



## Investigação de Padrões Fractais no GeoGebra

Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho **Faria**  
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Brasil  
[rejanefaria1@hotmail.com](mailto:rejanefaria1@hotmail.com)  
Marcus Vinicius **Maltempi**  
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Brasil  
[maltempi@hr.ac.br](mailto:maltempi@hr.ac.br)

### Resumo

Este trabalho discute o “uso de tecnologias para o ensino e aprendizagem da matemática”, pois objetiva apresentar as inferências e resultados de uma pesquisa qualitativa, realizada no GeoGebra, com alunos do primeiro ano do Ensino Médio. A pesquisa investigou quais contribuições a exploração de Padrões Fractais em um software de geometria dinâmica traz ao processo de generalização de conteúdos matemáticos. A análise dos dados foi realizada com base nas Fases da Investigação de um Padrão, propostas por Herbert e Brown (2000). Os resultados obtidos indicam que o trabalho com Padrões Fractais contribui com o processo de generalização de conteúdos matemáticos por possuírem características que possibilitam a exploração de diversos desses conteúdos. Além disso, o GeoGebra possibilitou a visualização, construção e manipulação dos Padrões Fractais em seus diversos níveis, permitindo assim a percepção das particularidades que fazem com que se repita infinitamente, ao longo das iterações, sua estrutura inicial.

*Palavras chave:* Fases da Investigação de um Padrão, Ensino de Matemática, Ensino Médio, Generalização Matemática, Metodologia Qualitativa.

### Introdução

Este artigo aborda a temática uso de tecnologias para o ensino e aprendizagem da matemática do XIV CIAEM. Sua finalidade é apresentar inferências e resultados de uma pesquisa de mestrado de cunho qualitativo intitulada: “PADRÕES FRACTAIS: contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos”.

A referida pesquisa, por sua vez, teve por objetivo investigar quais contribuições a exploração de Padrões Fractais em um software de geometria dinâmica traz ao processo de generalização de conteúdos matemáticos.

A investigação foi desenvolvida com base na metodologia qualitativa por entender que esta permite uma análise coerente dos dados e uma relação intensa com o objetivo e os procedimentos de coleta de dados. As fontes dos dados foram: entrevistas, questionários, registros escritos em folhas de atividades, caderno de campo, fotografias, filmagens, gravações de áudio e gravações da interação dos alunos com o computador ao longo dos encontros do curso.

Para alcançar o objetivo geral da pesquisa, um curso com alunos do primeiro ano do Ensino Médio, foi idealizado, elaborado e desenvolvido. Durante o curso foram realizadas seis atividades de manipulação e análise dos Padrões Fractais Árvore Pitagórica, Triângulo de Sierpinski, Curva de Koch, Tetra Círculo, Lunda-Design e Hexagonal tipo Dürer. Na seção seguinte apresentaremos o termo Padrão Fractal e os Padrões Fractais que exploramos na pesquisa.

### **Padrões Fractais**

Segundo Vale *et. al.* (2005), o termo “padrão” refere-se à disposição ou aos arranjos de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades. Barbosa (2000) destaca que toda a Matemática está relacionada aos padrões:

[...] propriedades, regras e algoritmos, podem ser consideradas como padrões; aliás, a Matemática, talvez exagerando um pouco, pode ser pensada como um conjunto de padrões: numéricos, geométricos, algébricos, etc. (Barbosa, 2000, p. 9).

Vale e Pimentel (2005) propõem algumas tarefas de reconhecimento de padrões e generalização em diferentes representações, como pictórica ou geométrica, numérica e mista. Além disso, recomendam que o trabalho com os diversos tipos de padrões seja simultâneo, pois:

“Os alunos que trabalham na forma exclusivamente numérica manifestaram insuficiências na resolução, não conseguindo obter uma generalização completa ou obtendo uma lei de formação errada. De modo geral os alunos que têm mais sucesso nas tarefas são os que recorrem a uma abordagem exclusivamente geométrica ou mista. Neste sentido devemos incentivar os nossos alunos a olhar para os problemas propostos de vários modos, e a mobilizar todos os seus conhecimentos sejam eles de natureza numérica ou geométrica” (Vale & Pimentel, 2005, p. 19).

