Componentes del conocimiento matemático necesario para enseñar[1]

Nancy Lacourly
Centro de Investigación Avanzada en Educación y Centro de Modelamiento Matemático
Chile
nlacourl@dim.uchile.cl
Leonor Varas
Centro de Investigación Avanzada en Educación y Centro de Modelamiento Matemático
Chile
mlvaras@dim.uchile.cl

Resumen

Diversos autores han descrito un conocimiento matemático específico de la tarea de enseñar y han probado en grandes muestras, que los alumnos de profesores que lo poseen en mayor grado obtienen mayores ganancias de aprendizaje, evaluadas al cabo de uno o dos años. En Chile, como parte de un programa que busca mejorar la preparación de los profesores, se están introduciendo evaluaciones masivas de los conocimientos de los profesores. En este contexto interesa precisar componentes relevantes de este valioso conocimiento y la posibilidad de medirlas confiablemente. Se presenta aquí un estudio desarrollado con ese objetivo, respecto de una componente descrita teóricamente por otros autores, que no había podido ser evaluada confiablemente. La metodología utilizada permite optimizar el uso de la información recogida en testeos de ítems y pruebas aplicadas a profesores, difíciles de realizar en un ambiente saturado de evaluaciones.

Palabras clave: conocimiento del profesor, conocimiento matemático para enseñar, conocimiento pedagógico del contenido.

Antecedentes y planteamiento del problema

Desde que en 1985 L. Shulman definiera el concepto de *conocimiento pedagógico de la disciplina* (CPD), diversos autores han contribuido a precisar su contenido específico en el campo de la matemática (Ma 1999; Krauss 2007, 2008[a], 2008b; Ball 1990, 2000, 2002, 2005, 2008; 2004[a], 2004b, 2005). Dentro de estos trabajos destacan los aportes referidos al desarrollo de instrumentos para su medición confiable y su incidencia en los logros de aprendizaje de los

[1] Parcialmente financiado por proyecto Fondecyt 1090292 y por proyecto CIAE 03-2008.

alumnos (Baumert 2010, Krauss 2007, 2008[a], 2008b; Hill 2004[a], 2004b, 2005; Varas 2008, 2009).

La importancia que tiene el conocimiento que los futuros profesores adquieren en su formación inicial para su posterior desempeño parece evidente. Un profesor no puede enseñar lo que no sabe. Sin embargo no es evidente cuales son los conocimientos que impactan en la mayor capacidad de un profesor para lograr que sus alumnos aprendan, ni cómo evaluar el dominio del profesor de esos conocimientos, ni cómo lograr ese dominio deseado durante la formación inicial. Existe abundante bibliografía respecto de este tema y crece el acuerdo respecto de la especificidad del conocimiento disciplinar que se pone en juego en la tarea de enseñar, así como de que enseñar la matemática elemental es una tarea matemática demandante.

El importante informe Foundation for Success (reporte final del National Mathematics Advisory Panel, USA, 2008) establece la importancia del conocimiento matemático de los profesores como un factor en los logros de aprendizaje de sus alumnos y recomienda que los profesores conozcan en detalle la matemática que deben enseñar y sus conexiones con niveles superiores e inferiores del currículo. Sin embargo critica la falta de evidencia científica que vincule directamente la presencia de ciertos conocimientos matemáticos comunes y específicos de la tarea de enseñar con los logros de aprendizaje de los alumnos de aquellos profesores que lo posean en mayor grado, pues la mayoría de las investigaciones miden otras variables (número de cursos, grados académicos, calificaciones en otros exámenes) o son cualitativos: "Finalmente, con la excepción de un estudio que midió directamente el conocimiento matemático utilizado al enseñar, ningún estudio identificado por el Panel probó la dinámica que examinaría cómo el conocimiento matemático de profesores de escuela elemental y media afecta la calidad de la instrucción, las oportunidades de los alumnos de aprender y la ganancia de aprendizaje a lo largo del tiempo." (p. 37)

El único estudio al que se refiere el Panel es el trabajo de Hill, Rowan, Ball (2005) donde se describen los hallazgos del proyecto Learning Mathematics for Teaching (LMT), en donde se establecieron pruebas para medir el conocimiento matemático para enseñar de 334 profesores de 1er grado y 365 profesores de 3er grado con 1190 y 1773 alumnos, respectivamente por 2 años con 2 evaluaciones por año de ganancia de aprendizajes de ambas cohortes (prueba Terra Nova).

Con posterioridad al informe del Panel se publicó el trabajo de Baumert y otros (2010) acerca de los resultados del proyecto COACTIV en Alemania que evaluó la ganancia de aprendizaje 4.353 Students a lo largo de un año (final de 9° a final de 10°) medidos con 2 pruebas PISA, y tres tipos de conocimientos de sus 181 profesores en 194 cursos: conocimiento matemático común, conocimiento pedagógico del contenido matemático y conocimiento pedagógico general.

