visualización y exploración interactiva, estimula el desarrollo de las operaciones mentales y acerca el estudiante al dominio de conceptos y procedimientos matemáticos. El propósito del taller apunta a la configuración de sistemas interactivos basados en sistemas dinámicos que surgen de modelos matemáticos obtenidos de soluciones de problemas de aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Tales modelos se llevan a un diagrama de bloques soportado en la herramienta Simulink de Matlab, con lo que se obtiene una representación gráfica del modelo y un recurso de mediación que favorece en el estudiante la comprensión del problema de aplicación y la apropiación de significados.

Palabras clave: Sistemas interactivos, modelos dinámicos, recursos de mediación, herramienta Simulink de Matlab.

Modelación de sistemas

La modelación de sistemas es un área básica de estudio a nivel de programas de educación superior relacionados con la electrónica, mecatrónica, biomédica y la automatización y control entre otros. El estudio de dicha área es fundamental en la formación en ciencias aplicadas del estudiante, por lo que es considerada como un área integradora que involucra conocimientos relacionados con el álgebra lineal, el cálculo diferencial e integral y las ecuaciones diferenciales. De esta manera, la modelación de sistemas valída su importancia por lo que se configura como un área que relaciona conceptos matemáticos básicos con conceptos avanzados de formación profesional en ingeniería.

Una dificultad marcada en la modelación se presenta por la gran cantidad de información matemática que se debe dominar para llegar a comprender conceptos tales como: la noción de función del tiempo, función de transferencia, la transformada de Laplace y su relación con las ecuaciones diferenciales. Es común que, en el tratamiento de estos temas, se aborden metodologías docentes a nivel de exposiciones a los estudiantes que hacen pensar que cada tema estudiado fuera independiente uno del otro. Por esto, la propuesta que se presenta, además de integrar estos temas, busca reafirmar la teoría mediante el análisis de situaciones problema en contextos específicos, de manera particular en el campo de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Las ecuaciones diferenciales son la base para muchas aplicaciones, ya que, si se pretende describir o predecir un determinado fenómeno o evento, será necesario utilizar modelos con ecuaciones que incluyen razones de cambio. La importancia de representar tales fenómenos (físicos o sociales) por medio de ecuaciones diferenciales radica en poder llegar a controlar el fenómeno y las variables que allí intervienen. La representación de los sistemas o fenómenos por medio de ecuaciones se denomina modelado de sistemas. En ocasiones resulta complicado manejar las partes del proceso que se llevan a cabo al modelar un sistema y solucionar las correspondientes ecuaciones. Por esta razón, se recurre a la resolución por medio de ayudas computacionales mediante sistemas interactivos que parten de un modelo matemático representado por un modelo simbólico el cual es estructurado a través de componentes elementales denominadas bloques operacionales. Esto es fundamental y de gran utilidad para la implementación del modelo en un diagrama de bloques que se constituyen en una representación ´de partes´, las cuales son más fáciles de analizar.

Sistemas interactivos en la mediación pedagógica

La teoría de la modificabilidad estructural cognitiva propuesta por Feuerstein plantea el desarrollo cognitivo en términos dinámicos, esto es, susceptible de ser modificado en tanto se trabaje sobre las funciones cognitivas necesarias para realizar procesos de aprendizaje adecuados. Con base en esta idea, y apoyados en los sistemas interactivos, se espera aumentar las capacidades de los estudiantes a través de la exposición directa a experiencias de aprendizaje mediado como uno de los principales mecanismos para aprender (Feuerstein, 1991). En este sentido, y para el caso del estudio de problemas de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden, los sistemas interactivos se configuran como una fuente apropiada de generación de ambientes de aprendizaje, ya que, además de cautivar el interés del estudiante, le permiten realizar pruebas de contraste y verificación de soluciones. De esta manera, una experiencia de aprendizaje fundamentada en la visualización, exploración y contraste de resultados, estimula el desarrollo de las operaciones mentales y acercan el estudiante al dominio de conceptos y procedimientos matemáticos (Molina, Ramírez & Madrigal, 2011).

Las estructuras didácticas que permiten desarrollar conceptos y desplegar relaciones científicas, se configuran en la actualidad como recursos didácticos de apoyo a una práctica docente que busca incentivar en el estudiante sus habilidades para inferir y deducir propiedades a partir de un modelo matemático. De esta manera, los sistemas interactivos de simulación disponibles, permiten apoyar modelos pedagógicos de intervención en los que se favorece prioritariamente el aprendizaje significativo a través del descubrimiento y la investigación.