Nesse sentido, entendemos que Vale e Pimentel (2005) recomendam o trabalho concomitante das propriedades numéricas e geométricas dos padrões. Uma alternativa para essa múltipla abordagem de padrões está nos Padrões Fractais, pois eles proporcionam a exploração não somente das características numéricas e geométricas, mas também de propriedades algébricas. Nesse sentido, explicitamos que o termo “Padrões Fractais” está relacionado ao modelo pelo qual os fractais estão condicionados numérica, algébrica e geometricamente. Neste modelo é repetida, periodicamente, uma determinada estrutura invariante, para a feitura dos próximos níveis em uma ou mais direções. Ressaltamos ainda nossa concordância de que “[...] ao conceito de padrão estão associados termos tais como: regularidade, sequência, motivo, regra e ordem.” (Vale *et. al.*, 2005, p. 3).

Todos os Padrões Fractais possuem as propriedades autossimilaridade e complexidade infinita, que são visuais. A autossimilaridade pode ser visualizada nas semelhanças identificadas através das escalas, de modo que partes menores dos objetos que vão compondo os níveis de um fractal se assemelham com todo ele. Assim, as pequenas partes da curva representam totalmente a forma da curva, de modo que ao ampliar uma parte, encontramos uma réplica do fractal todo (Ebersson, 2004).

Assim como a autossimilaridade, a complexidade infinita, pode ser observada por meio da visualização da iteração dos níveis do fractal, pois está relacionada ao padrão que repete sua estrutura própria por uma quantidade ilimitada de vezes. Essas propriedades proporcionam a sensação de surpresa e a contemplação da estética nas regularidades presentes na aparente irregularidade desses padrões. Esse efeito causado na observação está relacionado ao fato de cada propriedade ser composta de harmonia e simetria, oriundas da atividade humana para construção desses objetos, com rigor e criatividade (Barbosa, 2002; Faria, 2012).

Desse modo, quando observamos um Padrão Fractal podemos prever o que ocorrerá ao longo das iterações. Assim, a cada iteração o padrão chega a um nível sucessor que será a base para a iteração seguinte. Na figura 1, estão representados os Padrões Fractais explorados em Faria (2012).

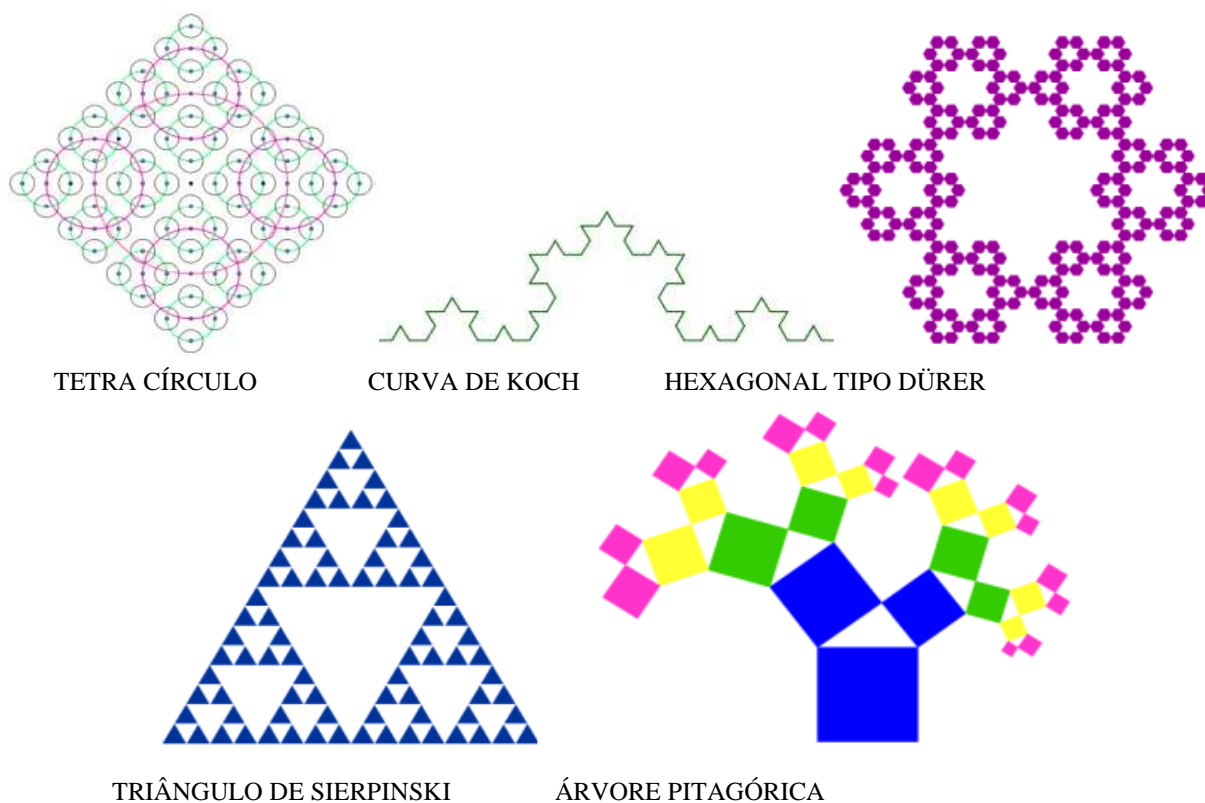


Figura 1. Padrões Fractais construídos no GeoGebra (Faria, 2012).