Ambos trabajos muestran que el mayor impacto sobre los logros de aprendizaje de los estudiantes corresponde a un tipo de conocimiento matemático específico de la tarea de enseñar que posean sus profesores. Esta distinción entre un conocimiento disciplinar propio o exclusivo de los profesores, que comenzó con un célebre discurso inaugural de Lee Shulman en la presidencia de la Asociación Americana de Investigación en Educación en 1985, recibió una contribución notable con el trabajo de Liping Ma (1999) que caracterizó lo que llamó "comprensión profunda de la matemática elemental".

El equipo de la U. de Michigan liderado por D. Ball, utilizó el término de *conocimiento matemático para enseñar* (CME), distinguiendo inicialmente tres componentes:

- *conocimiento matemático común* (CCK) (operar correctamente, conocer definiciones, teoremas, propiedades),
- *conocimiento matemático específico* de la tarea de enseñar (SCK) (variedad de representaciones y ejemplos, explicaciones precisas y adecuadas, aplicaciones, modelamiento, visualización),
- *conocimiento de alumnos y matemáticas* (KSM) (conocer el razonamiento de los niños, sus errores típicos, lo que les resulta más difícil en relación a los tópicos matemáticos escolares, sus estrategias más frecuentes)

Esta clasificación fue utilizada para desarrollar pruebas que se aplicaron en Estados Unidos a gran escala, con interesantes resultados que tuvieron gran resonancia e impacto internacional. Este éxito, sin embargo, no alcanzó a la última categoría, KSM, pues las pruebas que pretendían medirlo no lograron propiedades sicométricas mínimamente aceptables (alfa de Cronbach de 0,5). En los trabajos más recientes de este grupo (Ball 2008) se han agregado otros elementos del *conocimiento matemático para enseñar* y se los ha reclasificado. El CCK y el SCK junto con una nueva componente llamada *conocimiento del horizonte de los contenidos*, conformarían el conocimiento de los contenidos disciplinares que necesita un profesor en la tarea de enseñar. En cambio el KSM, junto con otras dos categorías adicionales (*conocimiento de los contenidos y el currículum,* y *conocimiento de los contenidos y la enseñanza*) conformarían el Conocimiento Pedagógico de la Disciplina (CPD).

Hill, Schilling y Ball (2004a), implementaron pruebas con una muestra importante de ítems para ser aplicados a una muestra también grande de profesores, cuyos resultado se presentan en el artículo de Hill, Rowan, Ball (2005). La cantidad de datos recogidos les permitió comprobar que el conocimiento del profesor para enseñar matemática elemental es multidimensional. Mediante análisis factoriales pudieron separar en parte los ítems en función del contenido y del tipo de conocimiento. Utilizaron también rotaciones y análisis bi-factor, que confirmaron lo anterior.

El citado estudio alemán COACTIV introdujo una duda acerca de la composición de aquel conocimiento matemático que se requiere para enseñar matemática exitosamente. Más aún, se cuestiona la posibilidad de distinguir el CPD, como un conocimiento independiente del conocimiento matemático mismo.

No cabe duda que un sólido conocimiento matemático no puede, por si solo, implicar el conocimiento acerca de cuáles son los errores frecuentes de los niños, lo que les resulta más difícil en relación a los tópicos matemáticos escolares, sus estrategias más frecuentes, sus formas de razonar. Parece difícil que esta componente del CPD sea un conocimiento anidado en el conocimiento matemático y resulta más aceptable pensar que más que un problema de estructura de este conocimiento, se estaría frente a dificultades de medirlo con pruebas de lápiz y papel. Las alternativas usuales de evaluación de este conocimiento tienen desventajas conocidas. Por ejemplo, la observación de clases (directas o registradas en videos) tiene limitaciones asociadas al alto costo, el tiempo requerido y la confiabilidad de los datos obtenidos, que la hacen poco apropiada para evaluaciones de gran escala que lleven a la construcción de modelos que expliquen efectividad de la enseñanza. Pero eso no es todo. Las conductas observables de los profesores haciendo clases no son un reflejo fiel de sus conocimientos, como se constata en estudios que aplican pruebas a profesores cuyas clases se han observado (Varas, 2009).

Ainley y Luntley (Ainley, 2007) proponen un modelo teórico que identifica un "conocimiento dependiente de la atención" de los profesores como una componente importante de las prácticas de aula expertas. En un estudio piloto de pequeña escala muestran como los profesores expertos están permanentemente atentos a una gran variedad de aspectos, incluso sutiles, del comportamiento de sus alumnos. La observación de clases, sin embargo, no es suficiente para detectar y comprender sus mecanismos, por lo que realizan entrevistas a los profesores con posterioridad a las clases observadas. En estas entrevistas queda de manifiesto que los profesores muchas veces ni siquiera están plenamente conscientes de sus decisiones y los elementos que las gatillaron, lo que muestra la dificultad de evaluar el conocimiento identificado. Los mismos autores reconocen que si bien la habilidad de prestar atención a sus alumnos es transversal, su operación en situaciones particulares provee un conocimiento altamente contextual.

