



Representaciones Semióticas de Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2×2 con Excel

Elvira **Borjón** Robles

Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México

borjonrojo@hotmail.com

Mónica del Rocío **Torres** Ibarra

Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México

mtorres@matematicas.reduaz.mx

Leticia **Sosa** Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México

lsosa@matematicas.reduaz.mx

Resumen

El presente trabajo evidencia el proceso de aprendizaje de alumnos de bachillerato respecto a la solución de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 a través de la puesta en escena de dos instrumentos diseñados en dos diferentes escenarios: Con lápiz y papel (I1) y con uso de la tecnología Excel (I2), con la finalidad de apoyar el tránsito entre representaciones semióticas, teniendo en cuenta la afirmación de Duval (1998) de que “se ha adquirido un concepto determinado, cuando se es capaz transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo”.

Palabras clave: tecnología, representaciones semióticas, sistemas de ecuaciones lineales.

Introducción

La motivación de este trabajo surge de los errores comunes que cometen los alumnos que acaban de egresar del bachillerato (17 a 18 años) y que ingresan a cursar una licenciatura en matemáticas, respecto al tema de sistemas de ecuaciones lineales. Además de un estudio que realizó Martínez (2013) a un profesor del nivel bachillerato.

El objetivo es que mediante la utilización de la tecnología (diseño en Excel) los alumnos transiten de la representación entre diferentes representaciones de la solución de ecuaciones lineales (de verbal a la analítica, de analítica a geométrica y de geométrica a aritmética), para posteriormente regresar la solución del problema en su contexto.

Como menciona Segura (2004) los errores comunes que presentan los alumnos al resolver sistemas de ecuaciones de 2x2 son:

El manejo de las operaciones aritméticas elementales

Resuelven un sistema de ecuaciones lineales y no verifican la solución

No realizan de forma correcta el paso del registro verbal al algebraico

Generalmente para que los alumnos lleguen a una representación gráfica pasan primero por la representación tabular, generando una serie de parejas ordenadas que posteriormente les sirven de base para trazar la gráfica. En este sentido la bondad del diseño implementado es que genera gráficas a partir de las ecuaciones planteadas sin la necesidad de pasar por el registro tabular, desvinculando con ello las representaciones que se fomentan tradicionalmente y propiciando la visualización matemática de la solución del sistema en cuestión, o por lo menos una aproximación de dicha solución.

Marco de referencia

El referente teórico que da soporte a este trabajo es el denominado Teoría de representaciones semióticas, compartiendo la idea Duval (1999) de que comprender los conceptos en el área de las matemáticas no es una tarea fácil, pues no son objetos tangibles, es decir, en general comprendemos un objeto hasta que lo vemos representado; esta teoría se basa en la idea de que para apropiarse de un objeto se requiere algo más que nombrarlo, es necesario exteriorizarlo y desligarlo de su representación.

Cuando trabajamos con sistemas de ecuaciones lineales, generalmente se trabaja en un contexto algebraico, donde se presenta el sistema y se pide su solución por diferentes métodos, en éste trabajo se pretende realizar una transición “natural” entre los registros de representación, para permitir al alumno identificar las soluciones del sistema de ecuaciones lineales en diferentes contextos, tomando como herramienta mediadora a la tecnología.

El mismo Duval (1999) define las representaciones como “una forma de exteriorizar las representaciones mentales por medio de producciones constituidas por el empleo de signos. Las producciones se pueden representar de forma verbal, numérica, algebraica y gráfica, que pueden incluir diferentes formas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc.”. En este sentido la tecnología es un fuerte aliado, pues permite un tránsito natural entre las representaciones sin la necesidad de realizar todos los procesos de conversión necesarios para llegar a ellos.

Los resultados mostrados en el trabajo concuerdan con la idea de Duval (1998), de que “se ha adquirido un concepto determinado, cuando se es capaz transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo”, es decir, manipular e identificar la solución de un sistema de ecuaciones lineales en cualquier contexto.

Del mismo modo, Duval (2006) menciona que: “Los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos

cognitivos que involucran”, por tal motivo, para introducir un objeto matemático en el salón de clases se requiere necesariamente usar sus representaciones, transformaciones y conversiones.

Metodología

El tema de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 se aborda tradicionalmente a partir del segundo año de secundaria de acuerdo a los planes y programas de estudio SEP (2011), como una manera de iniciar con el aprendizaje del álgebra, se continúa con él en el primer semestre de nivel bachillerato, puntualizando más los métodos de solución.