Além dos Padrões Fractais expostos na figura 1, o Padrão Fractal Lunda-design também fez parte de Faria (2012) e foi o tema de uma das seis atividades realizadas. Nele podemos observar oito quadrados iguais, dispostos como no nível 0, da Figura 2. O processo de iteração

consiste em reproduzir a figura inicial no interior de cada um dos quadrados do nível anterior. Nesse processo de iteração, novos níveis vão sendo formados.

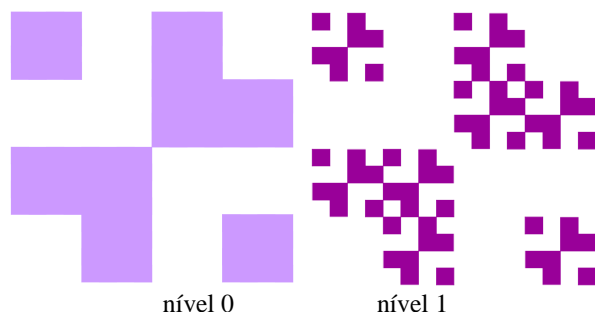


Figura 2. Padrão Fractal Lunda-design representado em dois níveis (Faria, 2012).

As atividades com Padrões Fractais foram pensadas para que os alunos se dedicassem à manipulação e análise destes padrões, buscando identificar aspectos comuns, visando a alcançar a generalização de conteúdos matemáticos, que identificamos por meio das três Fases da Investigação de um Padrão enumeradas por Herbert e Brown (2000), as quais apresentamos na seção seguinte.

### Fases da Investigação de um Padrão

A análise das atividades realizadas foi feita com base nas três Fases da Investigação de um Padrão enumeradas por Herbert e Brown (2000), a saber, Procura do Padrão, Reconhecimento do Padrão e Generalização. As autoras afirmam que o empenho dos alunos para resolver uma situação envolvendo padrões passa por estas três etapas.

Primeiramente eles buscam o padrão na história, no sentido de extrair a informação daquelas circunstâncias. Os alunos utilizam vários métodos para extrair o padrão, como desenhos para esboçar as informações que leram ou viram.

A segunda etapa consiste em reconhecer o padrão e descrevê-lo usando diferentes métodos. Para isso, os alunos buscam representar a informação matematicamente, dispondo de palavras, diagramas, tabelas, gráficos e equações. Nessa etapa, os alunos se deparam com novas situações, ao serem convidados a pensar em casos semelhantes, mas envolvendo outros exemplos com padrões.

A terceira e última etapa, consiste em generalizar o padrão e relatar isso na história. Esta etapa pode ser identificada quando os alunos estão buscando interpretar e aplicar a descoberta matemática, resolvendo novas situações, testando novas conjecturas, relatando as situações e identificando relações funcionais para a mesma situação e para novas.

Herbert e Brown (2000) representam as três etapas supracitadas em uma estrutura, que reproduzimos na figura 3. Nossa interpretação desta estrutura é de que o processo de investigação é não-linear, pois é iniciado com uma determinada situação, da qual são extraídas informações que permitem a representação matemática do padrão. Concomitantemente, análises matemáticas vão sendo realizadas, as quais permitem que surjam descobertas de caráter matemático e que elas sejam também representadas matematicamente. Por sua vez, a busca por representar matematicamente conduz a novas descobertas. Essas descobertas matemáticas vão

sendo interpretadas e empregadas de forma a retornar a situação inicial com um novo olhar que engloba reconhecer a situação analisada e pensar em outras semelhantes.