En el estudio que se presenta aquí se buscó responder a la pregunta acerca de la posibilidad de evaluar a gran escala y de manera confiable aquel elemento del CPD que el equipo de Michigan denomina *conocimiento de alumnos y matemáticas* (KSM), en los tópicos de aritmética y geometría de enseñanza básica. Como es de esperar que este conocimiento tenga una alta correlación con otras componentes del CPD, entonces interesa saber si se los puede distinguir a través de evaluaciones directas. Este objetivo es relevante en el contexto de chileno, donde un programa del Ministerio de Educación tendiente a mejorar la formación inicial de los profesores está introduciendo exámenes estandarizados para habilitar profesionalmente a los futuros profesores que egresan de las carreras de pedagogía. Este contexto sin embargo también produce una dificultad que fue considerada en el diseño metodológico del estudio: la incomodidad de los profesores respecto del aumento de las evaluaciones a sus conocimientos y a su desempeño.

El estudio

La primera dificultad para evaluar el conocimiento del profesor acerca de cómo sus alumnos aprenden matemática reside en la generación de buenas preguntas. En el caso del conocimiento matemático, aún cuando éste sea muy específico de la tarea de enseñar, es relativamente sencillo crear preguntas cuyas respuestas correctas sean indiscutibles. Pero en el caso que nos ocupa puede haber variaciones de un grupo de alumnos a otro, aspectos culturales y muchos factores que pueden hacer depender la respuesta correcta del contexto de quienes responden.

Un equipo de 4 personas con experiencias variadas en relación con esta materia confeccionó un conjunto de ítems basados en la literatura y la experiencia personal directa. En todos aquellos casos en que no hubo claro acuerdo acerca de una formulación precisa con una única respuesta correcta posible, se confeccionaron preguntas abiertas que se testearon bajo la forma de una prueba que se aplicó a un conjunto de 30 personas, entre profesores en ejercicio y estudiantes de pedagogía básica en su último año de formación. Del análisis de estas respuestas surgieron preguntas de alternativas múltiples que se clasificaron, al igual que el primer conjunto de ítems acordados, en cuatro categorías: aritmética de primer y de segundo ciclo, geometría de primer y de segundo ciclo. Los 63 ítems así obtenidos se combinaron en dos formas, A y B, que compartieron 22 ítems.

Una muestra de 239 personas, que respondieron a una de estas dos formas estuvo conformada por profesores en ejercicio y alumnos de último año de pedagogía básica de universidades de las ciudades de Santiago y de Concepción (Tabla 1).

Tabla 1

Distribución de los colegios, carreras, profesores y estudiantes de la muestra por ciudad.

Ciudad	N Colegios	N Profesores	N Carreras	N Estudiantes	N Muestra
Santiago	11	42	4	127	169
Concepción	6	41	1	29	70
TOTAL	17	83	5	156	239

Teniendo en cuenta la gran variabilidad de los aspectos educacionales en Chile chile, se buscó que la muestra de profesores se distribuyera de modo de cubrir las distintas dependencias administrativas (Municipal, Particular Subvencionado y particular Pagado) y logros en las pruebas del Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) de los colegios, como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2

Distribución de los colegios en la muestra y el universo según la dependencia administrativa y nivel de logro SIMCE.

Dependencia administrativa	SIMCE Inicial	SIMCE Intermedio	SIMCE Avanzado	TOTAL
Municipal	*4 (284)*	*4 (186)*	*1 (4)*	*9 (474)*
Particular Subvencionado	*2 (214)*	*2 (599)*	*2 (81)*	*6 (894)*
Particular Pagado	*0 (6)*	*1 (59)*	*1 (135)*	*2 (200)*
TOTAL	*6 (504)*	*7 (844)*	*4 (220)*	*17 (1568)*

Dentro de cada casillero de la matriz de clasificación de colegios, se encuentran el número de colegios de la muestra y entre paréntesis el número de colegios del universo correspondiente. Los establecimientos no fueron sorteados sino elegidos por su disposición a colaborar y el número de profesores decididos a participar. El diseño original pretendía aplicar la prueba en cada colegio a un profesor por nivel, es decir a 8 profesores por colegio. Esto no se logró en ningún caso, por rechazo de los profesores a someterse a una evaluación.

Con este mismo propósito, las carreras de pedagogía básica consideradas pertenecen a universidades estatales y privadas, tradicionales y nuevas, de Santiago y de Concepción.

Todas las pruebas se aplicaron en el segundo semestre de 2009, entre Agosto y Septiembre, en eventos únicos por establecimiento, bajo la conducción de al menos uno de los miembros del equipo que confeccionó las preguntas.

