



## ***VilGebra* como recurso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal**

Máster Enrique **Vílchez** Quesada  
Escuela de Informática, Universidad Nacional  
Costa Rica  
[enrique.vilchez.quesada@una.ac.cr](mailto:enrique.vilchez.quesada@una.ac.cr)

### **Resumen**

En el contexto de la experimentación de aula, el autor del presente trabajo diseñó un paquete vinculado al conocido software comercial *Mathematica 9.0*, añadiendo a la aplicación ochenta y seis comandos para desarrollar distintos tipos de procedimientos en las áreas de contenido fundamentales de cualquier curso de álgebra lineal. El paquete denominado *VilGebra*, fue utilizado por una muestra de 40 estudiantes provenientes de la Universidad Nacional (UNA) y la Universidad de Costa Rica (UCR), dos importantes instituciones de educación superior en este país. Participaron también, 21 alumnos de un grupo control, con el objetivo de determinar las dificultades cognitivas más comunes en este campo de conocimiento. El estudio se enfocó en precisar el impacto que proporcionó a los grupos experimentales, el uso de la herramienta *VilGebra* para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. La investigación fue de naturaleza descriptiva, implementada durante el II semestre del año 2013.

*Palabras clave:* enseñanza, aprendizaje, álgebra, lineal, software.

### **Introducción**

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática asistida por computadora en el marco de acción de las instituciones de enseñanza superior, plantea retos metodológicos que implican una equilibrada dosis entre la mediación pedagógica tradicional y el uso de la tecnología.

Usar tecnología con fines educativos propone interrogantes esenciales ante la ruptura de un escenario que en muchas universidades ha favorecido más la transmisión del conocimiento. Parte de estas interrogantes, pretenden evidenciar cuáles son los mecanismos ideales que

garanticen un aprendizaje de calidad, complementando el uso de herramientas de software que proporcionen insumos de investigación en la resolución de problemas.

La presente investigación se circunscribe en un ámbito de aula tradicional que lucha por su hegemonía frente a las nuevas alternativas de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en carreras vinculadas con ingeniería. En este contexto, el uso del software comercial *Mathematica* ofreció las opciones de experimentación necesarias para analizar después de varios años de implementación, cuál debería ser el enfoque más adecuado de una estrategia de aprendizaje mediada por ordenador en esta área específica de conocimiento. Se utilizó una muestra proveniente de tres grupos de apoyo, dos de la Universidad Nacional de Costa Rica y uno de la Universidad de Costa Rica, respectivamente.

### **Fundamento teórico**

#### **Enseñanza y aprendizaje mediado**

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática se han caracterizado durante décadas en la educación superior, por centrar los procesos educativos en el docente, siendo este agente el principal mediador de los contenidos de clase. De acuerdo con Sánchez (2012): *“los estudiantes de matemática ven su aprendizaje como una tarea rutinaria y aburrida, de concepción árida donde pronto se pierde el verdadero interés de su estudio, donde los contenidos presentados por los docentes se realizan de forma rigurosa y no atractiva”* (p. 24).

Esto ha desembocado en una educación arcaica, fragmentada y diluida lejos de aproximarse a un *“aprendizaje estratégico”*. Según Córlica y Dinerstain (2009) éste se produce cuando: *“el estudiante intenta aprender de manera significativa e involucra un procesamiento del contenido de tipo informado, deliberado y autoregulado”* (p. 125).

Una autoregulación marcada por experiencias previas a través de engranajes de enseñanza que favorezcan aprendizajes más duraderos mediante la mediación pedagógica. La presente investigación supone el uso de la tecnología educativa como un medio potenciador de espacios de mediación que conduzcan a la comprensión conceptual y el desarrollo de competencias matemáticas asociadas con conocimientos específicos en el campo del álgebra lineal. A este respecto, Trejos (2012) afirma: *“para fortalecer la enseñanza de las matemáticas es necesario recurrir al uso de la tecnología, a través de la cual se ejerce la acción educativa y la conducción de nuestros estudiantes hacia experiencias reflexivas que respalden la construcción de su aprendizaje, de manera autónoma”* (p. 376).