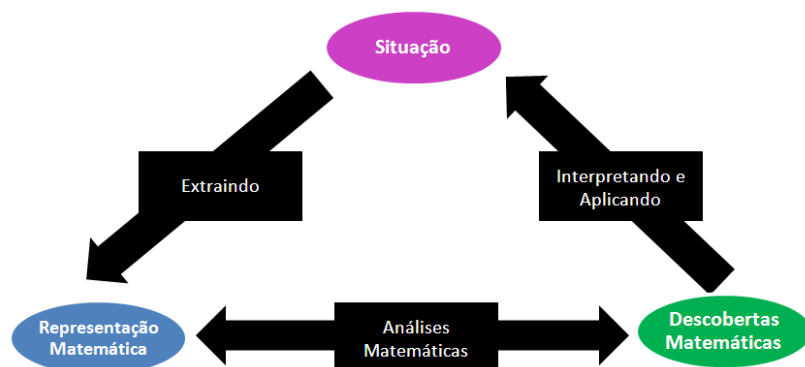


Figura 3. Estrutura do Pensamento Algébrico de Herbert e Brown (2000) (Faria, 2012).

Segundo Herbert e Brown (2000), quando a terceira fase é atingida, nota-se um efeito positivo sobre a percepção do aluno de sua capacidade de generalizar uma regra a partir de uma situação concreta, isto é, a pensar algebricamente. Ao acompanhar o processo, os alunos são capazes de encontrar um padrão e expressá-lo por meio de uma regra geral. Essa percepção da própria capacidade de generalizar foi identificada, por exemplo, na afirmação que um dos alunos ligados a uma pesquisa realizada por Herbert e Brown (2000). Este aluno disse que, para ele, descobrir fórmulas é tão excitante quanto encontrar artefatos é para um arqueólogo. É nesse sentido que generalizar padrões faz com que os alunos se sintam bem sucedidos.

Como já relatado, os Padrões Fractais são entendidos como o modelo pelo qual os fractais estão condicionados numericamente, algebricamente e geometricamente. Além disso, generalizar um conteúdo matemático por meio da exploração de Padrões Fractais está relacionado com a descoberta de uma representação capaz de expressar o conteúdo matemático específico que está sendo explorado para qualquer nível do padrão.

Herbert e Brown (2000) relatam que primeiramente os alunos buscam o padrão na situação dada. Esta fase é a Procura do Padrão. No caso da pesquisa com Padrões Fractais, a fase de Procura do Padrão consistiu na etapa em que os alunos se dedicaram a compreender o padrão que faz com que o fractal repita, no decorrer dos níveis, sua estrutura inicial.

Na segunda fase de Herbert e Brown (2000), os alunos reconhecem o padrão por meio de diferentes métodos. Para isso, os alunos representam matematicamente o que identificam durante a compreensão da situação dada inicialmente. No caso das atividades com os Padrões Fractais, os alunos podem passar por essa fase quando reconhecem o padrão para um nível específico e descrevem os demais níveis usando tabelas e representando os valores encontrados por meio de frações, potências, e outras formas de representações matemáticas. Além disso, descrevem uma fórmula capaz de expressar um conteúdo matemático (que está sendo abordado em um Padrão Fractal) para um nível qualquer.

Por fim, segundo Herbert e Brown (2000), os alunos atingem a terceira fase, quando generalizam o padrão e relatam isso retomando a situação inicial. Nas atividades com Padrões Fractais, essa fase pode ser atingida quando os alunos conseguem escrever para um “nível posterior ao nível qualquer” (nível  $n+1$ ), uma fórmula geral que expresse o conteúdo matemático

explorado naquela situação. Na exploração de alguns Padrões Fractais, durante a fase de generalização, os alunos descrevem ainda o que ocorreria em um nível anterior ao nível zero.

O Referencial Teórico apresentado nesta seção subsidiou a análise das atividades de exploração de Padrões Fractais realizadas por alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Na seção seguinte, apresentamos o contexto em que as atividades foram realizadas.

### **Realização das Atividades**

Um dos procedimentos de investigação para a coleta de dados foram as seis atividades elaboradas com o intuito de analisar quais contribuições a investigação de atividades com Padrões Fractais no SGD GeoGebra pode trazer ao processo de generalização de conteúdos matemáticos. Os conteúdos abordados ao longo das atividades foram áreas de quadrados, comparação entre raios de circunferências e entre segmentos, criação de expressões gerais, frações, uso de tabelas, perímetros, potências, progressões aritméticas e geométricas, sequências e Teorema de Pitágoras. As atividades foram desenvolvidas em um curso, realizado em contra turno, composto de seis encontros, com dezenove alunos voluntários em uma escola pública.

Antecedendo a realização das atividades de manipulação e análise dos Padrões Fractais no software GeoGebra, foi realizada uma atividade de reconhecimento das funções deste software que seriam utilizadas durante as atividades. Essa atividade almejou familiarizar os alunos com o software, colaborando assim, para um melhor andamento do trabalho ao longo da realização das atividades de exploração dos Padrões Fractais.