Para poder apreciar la dificultad de las pruebas construidas, que llamaremos KSM, se aplicaron simultáneamente a la misma población las pruebas MSP_04_formA y MSP_04_formB del proyecto LMT de la Universidad de Michigan, que se han constituido en un estándar internacional de evaluación del conocimiento matemático específico de la tarea de enseñar. La clasificación de los ítems en las distintas componentes de este conocimiento puede ser controversial, lo que agregado a los antecedentes de dificultades y cuestionamientos acerca de la posibilidad de separar dichas componentes, conforma un desafío mayor que se enfrentó a través de un Análisis de Componentes Principales al conjunto de respuestas a las nuevas pruebas KSM desarrolladas y las pruebas del proyecto LMT.

Resultados

En primer lugar se analizó la confiabilidad de todas las pruebas rendidas. A continuación para que la dificultad de los ítems no obscurezca el efecto de las componentes en estudio del conocimiento del profesor, se estudiaron las dificultades de los ítems de las pruebas, globalmente y por contenido. Para este estudio, se realizó un análisis factorial de los resultados de las dos pruebas KSM y LMT de cada forma. Para aprovechar toda la información recogida, se agregaron los resultados de las dos formas. Se implementaron dos métodos: (1) Se utilizaron solamente los items comunes a las dos formas, que tiene el inconveniente de tener poco ítem (35); (2) Para utilizar todos los ítems de la Forma A (fue rendida por más profesores), con resultados sobre toda la muestra, se creó un método para predecir los resultados en los ítems no comunes de la Forma A de los profesores que rindieron la Forma B.

Ambas formas de la prueba KSM exhiben una confiabilidad aceptable, estimada con el coeficiente alfa de Cronbach 0,76 para la Forma A y 0,71 para la Forma B. para las prueba LMT los coeficientes fueron 0.84 y 0.87 respectivamente. Para agrupaciones de ítems de la prueba KSM según las clasificaciones de contenido (geometría y números) se obtuvo alfas de Cronbach del orden de 0,73.

Se compararon en una primera etapa las dificultades de las pruebas KSM y LMT mediante análisis de Rasch. Se mostró que las pruebas KSM construidas parecen muy difíciles para la población evaluada. Sin embargo el mismo análisis aplicado a las pruebas LMT mostró un comportamiento similar. Las dificultades medias por contenido de cada prueba se encuentran en la Tabla 3. No se observan muchas diferencias entre las medias, lo que se confirmo con test de Student, cuyos p-valores fueron altos (valores entre paréntesis). Los p-valores del test de Student de comparación de las pruebas globales KSM y LMT fueron 0.86 para la Forma A y 0.80 para la Forma B. La prueba LMT sobre funciones y algebra de la prueba LMT fue un poco más difícil. Las dificultades de ambas pruebas son globalmente iguales y también por contenido.

Tabla 3

Dificultades medias por prueba y contenido de cada forma.

Forma A Materia	Números (0.28)		Geometría (0.43)		Funciones Algebra
Prueba	KSM	LMT	KSM	LMT	LMT
Dificultad media	0.06	-0.29	-0.14	-0.41	0.97
Prueba	KSM		LMT		
Dificultad media	-0.022		0.017		
Forma B Materia	Números (0.72)		Geometría (0.07)		Funciones Algebra
Prueba	KSM	LMT	KSM	LMT	LMT
Dificultad media	-0.14	-0.28	0.32	-0.26	0.63
Prueba	KSM		LMT		
Dificultad media	0.04		-0.02		

Si bien hay una alta correlación entre los resultados de las pruebas KSM y LMT, un análisis factorial de los resultados permitió distinguir una componente del conocimiento del profesor medida con la prueba KSM. En el análisis se tomaron los resultados a los 108 ítems de ambas pruebas (LMT y KSM) en su Forma A. En la figura 1 se encuentran los ítems proyectados sobre los factores 1 y 2 y sobre los factores 2 y 3 en la Figura 2. El primer factor está altamente correlacionado con las habilidades medidas por Rasch (0.97). Podemos decir entonces que la posición de un ítem sobre el primer factor es aproximadamente igual a la correlación entre las respuestas a este ítem con la habilidad correspondiente calculada con Rasch. Esto nos permitió relacionar las habilidades proporcionadas por Rasch con los ítems. El segundo factor opone claramente los ítems de Funciones y Algebra de la prueba LMT con los otros ítems (Figura 1). El tercer Factor (Figura 2) es el Factor KSM que buscábamos, pues vemos en la parte superior los ítems de la prueba KSM y debajo los ítems de la prueba LMT.