Éste trabajo se desarrolla en un esquema experimental diseñando dos instrumentos de manera paralela: En el primero (I1) se trabajó con lápiz y papel y en el segundo (I2) a través de una hoja de cálculo interactiva en Microsoft Excel.

Ambos instrumentos fueron aplicados a un grupo de 18 alumnos del primer semestre de la licenciatura en matemáticas, de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México; cada uno de ellos contaba con una computadora personal para ejecutar el I2. Cabe mencionar que los alumnos actualmente trabajan por competencias la matemática preuniversitaria con la finalidad de solventar dificultades que se han detectado con anterioridad.

Instrumentos

Se diseñaron un par de instrumentos (I1 e I2), con problemas que fueron extraídos de Barnett, Ziegler, y Byleen (2000) y de Bello (1997), estructurados de la siguiente manera:

I1. Conformado por un problema tipo examen en el que se reflejan los aprendizajes adquiridos por los alumnos. Se parte de un problema en su representación verbal en el contexto de la agronomía, para que a partir de éste se obtenga: la representación analítica, la solución del sistema de ecuaciones lineales de 2x2 inmerso en el mismo y la devolución de la solución en el contexto del problema. En éste instrumento se fomenta el tránsito entre las representaciones verbal – analítica – verbal.

I2. Es un instrumento interactivo diseñado en una hoja de cálculo en Excel que permite a los alumnos completar campos estratégicos de una representación y visualizar el comportamiento de los mismos en un contexto de un problema de sistemas de ecuaciones lineales. La reflexión de sus respuestas es necesaria para cuidar la lógica del problema.

Así mismo, el I2 está estructurado por cuatro problemas de la siguiente manera: En los dos primeros se trabaja el tránsito entre las representaciones verbal - analítico – gráfico – aritmético, mientras que los dos últimos problemas se apegan al proceso de solución de un sistema por el método de sumas y restas, transitando entre la representación verbal, aritmética y gráfica. En todos los problemas se incluyen campos prediseñados que permiten al alumno verificar su proceso de solución y realizar una devolución del problema.

Resultados

La experimentación se realizó el día 20 de junio del 2014 en un aula de cómputo de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAZ, con un grupo de 18 alumnos próximos a ingresar al primer semestre de la licenciatura en Matemáticas, quienes trabajaron con los dos instrumentos. La imagen 1 muestra la forma de trabajo.



Imagen 1. Forma de trabajo en el aula.

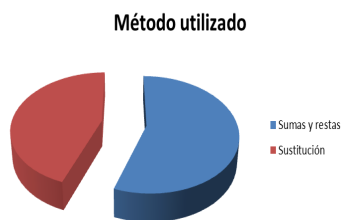
Los alumnos respondieron el I1 por diferentes métodos, la imagen 2 ilustra el tipo de respuestas obtenidas, donde se rescata que contrario a lo que opina Segura (2004) los alumnos en su mayoría fueron capaces de transitar entre la representación verbal y la analítica

Un agricultor puede usar 2 tipos de fertilizante en un plantío de naranjas, la marca A y la marca B. Cada saco de la marca A contiene 8 libras de nitrógeno y 4 de ácido fosfórico. Cada saco de la marca B contiene 7 libras de nitrógeno y 7 de ácido fosfórico. Las pruebas indican que el naranjo necesita 720 libras de nitrógeno y 500 de ácido fosfórico. ¿Cuántos sacos de cada marca tiene que usar para obtener las cantidades necesarias de nitrógeno y de ácido fosfórico?

<p>A</p> <p>1 saco 8 libras Nitrógeno 4 ácido fosfórico</p>	<p>B</p> <p>1 saco 7 libras Nitrógeno 7 ácido fosfórico</p>	<p>Total</p> <p>720 libras de Nitrógeno 500 de ácido fosfórico</p> <p>$720 = 8x + 7y$ ①</p> <p>$500 = 4x + 7y$ ②</p>	<p>Despejamos x de ②</p> <p>$4x + 7y = 500$</p> <p>$4x = 500 - 7y$</p> <p>$x = \frac{500 - 7y}{4}$</p>	<p>∴ Necesitamos</p> <p>55 sacos de la marca A y 40 sacos de la marca B.</p>
----------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------

Imagen2. Respuesta de alumnos a I1.