As atividades foram desenvolvidas em duplas, para que os estudantes pudessem trocar ideias, discutir e estabelecer um diálogo sobre aquilo que se investigava. De acordo com Alrø e Skovsmose (2006) para que ocorra o diálogo são necessárias duas pessoas ou mais em uma relação de igualdade, pois a produção é favorecida no trabalho em dupla, de modo que dialogar engloba investigação, sujeitar-se a riscos e promover a igualdade.

Para Ponte *et. al.* (2003), investigar não significa resolver problemas difíceis, mas sim lidar com questões abertas para as quais não se têm ainda uma resposta ou quando há possibilidade de se encontrar outras possíveis respostas. Este autor acrescenta, ainda, que investigar em matemática

[...] assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas [...]  
(Ponte et al., 2003, p. 10).

Nesse sentido, Santos (2008) discute que um processo investigativo pode ser entendido como o ato de explorar de diferentes formas e experimentar, por exemplo, diferentes variações de uma construção geométrica, além de questionar a intuição, de modo a instigar a busca de argumentos para validar determinadas conjecturas formuladas nesse processo.

Nessa perspectiva, a investigação do processo de iteração de um Padrão Fractal, bem como de conteúdos específicos que podem ser explorados por meio da manipulação e análise desses padrões, fazem com que as conjecturas validadas desta maneira, passem a fazer mais sentido aos estudantes, aumentando assim a possibilidade de outros conceitos matemáticos serem produzidos e da generalização de conteúdos matemáticos ser alcançada.

Posto isto, passamos a discutir na próxima seção uma das atividades realizadas e analisadas em Faria (2012).

### Análise da Atividade com o Padrão Fractal Lunda-Design

Embora todos os alunos participantes do curso tenham realizado as atividades, iremos expor, nesta seção, apenas a análise da atividade de investigação do Padrão Fractal Lunda-Design realizada por duas alunas em dupla, as quais atribuímos o nome de Mariana e Gisele. Em alguns momentos, onde há uma troca de ideias proposta pela pesquisadora, os nomes de outros alunos também aparecem na análise.

Iniciando a atividade, as alunas foram convidadas a manipular, no GeoGebra, a construção do Padrão Fractal e leram na primeira questão que os níveis do fractal poderiam ser identificados pelas cores verde (nível 0) e roxo (nível 1), conforme mostra a figura 4.

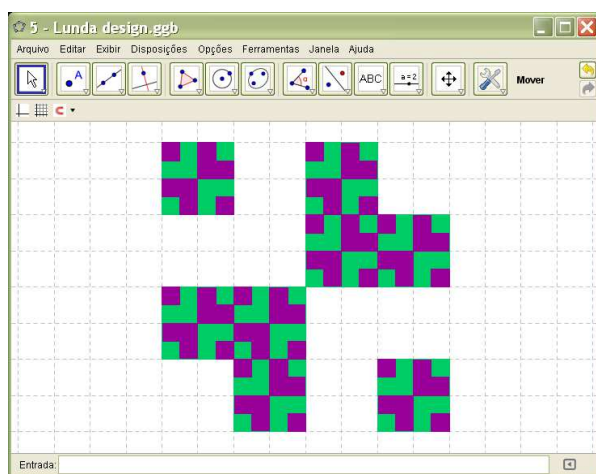


Figura 4. Padrão Fractal Lunda-Design no GeoGebra (Faria, 2012).

As alunas iniciaram a investigação do Lunda-Design, com o intuito de identificar regularidades no processo de construção. Por meio da ferramenta protocolo de construção, as alunas reviram por três vezes os passos da construção e Gisele afirmou “*Em cada quadrado é feito o mesmo desenho dentro dele, que foi feito no nível 0. Foi feito o mesmo desenho do nível 0*”. Depois disso, as alunas registraram suas observações (Figura 5).

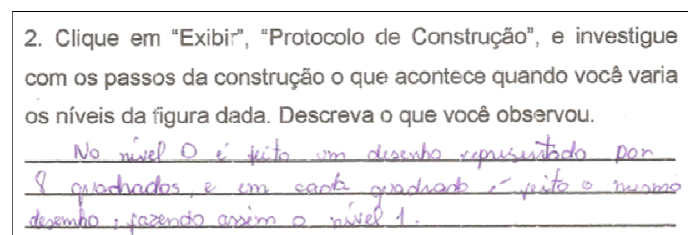


Figura 5. Questão 2 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012).