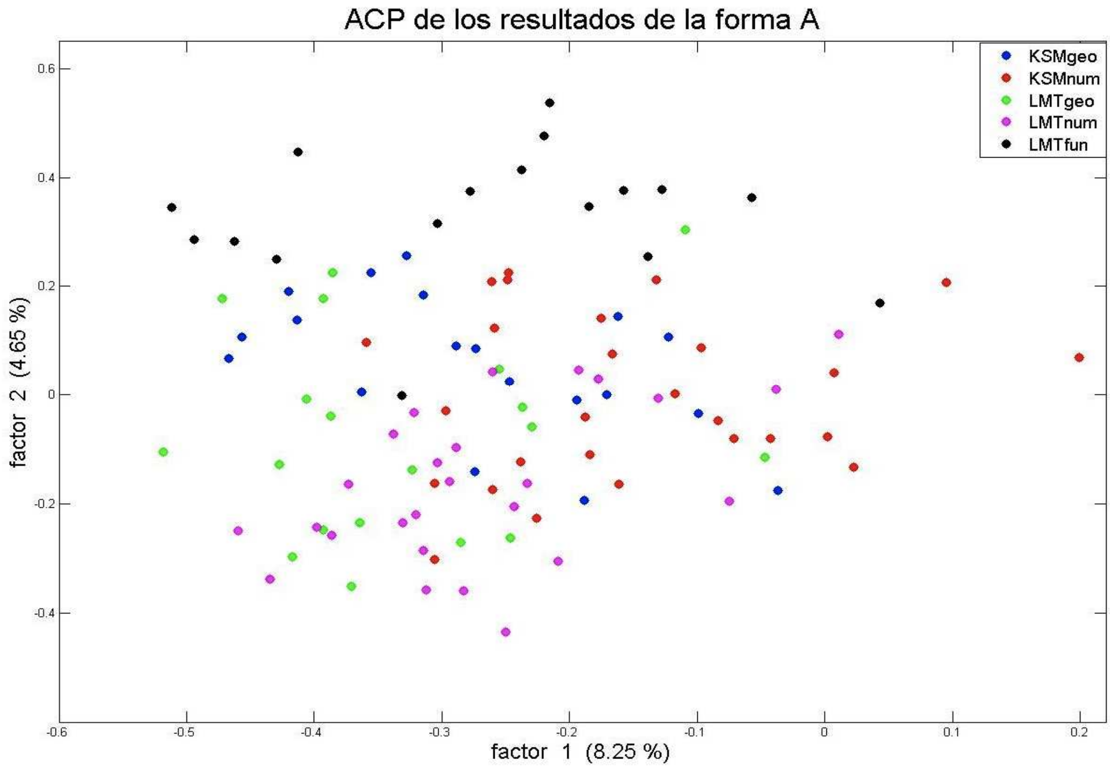

Figura 1. Los ítems de la Forma A sobre los Factores 1 y 2.

Para confirmar las interpretaciones de los dos gráficos, se calcularon las medias de los cuatro primeros factores por prueba y contenido (Tabla 4). En la Tabla se indico con * las medias de los grupos de ítems que se separan del resto. Por ejemplo, sobre el segundo factor, la subprueba de Funciones y Algebra de la prueba LMT se opone a los otros contenidos. Sobre el tercer factor se separan los ítems de nuestra prueba KSM de los ítems de la prueba LMT. Finalmente el cuarto factor opone el contenido de geometría KSM o LMT al resto. Se confirmaron estas interpretaciones con un test de Student de comparación de los grupos de ítems con * y sin * para los factores 2, 3 y 4. En los tres casos, los test dieron un p-valor nulo.