Modelos dinámicos para inferir e intervenir

Los modelos en general se convierten en herramientas útiles para revisar o construir las teorías (Hartmann, 2005) o, como lo expresa Hacking, permiten crear, refinar y estabilizar fenómenos (Hacking, 1983). Por su parte, los modelos dinámicos computacionales como los que se logran diseñar con la herramienta Simulink de Matlab, se pueden catalogar como ´objetos de conocimiento´, que según Knuuttila, permiten a los estudiantes realizar inferencias y predecir resultados a partir de las posibles variaciones entre las variables (Knuuttila, 2005ª; 2005b). Los modelos se caracterizan por facilitar un mejor conocimiento de los objetos o fenómenos del mundo por lo que permiten también su intervención. Si el modelo es usado para experimentar y analizar variaciones, dicho modelo también interviene el problema que representa, de esta manera, se configura un modelo a fin de intervenirlo a la luz de su propia representación (Rivera, Galo & Alcón, 2010).

Para efectos del presente taller postulado para la XIV conferencia interamericana de educación matemática, lo que se busca es dar pautas para modelar situaciones problema e intervenirlas desde los conceptos matemáticos y cambios en los parámetros que permite la aplicación computacional. Para esto, se opera sobre la base de que el modelo no sólo interviene la teoría, sino que también permite intervenir otros factores inherentes al fenómeno representado como lo es la variación de sus condiciones iniciales. Los modelos como estructuras de representación, intervienen los procesos cognitivos de los estudiantes, dado que, el trabajo con estos modelos y sus simulaciones permiten mejorar las habilidades perceptivas del estudiante. El modelo, entonces, se constituye en un recurso de mediación entre el fenómeno o situación representada y el estudiante, o entre la teoría y el estudiante. Esto con dos propósitos posibles: primero, que el estudiante intervenga lo representado y, segundo que intervenga la teoría, esto es, que construya o elabore su propio conocimiento.

Para enfocar el presente trabajo de acuerdo a los planteamientos anteriores, los modelos que interesan en el contexto del taller, son aquellos que permiten inferir e intervenir sobre problemas de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Los problemas objeto de estudio, están relacionados con dinámicas de poblaciones, la ley de Hooke, mezclas, propagación de una enfermedad y la ley de Newton del enfriamiento o calentamiento entre otras. De esta manera, el propósito apunta a la configuración de sistemas interactivos a partir de sistemas dinámicos que surgen de un modelo simbólico-matemático que se lleva a un diagrama de bloques soportado en la herramienta Simulink de Matlab. Este diagrama de bloques se constituye como una representación gráfica del modelo matemático y un recurso interactivo de mediación pedagógica que favorece en el estudiante tanto la comprensión del problema como la apropiación de significados.

Modelos de sistemas dinámicos con Simulink

Algunos sistemas continuos se representan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, por tanto, en la labor de predecir el comportamiento de dichos sistemas ante variaciones de las entradas o condiciones iniciales, se deben resolver ecuaciones de distinta naturaleza. A excepción de los casos lineales y algunos no lineales triviales, las ecuaciones diferenciales ordinarias carecen de soluciones analíticas. Más aún, en los pocos casos en los que se puede encontrar una solución, el procedimiento puede ser tedioso y el resultado una expresión compleja y complicada de manipular. Este proceso corresponde a un proceso que podría llamarse ´de ejercitación´, por demás válido, pero no más importante como lo es el proceso de contraste y análisis de los resultados en la vía de comprobar las predicciones del modelo. Por estas razones, en general se recurre al uso de distintos algoritmos numéricos que permiten obtener una solución aproximada de la ecuación diferencial para distintos valores del tiempo. Estos algoritmos asociados con los métodos de integración de ecuaciones diferenciales, se suelen implementar a través de herramientas computacionales de software, algunas de propósito general como Matlab, Scilab, entre otros o bien para dominios específicos como el PSpice para simular circuitos como caso particular.

En relación al propósito de este trabajo práctico, se puede precisar que, más que implementar métodos de integración numérica, lo que se busca es explorar las características de la herramienta Simulink de Matlab y el entorno gráfico de simulación que provee para realizar pruebas de contraste de resultados en la solución de ecuaciones de primer orden que provienen de un modelo matemático que da solución a una situación problema planteada. Como ya se ha señalado, el Simulink como entorno gráfico, es una herramienta de análisis interactiva para modelar y simular sistemas dinámicos, con base en diagramas de bloques (Gil, 20103). Permite a los usuarios concentrarse en la estructura del problema, en lugar de tener que preocuparse acerca de un lenguaje de programación. Los parámetros de cada bloque de señal y sistema son configurados por el usuario de tal manera que la simulación se realiza sobre un tiempo determinado. Las fases para el modelado con Simulink incluyen la definición de un modelo y su representación matemática, el ajuste de las condiciones de ejecución de la simulación, la definición de los parámetros del sistema y la selección del método de integración apropiado.