Já nessa parte inicial de exploração do Lunda-Design, ficou evidente a relevância dos recursos do GeoGebra na visualização de peculiaridades nas construções dos Padrões Fractais. Desde as primeiras manipulações foram utilizadas as ferramentas *ampliar* e *reduzir*, que

permitem que as figuras sejam analisadas em diferentes tamanhos, e a ferramenta *protocolo de construção* que permite que os passos da construção finalizada sejam revistos.

Nas primeiras manipulações do Padrão Fractal no GeoGebra já haviam indícios de que a dupla estava buscando o padrão do fractal, pois reviram por vezes o processo de construção, observando o que acontecia quando os níveis eram variados.

A questão 3, solicitava que as observações fossem compartilhadas, e o diálogo foi iniciado:

*Gisele: No nível 0 foi feito um desenho com 8 quadradinhos. Dentro de cada um desses é feito o mesmo desenho do nível zero, mas de cor diferente.*

*Rejane: E a cor representa o nível.*

*Diogo: O desenho do roxo é o mesmo desenho do verde, mas em menor proporção.*

*Rejane: E vocês sabem me dizer que proporção é essa?*

*Mariana: Tamanho.*

*Rejane: Certo, mas quantas vezes menor?*

*Mariana: Um quarto (1/4).*

*Rejane: O quadrado roxo é 1/4 menor (que o quadrado verde)?*

*Mariana: É.*

Em trechos dos diálogos ocorrido ao longo da atividade, como na fala acima de Diogo, fica claro que ao se dedicarem à compreensão do Padrão Fractal, a visualização ganhou destaque e permitiu que as propriedades geométricas de autossimilaridade e complexidade infinita fossem observadas ainda que não formalizadas.

Depois desse diálogo, as alunas registraram as observações da questão 4 (Figura 6).

4. Após essa discussão, o que você acrescentaria nas considerações anteriores? Registre nas linhas abaixo essas novas observações.

*O lado do quadrado roxo, comparado com o verde, é 1/4 menor.*

Figura 6. Questão 4 realizada pela dupla Mariana e Gisele (Faria, 2012).

Ao compartilhar suas observações com os demais colegas, a dupla registrou o que ainda não haviam observado. Este momento de compartilhamento foi necessário para que o maior número possível de informações daquele Padrão Fractal fosse extraída.

Na quinta questão (Figura 7), Mariana lê o enunciado e afirma para Gisele que no nível 0 haverá 8 quadrados.

5. De quantos quadrados o nível 0 do fractal Lunda-design é composto?

*8 quadrados.*

Figura 7. Questão 5 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012).



Na sexta questão (Figura 8), as alunas conversam:

Mariana: No nível 1, quantos quadrados serão inseridos em cada quadrado do nível zero... Oito! Quantos foram inseridos em cada quadrado?

Gisele: É pra somar tudo (todos os quadrados do nível 1) ou é em cada?

Mariana: Em cada quadrado. São oito.

6. No nível 1 deste fractal, quantos quadrados foram inseridos em cada quadrado do nível 0, para obter-se uma figura autossemelhante?

8 quadrados.

Figura 8. Questão 6 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012).

O diálogo prossegue sobre a questão 7:

Mariana: Agora na 7 ela quer saber no nível 2. Vai ser oito vezes oito vezes oito ( $8 \times 8 \times 8$ ). Você entendeu por quê? No nível zero tem oito quadrados. Já no nível 1, são oito em um, então são oito vezes oito ( $8 \times 8$ ). E no (nível) 3 vai ser oito vezes oito vezes oito ( $8 \times 8 \times 8$ ). Entendeu?

Após essa conversa, as alunas fazem as contas na computador, e registram que no nível 2 haveria 512 quadrados (Figura 9).

7. Mesmo sem desenhar este fractal no nível 2, qual deve ser o raciocínio para saber quantos quadrados haveria neste nível? Discuta com sua dupla e registre abaixo o que vocês pensaram.

$n_0 = 8 \rightarrow n_0 = 8^1$

$n_1 = 8 \cdot 8 \rightarrow n_1 = 8^2$

$n_2 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \rightarrow n_2 = 8^3$

Haveria 512 quadrados neste nível.

Figura 9. Questão 7 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012).

Na oitava questão, os alunos comentaram que para formar o nível 2, bastava inserir oito quadrados no nível 1 (Figura 10).

8. Agora discuta com os demais colegas a forma que vocês acharam de calcular a quantidade de quadrados do nível 2. Após a discussão, registre abaixo o que você acrescentaria nas considerações anteriores.

Colocar 8 quadrados em cada quadrado do nível anterior. (oito)

Figura 10. Questão 8 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012).