Una experiencia reflexiva en áreas de conocimiento abstracto (como ocurre en álgebra lineal), solo puede ser efectiva al transformar dicha abstracción en objetos tangibles que el estudiante altere y manipule. La tecnología en este punto puede contribuir notablemente, tal y como lo señala Borbón (2003): *“la utilización de nuevas tecnologías en el salón de clases trae consigo una nueva gama de posibilidades para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (...) la principal razón es que estos instrumentos pueden mostrar, de forma dinámica, conceptos que son muy difíciles de enseñar de la forma tradicional”* (p. 1).

La mediación pedagógica intervenida con el uso de software es el punto de partida que ha impulsado el desarrollo del presente trabajo, creemos con ello, que el diseño pedagógico a través del uso transparente de la tecnología, puede favorecer la calidad de la enseñanza y el aprendizaje y desde luego, tener un impacto directo sobre el rendimiento académico mostrado por los alumnos en matemática.

## **Dificultades en la educación matemática asistida por computadora**

La educación matemática apoyada en el uso de computadoras es un área de investigación impulsada fuertemente desde finales del siglo XX. Su aparición en el currículum de las carreras universitarias e inclusive de la educación básica, cobra en la actualidad un papel fundamental dentro de los ejes disciplinares y modelos pedagógicos de las distintas instituciones de enseñanza superior en Costa Rica.

La razón de ello, obedece a su indudable influencia dentro de las economías, la sociedad en general y la cultura. En el plano educativo la huella tecnológica propaga sus fines hacia la construcción de un recurso humano capaz de enfrentar los desafíos de un medio metamórfico, complejo y multidisciplinario. A este respecto, Ruíz (2013) define con claridad el aporte de la innovación curricular asistida por computadora: *“la tecnología se visualiza como un instrumento que replantea el lugar y organización de contenidos curriculares, los métodos de manipulación de los objetos de aprendizaje y la construcción de aprendizajes con base en estrategias nuevas y de mayor impacto individual y colectivo”* (p. 38).

La incorporación de la tecnología educativa pese a sus claras ventajas dentro de un marco de acción pedagógica bien planificada, presenta diversas dificultades traslucidas en distintas dimensiones. Interrogantes tales como: ¿qué recursos tecnológicos son más adecuados?, ¿cuándo utilizarlos?, ¿cómo afectan a la evaluación?, ¿es preferible crear o empaquetar?, u otras, son cuestiones que inciden la práctica educativa en su fase más primordial: lo que el docente implementa de manera real dentro del salón de clase. La tarea no es sencilla, más aún en escenarios donde la formación profesional muestra debilidades en este tipo de competencias. De allí, el trasiego de muchas experiencias educativas donde prevalece un enfoque dogmático-magistral con recursos no tradicionales. Artigue (2011) relacionado con lo anterior, señala: *“convertir una tecnología en legítima y matemáticamente útil desde un punto de vista educativo, sea cual sea la tecnología en cuestión, supone, si excluimos el caso de las formaciones más profesionales, modos de integración que permiten un equilibrio satisfactorio entre el valor epistémico y el pragmático de las técnicas instrumentadas asociadas. Y esto, como también lo muestra la investigación, si se examinan sus resultados con esta perspectiva, necesita que las tareas propuestas en los planes de estudio, no sean simples adaptaciones de lo que se hace con lápiz y papel”* (p. 22).

Desenmascarar la ilusión de la innovación ante las sombras de una pedagogía que falsamente se declara imparcial en los sistemas educativos tradicionales y en la Universidad, demanda una ruptura epistemológica únicamente posible a través de la investigación educativa. Los estudios de caso, en este contexto, pueden arrojar resultados que brinden un panorama claro sobre las formas más adecuadas de incorporación de tecnologías de información y comunicación. El presente estudio en esta dirección, representa un esfuerzo de continuidad de otro denominado: *“Percepción estudiantil sobre una metodología asistida por computadora en las áreas cognitivas del álgebra lineal y la matemática discreta”* (Vílchez y González, 2013). Esta investigación permitió redefinir una estrategia de uso de software, particularmente del programa *Mathematica 9.0*, en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal para ingeniería.