Los resultados globales de I1 muestran que los alumnos utilizaron sólo dos métodos de solución conocidos por ellos, el de sumas y restas y el de sustitución, predominando una mayoría al método de sumas y restas, como se muestra en la gráfica 1.



Gráfica 1. Métodos de solución utilizados en el I1

Por otro lado, la mayor parte de los alumnos resuelven el problema en su representación analítica pero no logran regresar a la representación verbal, es decir, la mayoría no fueron capaces de dar la solución en el contexto del problema, tal como se muestra en la gráfica 2.



Gráfica 2. Formas de solución implementadas.

Por otra parte, respecto a la utilización de I2, el software inicia con el manejo del método gráfico para la solución de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, y presenta al alumno un problema verbal véase figura 3, con el cual deberá rellenar celdas estratégicas coloreadas en amarillo, que lo llevarán a la siguiente representación. En él encontramos que es fácil que los alumnos intercambien las incógnitas del problema, lo que se refleja de manera inmediata en la representación geométrica, y ocasionando soluciones invertidas. Por ejemplo, para el problema 1, las soluciones obtenidas fueron (4,6) y (6,4), lo que no altera la solución del problema, como se verá posteriormente.

Problema 1.
 En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas son 10, si se cuentan las patas son 28. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Identifica las incógnitas.

Qué estamos buscando:	Incógnita
CONEJOS	X
GALLINAS	Y

Figura 3. Representación verbal del problema e identificación de variables.

Una vez identificadas las variables, debe transitar a una representación analítica del problema, como se muestra en la figura 4, identificando con ello los coeficientes planteados.

2. Con los datos del problema y las incógnitas que identificaste, completa el siguiente par de ecuaciones de la forma $ax+by=c$:

Ecuación 1	1	X	+	1	Y	=	10
Ecuación 2	1	X	+	4	Y	=	28

3. De acuerdo a las ecuaciones planteadas, los coeficientes de cada ecuación son:

Ecuación 1:	Ecuación 2:
a= 1	a= 1
b= 1	b= 4
c= 10	c= 28

Figura 4. Representación analítica e identificación de coeficientes.

Con los valores propuestos, el software presenta automáticamente la representación gráfica de las rectas del sistemas de ecuaciones, permitiendo que el alumno visualice el cruce o no de las gráficas, como se muestra en la figura 5, posteriormente se plantean preguntas que permiten al alumno verificar la solución que él visualizó.

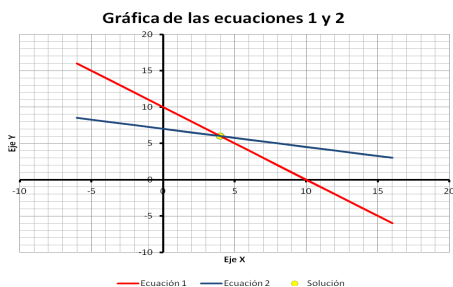


Figura 5. Representación geométrica del problema.

Finalmente, se transita de la representación geométrica a la solución del problema en su contexto, como se ilustra en la figura 6.

A continuación podemos observar una gráfica usando los datos que encontraste.

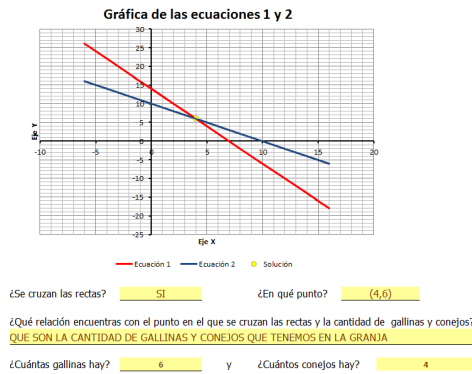


Figura 6. Tránsito de la representación geométrica a la representación verbal.

Por otra parte, con la finalidad de que los alumnos comprueben que la solución obtenida es verdadera, se agrega un apartado para cada problema en el que tecleando los valores obtenidos, el software automáticamente los sustituye en las ecuaciones originales y evidencia que el resultado satisface las igualdades, como se muestra en la figura 7.

5. Completa los datos faltantes para hacer la comprobación.

Ecuación 1 $1X+1Y=10$
 $1(\text{ })+1(\text{ })=1(6)+1(4)=6+4=10$

¿Se satisface la ecuación 1? si

Ecuación 2 $2X+4Y=28$
 $2(\text{ })+4(\text{ })=2(6)+4(4)=12+16=28$

¿Se satisface la ecuación 2? si

Entonces ¿cuál es el punto solución del sistema de ecuaciones?