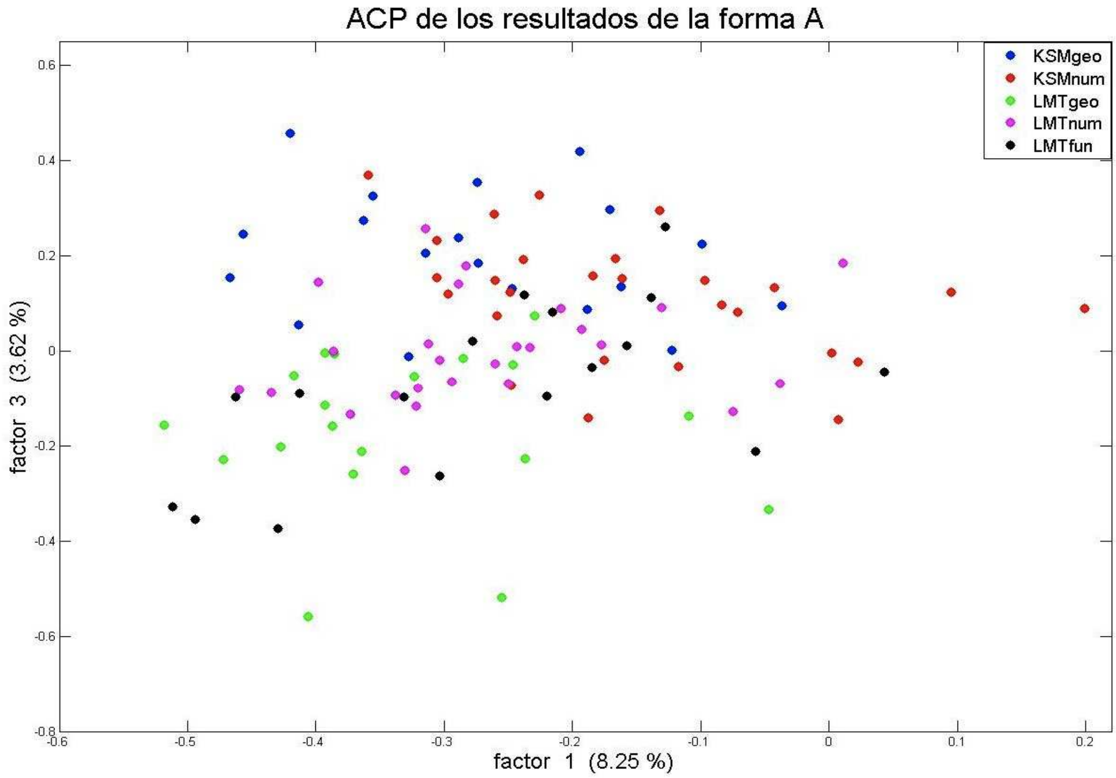

Figura 2. Los ítems de la Forma A sobre los Factores 1 y 3.

Tabla 4

Promedios de los valores por materia y prueba de los 4 primeros factores.

Prueba/Contenido	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Factor 4
KSM geometría	0.272	0.057	0.204*	-0.066*
KSM Números	0.152	-0.002	0.113*	0.014
LMT geometría	0.330	-0.071	-0.168	-0.062*
LMT números	0.268	-0.164	-0.002	0.006
LMT funciones	0.266	0.331*	-0.082	0.012

Como las muestras separadas de las dos formas no son muy grandes (127 y 101), se agruparon las dos muestras. Un primer método consistió en tomar los 35 ítems comunes a las dos formas (22 ítems para la prueba KSM y 13 para la prueba LMT), permitiendo así tener una muestra de 228 profesores. Los resultados no mostraron conclusiones demasiado interesantes debido al número pequeño de ítems. Se buscó entonces conservar todos los ítems de una de las formas y juntar las muestras. Se eligieron los 108 ítems de las pruebas KSM y LMT de la Forma A, que tiene una muestra de profesores más grande, y predecir las respuestas que habrían dadas los profesores que rindieron la Forma B en los ítems de la Forma A no comunes a la Forma B. En el modelo Rasch, se define la probabilidad $Pr(i/h_j)$ que un individuo j de habilidad h_j responda correctamente a un ítem i de dificultad ∂_i por:

$$\Pr(i/h_j) = \frac{e^{h_j-\delta_i}}{1+e^{h_j-\delta_i}} \qquad (1)$$

Se estiman las respuestas a los ítems no comunes de la Forma A para los profesores que rindieron la Forma B de la siguiente manera:

1. Se aplica el modelo Rasch a los 46 ítems de la prueba KSM de la Forma A. Se obtienen las dificultades ∂_i de la prueba KSM de la Forma A.
2. Se aplica el modelo Rasch a los 38 ítems de la prueba KSM de la Forma B. Se obtienen las habilidades h_j de los profesores de la Forma B en la prueba KSM.
3. Se estiman las probabilidades $\Pr(i/h_j)$ (i=1,2,…24; j=1,2,…,101) para los profesores que rindieron la Forma B respondan correctamente a los 24 ítems de la prueba KSM de la Forma A que no están en la prueba KSM de la Forma B a partir de la ecuación (1).
4. Para cada ítem *i* de estos 24 ítems no comunes, se estima la respuesta como correcta para los profesores que rindieron la Forma B, si la probabilidad $\Pr(i/h_j)$ calculada en el punto 3 es mayor que 0.5.

De esta manera se obtienen los resultados de una muestra de 228 profesores, tomando los resultados reales en las 46 ítems de los 127 profesores de la Forma A, los resultados reales de los 101 profesores de la Forma B en los ítems comunes y los resultados estimados en los item no comunes con el procedimiento anterior.

Este mismo procedimiento se aplica a los 62 items de la Forma A de la prueba LMT. Se obtiene así una muestra de 228 resultados a los 108 ítems de la Forma A.

Para evaluar la calidad de las estimaciones, se consideran los errores de estimaciones en las respuestas conocidas (Forma A y ítems comunes de la Forma B). Si bien la tasa de errores puede parecer alta (entre 20% y 25%), el modelo Rasch aplicado a las estimaciones conserva las habilidades de ambas formas (correlación entre 0.97 y 0.99).

Se aplica entonces un análisis factorial de los ítems de la Forma A a la muestra ampliada de 228 profesores. Se obtienen resultados parecidos al caso de la Forma A (Figuras 3 y 4 y Tabla 5). Las diferencias de medias de los grupos de ítems con y sin * fueron confirmados con test de Student, cuyos p-valores fueron nulos. Se confirma el Factor 3 como Factor KSM. El cuarto factor separa los ítems de Funciones y Algebra de la prueba LMT de los otros ítems. Cabe notar que en su artículo Hill (2004a) hacen ver que los ítems de Funciones y Algebra perturban el análisis por su comportamiento distinto de los otros contenidos. En un estudio futuro, se podrían eliminar estos ítems.