Construir y reconstruir representa una constante en este ámbito, donde resulta indispensable tomar conciencia del impacto positivo de las tecnologías en la educación matemática, en la medida en que los alumnos se logren apropiar a través de ellas, de las formas de razonamiento y el quehacer matemático en la resolución de problemas (Santos, 2011).

### **El software comercial *Mathematica***

*Mathematica* es una aplicación comercial desarrollada por la compañía *Wolfram Research*. Esta empresa fue fundada por *Stephen Wolfram* creador del software, quien junto a su grupo de investigadores lograron revolucionar desde su primer lanzamiento en 1988, la computación técnica orientada a la investigación científica.

En palabras de *Wolfram*: “con sus dramáticos avances de 2007 y 2008, se encuentra actualmente al final de sus primeras dos décadas como el sistema definitorio del futuro de la computación” (2014). Es sin duda hoy en día, uno de los programas más importantes utilizados en 15 departamentos del gobierno de los Estados Unidos y 50 de las mejores universidades a nivel mundial.

En la presente investigación se utilizó como referencia experimental este software, pues tanto la Universidad Nacional de Costa Rica como la Universidad de Costa Rica, cuentan con una licencia institucional del programa. Esta licencia permite a cualquier estudiante o docente adjunto, tener la posibilidad de auto gestar la cantidad de seriales necesarios para el uso de la aplicación.

### Metodología

La investigación realizada con el presente trabajo fue de carácter descriptivo. Se recurrió a dos grupos experimentales: uno de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad Nacional de Costa Rica y el otro de las carreras Ingeniería Industrial e Ingeniería Mecánica en la Universidad de Costa Rica. Ambas instituciones de enseñanza superior constituyen universidades públicas con un alto renombre a nivel nacional e internacional. También, participó un grupo control (de la UNA) para determinar las dificultades cognitivas a percepción de esta población, que presenta un curso clásico de álgebra lineal para ingeniería.

### Antecedentes

Las estudiantes de los grupos experimentales utilizaron junto al autor de esta propuesta, el software *Mathematica* y particularmente un paquete denominado *VilGebra*, diseñado por el profesor de la materia.

*VilGebra* es el resultado de varios años de implementación de una metodología asistida por computadora en cursos de álgebra lineal para ingeniería. El paquete abarca 86 nuevos comandos de ciertas funciones que por defecto *Mathematica* no ejecuta. Los métodos aportan novedosas competencias en áreas de contenido tales como: matrices y determinantes, geometría vectorial, rectas y planos, espacios vectoriales, proyecciones ortogonales, transformaciones lineales, diagonalización de matrices y formas cuadráticas y, programación lineal.

En la experiencia docente del investigador, se planteó la necesidad de crear *VilGebra* como un recurso que facilitara el uso de *Mathematica* potenciando sus capacidades de cálculo simbólico en la resolución de problemas no triviales, sin demandar un conocimiento profundo del ambiente de programación que el software provee. Este enfoque fue objeto de una validación anterior y parte de sus resultados se comparten en el artículo: “Percepción estudiantil sobre una metodología asistida por computadora en las áreas cognitivas del álgebra lineal y la matemática discreta” (2013, Vílchez y González).

Durante el II semestre del año 2013 los grupos experimentales complementaron una metodología tradicional de curso con otra asistida por computadora, específicamente recurriendo al uso del paquete *VilGebra* como principal mediador en la resolución de problemas. La modificación de la evaluación de los cursos, se fundamentó en sustituir en cada prueba parcial

escrita, una pregunta a ser resuelta con apoyo de software en el laboratorio de informática. Al finalizar la experiencia se pasó un cuestionario a los 40 estudiantes participantes, con el principal objetivo de determinar el impacto motivacional y de aprendizaje de *VilGebra* y la metodología empleada.

Finalmente, se utilizó un grupo control con la intención de valorar las dificultades cognitivas propias de un curso de álgebra lineal concebidas por esta muestra. A continuación se comparten los resultados obtenidos.