Em seguida, as alunas fizeram a questão 9, que pedia que calculassem quantos quadrados teria o fractal no nível 3, e registraram que haveria  $8^4$  quadrados nesse nível, e com a calculadora do computador, calcularam essa potência e viram que o resultado era 4096 (Figura 11).

9. Utilize o mesmo raciocínio para prever quantos quadrados haverá no fractal no nível 3, e registre abaixo essa quantidade.

$n_3 = 8^4$

$n_3 = 4096$

Figura 11. Questão 9 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012)

Até a nona questão Mariana e Gisele estavam empenhadas na Procura do Padrão. As alunas procuraram identificar quantos quadrados compunham o fractal nos quatro níveis iniciais, mesmo tendo representado geometricamente apenas os níveis 0 e 1. Analisando o protocolo da construção elas buscaram extrair informações dos dois níveis iniciais e, por meio deles, pensar nos níveis seguintes. Assim, por meio da manipulação e análise, os alunos procuraram o padrão do Lunda-Design.

Na questão seguinte que questionava quantos quadrados haveria no nível  $n$ , a dupla registrou que haveria  $8^{n+1}$  (Figura 12).

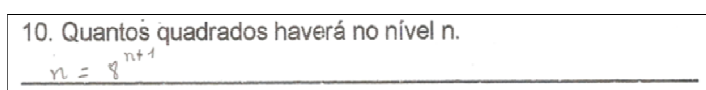


Figura 12. Questão 10 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012)

Nessa décima questão, as alunas passaram pela fase de Reconhecimento do Padrão. Dizemos isso com base em Herbert e Brown (2000), que afirmam que é nesta fase que os alunos buscam representações matemáticas que expressem as observações realizadas com a exploração do padrão. Nessa questão, após diálogos e investigações, a dupla registrou que para saber quantos quadrados haveria em um nível qualquer, bastava elevar o 8 (que é o número que estava sendo multiplicado de nível para nível) a  $n+1$ , ou seja, a um número a mais do que o nível que está sendo procurado.

Na questão seguinte (Figura 13) as alunas registraram que para calcular quantos quadrados haveria no nível  $n+1$ , bastava fazer  $8^{n+2}$ , como podemos observar na fala de Mariana para Gisele:

*Mariana:* No nível  $n+1$  é só fazer oito elevado a  $n+1+1$ , que é oito elevado a  $n+2$  ( $8^{n+1+1} = 8^{n+2}$ ).

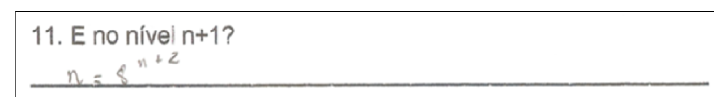


Figura 13. Questão 11 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012)

Encerrando a atividade, as alunas registraram que ao longo dos níveis o número de quadrados do fractal aumenta multiplicando-se o número de quadrados do nível anterior por 8, como podemos ver na figura 14.

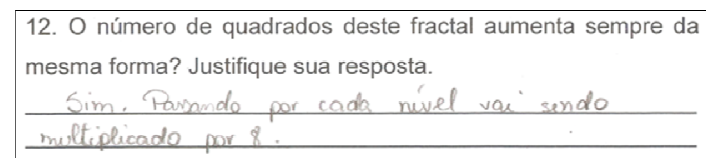


Figura 14. Questão 12 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012)

Assim, nas questões 11 e 12 a dupla atingiu a Generalização segundo Herbert e Brown (2000), pois encontrou uma expressão geral para um nível posterior a um nível qualquer (nível

$n+1$ ), e fez isso retomando a situação inicial, que consistia em inserir oito quadrados dispostos como na figura inicial, dentro de cada quadrado gerado.

A atividade apresentada nesta seção é um exemplo das realizadas em Faria (2012). Nessa atividade, especificamente, os conteúdos matemáticos explorados foram a criação de sequências e de expressões gerais. Por meio dela foi exposta uma reflexão sobre a utilização de Padrões Fractais, por meio de um SGD, ao processo de generalização de conteúdos matemáticos. Finalizando este trabalho, trazemos a próxima seção sintetizando as contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos propiciadas pela exploração e construção de Padrões Fractais no GeoGebra.

### Algumas Considerações

Buscamos, neste artigo, apresentar as inferências e resultados obtidos na análise de dados de Faria (2012). Além do que já foi apresentado ao longo deste trabalho, destacamos alguns pontos que consideramos relevantes nesta última seção.