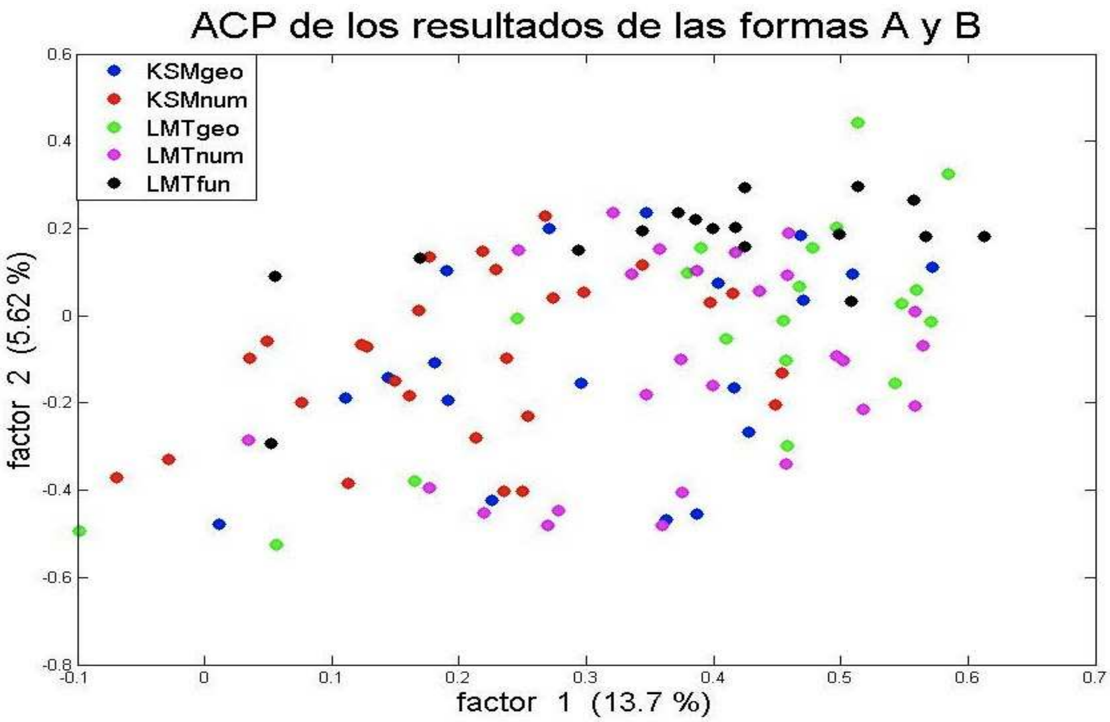

Figura 3. Los ítems de la Forma A con las dos muestras sobre los Factores 1 y 2.

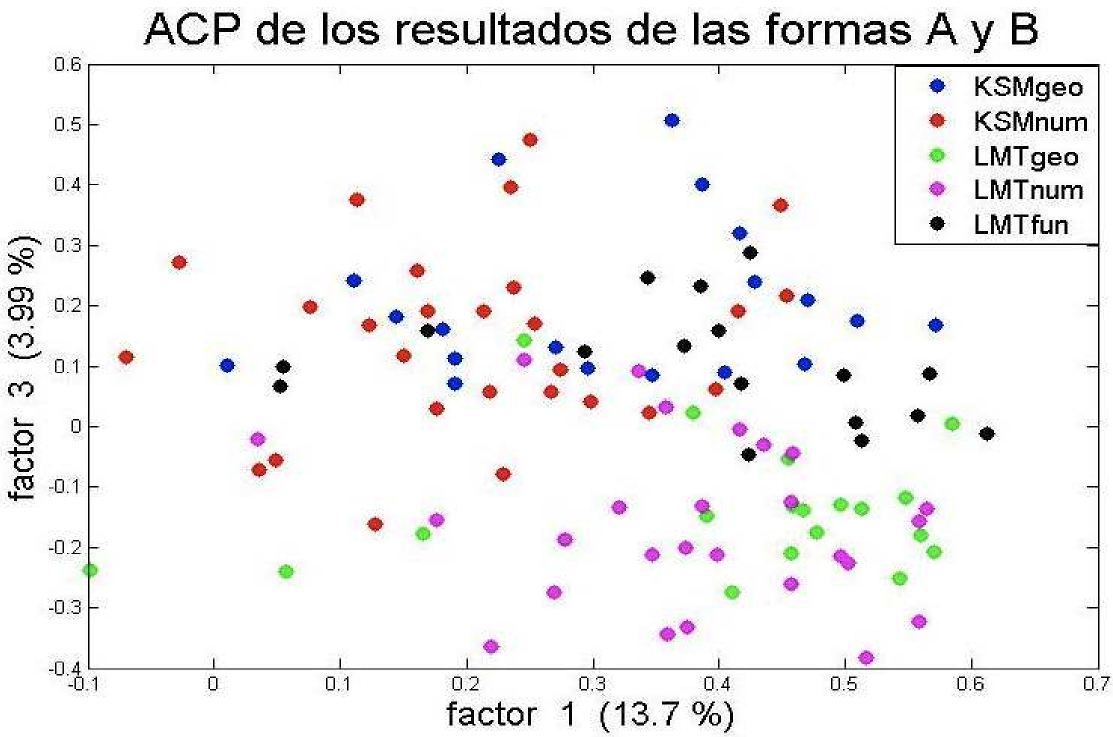

Figura 4. Los ítems de la Forma A con las dos muestras sobre los Factores 1 y 3.