### **Características de un curso de álgebra lineal para ingeniería**

Con la finalidad de rescatar la percepción de los estudiantes del grupo control en este tema, se utilizó una escala *likert* que contempló las siguientes valoraciones: (1) muy de acuerdo, (2) de acuerdo, (3) medianamente de acuerdo, (4) en desacuerdo, (5) muy en desacuerdo. Un 57.1% de los estudiantes fueron de género masculino y un 42.9% de género femenino, ante una muestra de 21 alumnos. De ellos, 6 en edades entre los 17 y 19 años, 13 entre los 20 y 23 años, 1 entre los 24 y 27 años y 1 mayor a 27 años. Además, 6 llevaban el curso por primera vez y 15 de dos a tres veces. La tabla 1 reúne los porcentajes de respuesta.

Tabla 1

*Singularidades de un curso de álgebra lineal grupo control*

	<b>1. Muy de acuerdo</b>	<b>2. De acuerdo</b>	<b>3. Medianamente de acuerdo</b>	<b>4. En desacuerdo</b>	<b>5. Muy en desacuerdo</b>
Lo considero un curso difícil.	33.3%	38.1%	23.8%	4.8%	0%
El curso es interesante.	23.8%	28.6%	28.6%	14.3%	4.8%
El abordaje práctico es de naturaleza teórica.	14.3%	4.8%	52.4%	23.8%	4.8%
Es un curso importante dentro de mi formación profesional.	19%	28.6%	19%	19%	14.3%
Mis bases previas en matemáticas son las adecuadas.	4.8%	33.3%	28.6%	23.8%	9.5%
Los contenidos son abstractos.	47.6%	23.8%	23.8%	4.8%	0%
El abordaje práctico es de naturaleza de cálculo.	4.8%	23.8%	47.6%	9.5%	14.3%

En resumen, se logra interpretar las siguientes características de un curso de álgebra lineal para ingeniería:

- Es un área de difícil comprensión.
- Pese a ello, resulta ser interesante en la mayoría del estudiantado.
- Es de naturaleza teórica y abstracta y presenta diferencias con relación a un curso de cálculo.
- La materia es importante en el desarrollo de la carrera, aunque existe un 33.3% que opina lo contrario.

- También, un 33.3% no se considera capaz de llevar el curso con sus bases matemáticas previas.

A los grupos experimentales se les realizó las mismas preguntas. La muestra estuvo conformada por 40 alumnos, 67.5% hombres y 32.5% mujeres. De ellos, 16 entre los 17 y 19 años de edad, 17 entre los 20 y 23 años, 6 entre los 24 y 27 años y 1 con más de 27 años. Además, 15 llevaban el curso por primera vez y 25 entre dos y tres veces. La tabla 2 muestra la tendencia de los resultados.

Tabla 2

*Singularidades de un curso de álgebra lineal grupos experimentales*

	<b>1. Muy de acuerdo</b>	<b>2. De acuerdo</b>	<b>3. Medianamente de acuerdo</b>	<b>4. En desacuerdo</b>	<b>5. Muy en desacuerdo</b>
Lo considero un curso difícil.	20%	57.5%	20%	2.5%	0%
El curso es interesante.	17.5%	42.5%	27.5%	5%	7.5%
El abordaje práctico es de naturaleza teórica.	17.5%	37.5%	40%	0%	5%
Es un curso importante dentro de mi formación profesional.	15%	20%	45%	10%	10%
Mis bases previas en matemáticas son las adecuadas.	10%	22.5%	55.5%	12.5%	0%
Los contenidos son abstractos.	22.5%	50%	27.5%	0%	0%
El abordaje práctico es de naturaleza de cálculo.	12.5%	32.5%	45%	7.5%	2.5%

Se observan pocas diferencias significativas en comparación con el grupo control. Pese a ello, en general hay un leve aumento en los porcentajes que conciben álgebra lineal como un curso interesante, menos difícil, teórico/abstracto e importante en la formación profesional. Un aspecto que pudo haber influido en estos leves cambios de percepción fue el uso del software *Mathematica* y el paquete *VilGebra*. También, hay un aumento relativo a considerar álgebra lineal similar a un curso de cálculo, a diferencia del grupo control. En este sentido, *VilGebra* tuvo un impacto en la percepción estudiantil al proveer herramientas de cálculo directo para la resolución de problemas, lo cual a juicio del autor de esta propuesta, es un aspecto muy positivo de la metodología empleada, al estar dirigido el curso a estudiantes de ingeniería.