Primeiramente, destacamos que uma das contribuições de Faria (2012) para a Educação Matemática está relacionada ao estudo dos Padrões Fractais. Este trabalho propôs um olhar específico sobre fractais e padrões, ao considerá-los como Padrões Fractais, um tipo particular de padrão, e também por entender que cada fractal é composto de características correspondentes as que encontramos nos padrões numéricos, geométricos e algébricos.

De forma geral, os Padrões Fractais contribuíram ao processo de generalização de conteúdos matemáticos por possuírem características que possibilitam a exploração de diversos conteúdos matemáticos e nesse processo, de maneira intrínseca, tomam parte propriedades dos fractais que constituem um padrão, entre as quais destacamos a autossimilaridade, que faz com que cada nível de um fractal seja semelhante aos demais, e a complexidade infinita, que diz respeito a infinitude dos processos de iteração. Sendo assim, nos fractais sempre há um padrão, envolvendo um ou mais conceitos matemáticos, a ser buscado, reconhecido e generalizado.

Além disso, os Padrões Fractais possuem a particularidade, se comparado a outros tipos de padrões, de proporcionarem a exploração concomitante não somente das características numéricas e geométricas, mas também de propriedades algébricas.

Cabe destacar que o GeoGebra contribuiu significativamente ao processo de generalização de conteúdos matemáticos, pois atuou durante as três Fases de Investigação de um Padrão. A riqueza do GeoGebra quanto à visualização, construção e manipulação dos fractais em seus diversos níveis, que envolve o dinamismo desse software, permitiu a interação dos alunos com as particularidades que fazem com que o fractal repita infinitamente, ao longo das iterações, sua estrutura inicial. Além disso, este software permitiu a exploração das características de um nível específico e sua comparação com níveis posteriores e anteriores, possibilitando que os demais níveis fossem representados matematicamente.

Especificamente sobre o GeoGebra, a aluna Mariana afirmou: *“Fazer no software, além de não ser trabalhoso, chama atenção do aluno, atrai. Porque mexer no computador é uma coisa atual”*. Ainda sobre o GeoGebra, o aluno Higor afirmou que o GeoGebra o ajudou *“A ter noção das formas, a ter conhecimento. É mais fácil manusear no programa um objeto (como compasso), do que manualmente. E na mão, se errar o cara tem que desmanchar, e no*

*GeoGebra tem a opção de voltar*”. As palavras dos alunos destacam como o GeoGebra atuou durante o processo de exploração dos Padrões Fractais.

Ao longo das atividades, vários conteúdos matemáticos foram abordados, como área de quadrados, comparação entre raios de circunferências e entre segmentos, criação de expressões gerais, frações, uso de tabelas, perímetros, potências, progressões aritméticas e geométricas, sequências e o teorema de Pitágoras. Destacamos que embora os conteúdos matemáticos explorados tenham sido os citados, outros como noção de limite, área de outras figuras geométricas e logaritmos, podem ser explorados nos Padrões Fractais apresentados e em outros também. Além disso, outros tipos de padrões podem ser estudados por meio do GeoGebra, assim como os Padrões Fractais podem ser estudados em outros softwares. Especificamente na construção de Padrões Fractais, muitas são as possibilidades de criação no GeoGebra, com ousadia e criatividade, é possível formar diversos Padrões Fractais.

Finalizando, registramos que este trabalho apresentou um olhar ao processo de generalização de conteúdos matemáticos da perspectiva de um curso baseado em Padrões Fractais. É certo que outros Padrões Fractais, referencial teórico e abordagens podem ser empregados e, portanto, novas pesquisas sobre o processo de generalização de conteúdos matemáticos e sobre os Padrões Fractais podem ser desenvolvidas.

### **Bibliografia e Referências**

- Alrø, H., & Skovsmose, O. (2006). *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Barbosa, R. M. (2002). *Descobrendo a Geometria Fractal – Para a sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.
- Barbosa, R. M. (2000). *Aprendendo com Padrões Mágicos*. Araraquara: Publicações da SBEM – SP, número 1.
- Eberson, R. R. (2004). Um Estudo sobre a construção de Fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Faria, R. W. S. (2012) *Padrões Fractais: Contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.
- Herbert, K. E. , & Brown, R. (2000). Patterns as tools for algebraic reasoning. Reimpresso por Barbara Moses, ed., Algebraic Thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's School – Based Journals and Other Publications. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Santos, J. G. (2008). *Observação e Generalização de Padrões: um tema para a investigação de professores sobre sua própria prática* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica.
- Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2005). *Os Padrões no ensino e aprendizagem de Álgebra*. Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE.
- Vale, I., & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal no currículo. *Revista Educação e Matemática*, 85, nov/dez, 14-20. Portugal.