Un sistema en Simulink, se representa como una interconexión de bloques elementales operacionales implementados como algoritmos integrados en un entorno gráfico-numérico. Cada bloque, que representa una operación matemática simple o compleja, posee unos parámetros internos ajustables, y unos campos específicos o variables de entrada y de salida, esto es, cada bloque lleva asociado un modelo matemático que representa su relación entrada/salida. La conexión de dos bloques operacionales, indicará simbólicamente que la variable de salida del primero ha de considerarse como variable de entrada del segundo y así sucesivamente. Los elementos básicos para el diseño de un proyecto son líneas y bloques, donde cada bloque aparece ubicado en una determinada librería, biblioteca o categoría. La ventana que aparece al arrancar Simulink permite establecer las categorías de bloques disponibles. Estas categorías están agrupados en: *Sources*, S*inks*, *Continuos*, *Math operations*, entre otros.

Para implementar un diagrama de bloques como un sistema interactivo, primero se parte de arrastrar los bloques a la página en blanco. Estos bloques se modifican dando doble clic sobre cada uno de ellos con lo que se pueden cambiar sus parámetros o valores luego de su interconexión. Lo segundo es cambiar los nombres a los bloques y asignar las variables o señales haciendo doble clic en el lugar en que se van a colocar. De igual forma se debe salvar el modelo especificándole un nombre. Por último se procede a simular el sistema, por lo que se hace necesario configurar el tiempo de simulación. Para ejecutar la simulación se escoge del menú la opción *simulation start.* Para visualizar la evolución de las variables, se utiliza el bloque *Scope* de la librería S*inks.* Este último bloque permite apreciar de forma gráfica la respuesta o salida del sistema. Una vez implementado el sistema, la versatilidad se convierte en un factor importante de contraste y verificación, toda vez que, es de gran utilidad didáctica disponer del modelo gráfico para realizar de manera rápida variaciones en las entradas y las condiciones o parámetros que intervienen en el modelo.

Implementación de un modelo sencillo

Considérese la siguiente situación problema: una barra de aluminio, se encuentra inicialmente a una temperatura de 80°C, después de 5 minutos la barra tiene una temperatura de 65°C. ¿Cuál será la temperatura de la barra después de 60 minutos, si se sabe que la temperatura ambiente es de 25°C.

La hipótesis para plantear el modelo se basa en que la temperatura T de un cuerpo cambia a una velocidad que es proporcional a la diferencia de las temperaturas del cuerpo con la temperatura ambiente T_m (Zill & Cullen, 2008). De esta manera, un objeto a diferente temperatura que la de su alrededor, termina alcanzando una temperatura igual.

Con esta información se plantea la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m) \quad (1)$$

O bien,

$$\frac{dT}{dt} = KT - KT_m \quad (2)$$

Al resolver la ecuación (2) se llega a la siguiente función de temperatura:

$$T(t) = Ce^{Kt} + T_m \quad (3)$$

Por las condiciones del problema se tiene que $T(0) = 80$ lo que implica que $C = 55$. De igual forma, $T(5) = 65$ implica que $K = -0.0629$. Para estas condiciones, la solución de la ecuación diferencial está dada por la expresión (4).

$$T(t) = 55e^{-0.0629\,t} + 25 \quad (4)$$

Al reemplazar $t = 60$ en la ecuación (4), se obtiene la solución al problema planteado, esto es, la temperatura después de 60 minutos corresponde a $T = 26.5$ °C

Para validar estos resultados y realizar actividades de contraste y verificación en el modelo tratado, se procede con su implementación a través de la herramienta Simulink. Al observar la ecuación diferencial (2) se aprecia que se requieren de los siguientes bloques operacionales:

- Un bloque *Integrator* para obtener T a partir de dT/dt.
- Dos bloques de coeficientes *(Gain).*
- Un bloque de constante (*Constant*) para almacenar el valor de K
- Un bloque sumador *(Sum)*
- Un bloque *Scope* para visualizar la relación de salida del modelo, esto es, la evolución de la temperatura T.

La figura 1, muestra la conexión apropiada de los bloques que configuran el modelo.