### **Paquete *VilGebra* como recurso para la enseñanza y el aprendizaje**

Los grupos experimentales completaron un cuestionario con preguntas en una escala *likert* con la finalidad de determinar el impacto de uso del paquete *VilGebra* en términos de aprendizaje. Se aplicó una prueba de fiabilidad al cuestionario arrojando un coeficiente *Alfa de Cronbach* igual a 0.846, un valor bastante aceptable de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2006), quienes sugieren un estándar mínimo de 0.75. La tabla 3 muestra un resumen de las tendencias de respuesta.

Tabla 3

## Puntos fuertes y débiles del paquete VilGebra

	<b>1. Muy de acuerdo</b>	<b>2. De acuerdo</b>	<b>3. Medianamente de acuerdo</b>	<b>4. En desacuerdo</b>	<b>5. Muy en desacuerdo</b>
VilGebra es útil para el curso.	67.5%	30%	0%	0%	2.5%
VilGebra facilita la visualización de conceptos.	65%	27.5%	5%	2.5%	0%
VilGebra permite resolver problemas.	72.5%	25%	0%	0%	2.5%
El uso de VilGebra y software facilita el aprendizaje.	55%	32.5%	10%	2.5%	0%
Es la primera vez que llevo un curso asistido por computadora.	72.5%	5%	2.5%	7.5%	12.5%
El uso de VilGebra y de software considero que mejora la enseñanza.	47.5%	37.5%	12.5%	2.5%	0%
VilGebra permite analizar problemas.	45%	50%	2.5%	2.5%	0%
El curso asistido por computadora llenó mis expectativas.	45%	37.5%	12.5%	2.5%	2.5%
VilGebra es una herramienta adecuada para el curso.	67.5%	27.5%	2.5%	0%	2.5%
Le agrada el uso software para el curso de álgebra lineal.	70%	22.5%	5%	0%	2.5%
Preferiría una metodología tradicional en este curso.	0%	2.5%	7.5%	40%	50%

De la tabla se concluye:

- Hay una percepción en un 97.5% respecto a la utilidad de VilGebra para impartir un curso de álgebra lineal asistido por computadora.
- Un 92.5% de la muestra percibe en VilGebra capacidades en la visualización de conceptos.
- Existe una fuerte tendencia de un 97.5% a considerar a VilGebra una buena herramienta para resolver problemas.
- 87.5% del alumnado opina una mejoría en el aprendizaje y un 85% en la enseñanza.
- Un 95% de la muestra está a favor de utilizar VilGebra para analizar problemas y lo considera adecuado para el curso.

- A 92.5% del estudiantado le agradó el uso de software y el paquete *VilGebra* para desarrollar contenidos de álgebra lineal, esto pese a existir un 77.5% de alumnos neófitos en el empleo de una metodología basada en el uso de un computador.
- La metodología resulta ser exitosa al tener un 82% de alumnos satisfechos con la experiencia implementada. De ellos, además un 90% percibe más adecuada dicha estrategia, en comparación con las lecciones magistrales tradicionales.

Por lo anterior en este estudio de caso, *VilGebra* resulta ser una herramienta muy propicia para abordar un curso de álgebra lineal en el campo de la ingeniería.