Tabla 5

Promedios de los valores por materia y prueba de 4 factores del ACP sobre los 228 profesores

Materia/Prueba	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Factor 4
KSM geometría	0.315	-0.106	-0.202*	-0.087
KSM Números	0.208	-0.101	-0.146*	-0.075
LMT geometría	0.404	-0.027	0.139	0.035
LMT números	0.381	-0122	0.163	-0.030
LMT funciones	0.388	0.161*	-0.099	0.282*

Conclusiones

Se logró elaborar una serie de ítems para evaluar la componente del conocimiento de alumnos y matemático (KSM) en la tarea de enseñar, conformando pruebas con una confiabilidad no lograda por otros estudios internacionales. Análisis estadísticos simples de los resultados de la aplicación de estos ítems KSM junto con ítems de la prueba LMT de la Universidad de Michigan a las dos muestras permitieron distinguir la componente KSM de las otras.

En un sistema saturado de evaluaciones incomodas para los profesores, hay que considerar el riesgo de obtener una calidad dudosa de la información recogida a través de pruebas largas en muestras aleatorias grandes. Resulta más confiable dividir una prueba larga en dos pruebas más cortas que se aplican en dos muestras más pequeñas (Formas A y B).

Se pudo optimizar el uso de la información, juntando las dos muestras en una sola. Para esto, se tomaron los resultados de los ítems de la Forma A, se agregaron los resultados obtenidos por los profesores que rindieron la Forma B, en los ítems comunes a las dos formas. Los resultados en los ítems no comunes de la forma A de los profesores que rindieron la Forma B se estimaron mediante el modelo de Rasch. Los análisis estadísticos de los resultados de esta muestra ampliada son consistentes con los resultados de las muestras por separado.

Este estudio es de gran importancia para Chile, donde se están introduciendo evaluaciones masivas estandarizadas del conocimiento de los profesores, como parte de un programa para mejorar su formación inicial.

Referencias y bibliografía

Ainley, J., Luntley, M. (2007). The role of attention in expert classroom practice. *J. Math Teacher Educ*.,10, 3-22.

Ball, D. L. (1990), The Mathematical Understandings That Prospective Teachers Bring to Teacher Education, *The Elementary School Journal*, 90(4), 449-466.

Ball, D. L. (2000), Bridging Practices. Intertwining Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach, *Journal of Teacher Education*, 51(3), 241-247.

Ball, D. L. (2002), Knowing Mathematics for Teaching: Relations between Research and Practice, *Mathematics and Education Reform Newsletter*, 14(3), 1-5.

Ball, D. L., Hill, H. C., Bass H. (2005), Knowing Mathematics for Teaching. Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide? *American Educator*, Fall 2005, American Federation of Teachers.

Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G. (2008), Content Knowledge for Teaching. What Makes it Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Hill, H., Ball, D. L., Schilling, S. (2004-a), Developing Measures of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching, The *Elementary School Journal*, 105(1), 11-30.

Hill, H. C., Ball, D. L. (2004-b), Learning Mathematics for Teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes, *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 330-351.

Hill, H. C., Rowan, B., Ball, D. L. (2005), Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement, *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A. (2008-a), Pedagogical Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers, *Journal of Educational Psychology*, 100(3), 716-725.

Krauss S., Baumert, J., Blum, W. (2008-b) Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs**,** *Journal ZDM,* 40(5), 873-892.

Krauss, S., (2007), Wie professionsspezifisch sind das fachdidaktische Wissen und das Fachwissen von Mathematiklehrkräften? *Beiträge zum Mathematikunterricht bei der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*.

Lacourly, N., Varas, M. L. (2009), Teachers Mathematical Reasoning Does Matter, *Proof and Proving. ICMI Study 19 Conference Proceedings*, 2, 47-52.

Ma, Liping (1999), Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States, *Lawrence Erlbaum Associates*, Publisher. Mahwah, NJ.

Varas, M. L., Felmer, P., Gálvez, G., Lewin, R., Martínez, C., Navarro, S., Ortiz, A., Schwarze, G., (2008) Oportunidades de Preparación para Enseñar Matemática de los Futuros Profesores de Educación General Básica*, Calidad en la Educación Nº 29,* Consejo Superior de Educación.

Varas, M. L. (2009). Análisis de la Calidad de Clases de Matemática; Teorema de Pitágoras y razonamiento matemático, Selección de Investigaciones Primer Concurso FONIDE: Evidencias para Políticas Públicas en Educación. Ministerio de Educación. ISBN:978-956-292-228-9, 123-153.