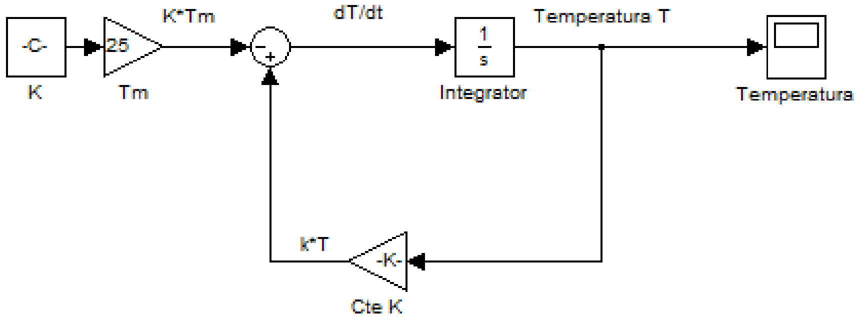

Figura 1. Conexión de bloques asociados a la ecuación (2)

El valor de *Stop Time* de *Configuration Parameters* debe ajustarse a 60 con el fin de establecer el tiempo requerido de la simulación. Finalmente en el menú *Simulación* se elige la opción *Start* para ejecutar la aplicación. Con esto, la figura (2) muestra la salida para T, luego de dar doble clic en el bloque *Scope*.

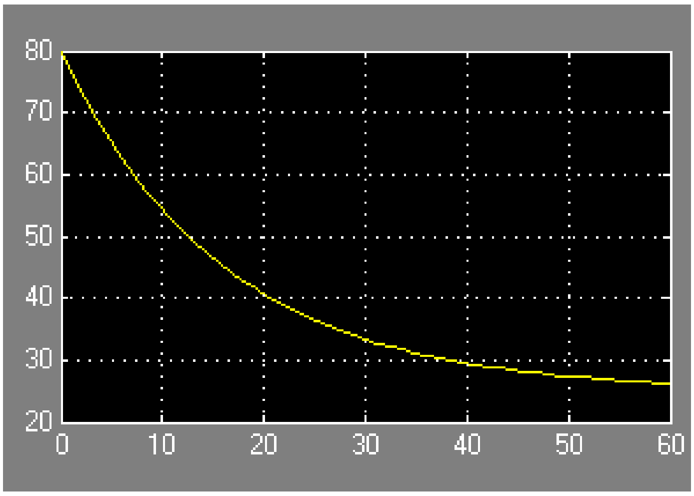

Figura 2. Evolución de la temperatura T.

Una vez implementada la aplicación, es posible realizar de manera sencilla cambios en los parámetros y condiciones iniciales preestablecidas. Con base en esta idea, se puede configurar una ruta de trabajo con estudiantes a manera de guion didáctico que, a través de preguntas e interrogantes puntuales, les permita realizar inferencias y planteamientos de nuevas situaciones. Esto con la intención de contrastar las hipótesis de base y con ello, la fundamentación teórica matemática del modelo.

De esta forma, y para el caso acá abordado, queda expuesto cómo los recursos informáticos interactivos hacen parte de la integración del uso de las tecnologías para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en tanto son susceptibles de convertirse en recursos para la mediación pedagógica. Finalmente se puede establecer que, con el uso de estas tecnologías digitales en el aula, se pretende mostrar una alternativa de trabajo teórico-práctico con los estudiantes que favorece el desarrollo de sus capacidades de resolución de problemas y con ello la fundamentación básica para explorar nuevas áreas de aplicación.

Referencias y bibliografía

Feuerstein, R., Klein, P., & Tannebaum, A. (1991). *Mediated Learning Experience (MLE): Theoretical Pschosocial and Learning implications*. England: Freund Publishing house Ltd.

Gil Rodriguez, M. (2003). *Introducción rápida a Matlab y Simulink para Ciencia e Ingeniería.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

Hacking, I. (1983). *Representing and intervening: introductory topics in the philosophy of natural science.* Cambridge: Cambridge University Press.

Hartmann, S. (2005). *Models as a tool for theory construction: some strategies of preliminary physics.* Recuperado de http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00002410/01/Models.pdf [Consultado el 26 de mayo de 2014].

Knuuttila, T. (2005a). *Models as epistemic artefacts: toward a non-representationalist account of scientific representation.* Recuperado de: http://ethesis.helsinki.fi/julkaisut/hum/filos/vk/knuuttila/modelsas.pdf [Consultado el 30 de abril de 2014].

Knuuttila, T., (2005b). Models, representation, and mediation. *Philosophy of Science*, 72, 1260-1271.

Molina García, J. C. (2009). Recursos didácticos con Matlab: Interfaz gráfica de usuario para caracterizar curvas en el espacio tridimensional. *Tecno Lógicas,* Edición Especial, 71-84.

Molina García, J. C., Ramírez Velasquez, I., & Madrigal Argaez, J. (2011). Mediadores para el Aprendizaje de las Ciencias Básicas a través de Interfaces Gráficas. *Entre Ciencia e Ingeniería, 8,* 148-160.

Rivera, J., Galo, J., & Alcón, J. (2010). *Modelos de intervención con Descartes*. En XIII congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Septiembre, Córdoba, España.

Zill, D. G., & Cullen, M. R.. (2008) *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* (3ªed, Vol. 1). Ecuaciones Diferenciales. México: McGraw Hill.