El cuestionario incluyó también, dos preguntas abiertas. Ante la interrogante: ¿Señale las fortalezas o debilidades que considere pertinentes en el paquete *VilGebra*? ¿Por qué?, se destacan las siguientes categorías:

- Es muy completo en cuanto a su contenido.
- Permite realizar visualización gráfica de conceptos y propiedades abstractas.
- Ayuda a resolver problemas de manera rápida y efectiva.
- Contribuye con el aprendizaje de definiciones y teoremas.
- Facilita el uso del software *Mathematica*.
- Es un plus dentro de la formación profesional recibida en la universidad, al constituirse *Mathematica* en un software enfocado en la investigación.
- *VilGebra* es de fácil uso y minimiza el trabajo y los cálculos tediosos que distraen la atención sobre el foco de un problema.
- Permite revisar ejercicios sin necesidad de la presencia del docente.

También, ante la pregunta: ¿Señale fortalezas o debilidades de la metodología asistida por computadora empleada en el curso? ¿Por qué?, arrojó los resultados:

- Se mejora el rendimiento académico.
- Mejora la enseñanza y el aprendizaje.
- Permite interiorizar más la materia vista en clase.
- Permite realizar experimentación en la resolución de un problema.
- Si se abusa de la metodología puede ser perjudicial pues se debe también aprender a resolver a mano los procedimientos.
- Puede implicar el uso de tiempo valioso en aspectos no directamente vinculados al curso.

### Conclusiones

*VilGebra* en este estudio resultó muy exitoso con relación a las expectativas iniciales de su autor, entre sus fortalezas se destacan:

- Es robusto en cuanto a contenido.
- Es eficiente y fácil de emplear.



- Demuestra una mejoría en el aprendizaje al facilitar herramientas para el análisis y resolución de problemas, inclusive sin la presencia del profesor de aula.
- Demuestra una mejoría en la enseñanza al suministrar comandos de graficación de conceptos y propiedades abstractas.
- Facilita estrategias de exploración en la búsqueda de soluciones a un problema.
- Mejora el rendimiento académico, dado que las estadísticas de aprobación han ido incrementando desde el año 2011 hasta su último registro en el II semestre del año 2013.

Es fundamental enfatizar en esta experiencia, cómo ha resultado más adecuado para su autor, emplear una metodología asistida por computadora que minimice el riesgo de la dispersión, sea sintáctica en cuanto al uso de *Mathematica*, o procedimental, en la solución de ejemplos que implican cálculos muchas veces inclusive, imposibles de realizar sin el apoyo de software. Bajo esta perspectiva, *VilGebra* proporciona los recursos necesarios con la intención de madurar una estrategia de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal para ingeniería, en diferentes contextos educativos.

### Bibliografía y Referencias

- Arce, C, Castillo, W., & González, J. (2004). *Álgebra lineal*. San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica.
- Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 6, 14-33.
- Borbón, A. (2003). Algunos usos de las calculadoras y la computadora para introducir el concepto de derivada. *Revista Matemática, Educación e Internet*, 4, 1-10.
- Córica, J., & Dinerstain, P. (2009). Diseño curricular y nuevas generaciones, incorporando a la generación .net. Argentina: Editorial Virtual Argentina.
- Kolman, B. (1997). *Álgebra lineal con aplicaciones y Matlab*. México: Editorial Pearson.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill Interamericana.
- Ruíz, A. (2013). Reforma de la educación matemática en Costa Rica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 8, 1-115.
- Sánchez, A. (2012). Incorporación de las TIC en el aprendizaje de la matemática en el sector universitario. *Revista de Educación Matemática (REM)*, 27, 23-38.
- Santos, M. (2011). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 6, 35-54.
- Shiskowski, K., & Frinkle, K. (2011). Principles of Linear Algebra with *Mathematica*. USA: Wiley.
- Trejos, L. (2012). El uso del lenguaje en la construcción del número natural: una situación didáctica de juego con calculadora. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25, 376-383.
- Vílchez, E. (2012). *Álgebra lineal apoyada con Mathematica*. Costa Rica: Editorial Tecnológica.
- Vílchez, E., & González, E. (2013). Percepción estudiantil sobre una metodología asistida por computadora en las áreas cognitivas del álgebra lineal y la matemática discreta. *Revista Matemática, Educación e Internet*, 14, 1-16.
- Wolfram Research (2014). Historia y orígenes. <http://www.wolfram.com/company/mathematica-history.es.html>. Consultado 20/01/2014.