¿Cuál es la solución del sistema?

¿Es la misma que encontraste anteriormente? si

¿A qué se debe esto?

Figura 7. Comprobación de la solución obtenida.

Con las respuestas a las preguntas planteadas y la comprobación automática de la solución, ellos deben formular una definición de solución de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2, en esta parte encontramos expresiones como la que se ilustran en la figura 8, donde se detecta que la mayoría de los alumnos no reflejan un concepto claro de la definición, ya que sólo 4 de 18 fueron capaces de estructurarla.

EL X Y EL Y QUE CUMPLAN LA IGUALDAD EN AMBAS ECUACIONES
 encontrar dos variables diferentes q satisfagan 2 ecuaciones a la ves
 PUES ES ENCONTRAR LOS VALORES DE X,Y QUE SATISFAGAN LA ECUACION O EL PROBLEMA PLANTEADO

Figura 8. Definiciones de los alumnos respecto al concepto de solución de un sistema de ecuaciones.

Llama la atención que sólo un alumno estructuró su definición en términos de la representación geométrica, como se muestra en la figura 9.

la solución es la intersección de las dos ecuaciones lineales interpretadas por una recta

Figura 9. Definición en el contexto geométrico.

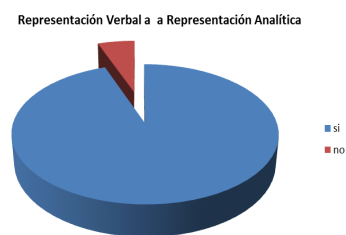
Los problemas presentados en I2, se trabajan mediante los métodos de solución gráfico y

de sumas y restas, permitiendo que los alumnos modifiquen sólo los campos requeridos para el tránsito de una representación a otra.

Por otra parte, los resultados obtenidos reflejan que el I2 tuvo una gran aceptación por parte de los alumnos, ya que el propio instrumento realiza las operaciones necesarias y las gráficas correspondientes, es decir, guía al alumno en el tránsito entre representaciones y permite que visualicen y reflexionen sus respuestas.

Conclusiones

Las conclusiones se presentan en base al tránsito entre representaciones para el instrumento I1 observamos que la mayoría de los alumnos fueron capaces de transitar entre la representación verbal y la representación analítica, véase gráfica 3.



Gráfica 3. Tránsito de la representación verbal a la analítica

Por otra parte, acorde con el objetivo planteado, el uso de la tecnología utilizada en I2, permitió que los alumnos lograran transitar entre diferentes representaciones del concepto de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, como lo muestran las figuras 3, 4, 5, y 6, una vez que completan los campos marcados con fondo amarillo, lo que acorde con la teoría de representaciones semióticas nos permite concluir que se ha apropiado del concepto.

Por otra parte, cuando se les indagó acerca de si “¿Representa para ti alguna ventaja usar la tecnología?”, en su mayoría los alumnos argumentaron que es ventajosa, ya que solamente sustituían valores en las expresiones dadas y automáticamente la computadora les arrojaba resultados y gráficas, reduciendo notablemente el tiempo que invierten en resolver un problema. Solamente uno de los alumnos tomó la posición del programador, afirmando que “para usarla es más fácil, pero para crear aplicaciones del este tipo es más difícil y en el caso de un sistema pequeño es más fácil resolverlo que programar la solución en una hoja de cálculo”.

Referencias y bibliografía

- Barnet, R. A., Ziegler, M. R., & Byleen, K. E. (2000). *Álgebra* (6ª ed., Traducción de Ing. Javier de León Cárdenas). McGraw Hill. Escuela de Ingeniería Universidad de la Salle.
- Bello, I. (1997). *Elementary Algebra*. Tampa Florida: Brooks/Cole Pub Co.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). (págs. 165-178). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano* (Traducido por Myriam Vega Restrepo). Santiago de Cali Colombia: Artes Graficas Univalle.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar de registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143-168.

Martínez, C. (2013). *Conocimiento del Contenido y estudiantes que evidencia un profesor de bachillerato al impartir el tema de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, un estudio de caso* (Tesis de Licenciatura UAZ no publicada).

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: Una Secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, 7(1), 49-78

Secretaría de Educación Pública (2011). *Plan de Estudios de Educación Básica*. México.