Mobilização de registros de representação semiótica emtarefas de Cálculo Diferencial e Integral

Paulo César **Oliveira**
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
Brasil
pauloolliveira@ufscar.br
Rogério Fernando **Pires**
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC
Brasil
rfpires25@hotmail.com

Resumo

O presente relato tem por objetivo descreverepisódios de sala de aula cujoprocesso de aprendizagem fundamenta-se na teoria da relaçãocom o saber de Bernard Charlot. Para a análise da produção de informações sobre as atividades matemáticas dos alunos, apoiamos nos aportes teóricos dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. A pesquisa de cunhoqualitativo, contoucom a participação de vinte e sete estudantes do curso de Engenhariaenvolvidos na resolução de duastarefasplanejadas e aplicadas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1. Os resultados obtidoscom o trabalho de campo permitiram responder a seguintequestão de investigação: como se deu a apreensãoconceitual dos alunosenvolvidosemtarefas de Cálculo Diferencial e Integral?A análise dos resultados revelou a importância de considerarmoso tratamento do erro como forma de valorização do proceso de aprendizagem.

Palavras chave: cálculo diferencial e integral, registros de representação semiótica, sequênciadidática, winplot.

Introdução

Ao longo do nosso percurso enquanto docente do Ensino Superior percebemos que nos cursos de Engenharia, muitas vezes existe uma maior preocupação com as operações envolvendo os conteúdos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral do que a construção de saberes relativos aos conceitos desta área de conhecimento. Para nós, este fato tem relação direta com o desempenho, muitas vezes insatisfatórios, por parte dos alunos nessa disciplina.

Para auxiliar os alunos no processo aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, inserimos em nossas aulas a leitura de artigos contendo o planejamento e desenvolvimento de tarefas pertinentes aos conteúdos desenvolvidos em nossas aulas; alguns publicados nas edições do Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE), o qual reserva em cada uma das suas reuniões anuais, um espaço dedicado às discussões inerentes ao processo de ensino-aprendizagem dos seus diversos componentes curriculares.Outra estratégia didático-pedagógica foi a implantação do uso do software livre winplot no decorrer das atividades realizadas pelos alunos.

Selecionamos para este artigo episódios de sala de aula envolvendo a produção de saberes em uma turma de vinte e sete alunos, tomando por base as atividades matemáticas realizadas por eles em duas tarefas propostas. Aprimeira tarefa, planejada a partir da leitura e discussão do artigo de Barros e Meloni (2006), contemplou o cálculo de área delimitada pela curva, o eixo x e um intervalo do mesmo.Já a segunda, foi produzida a partir da sequência didática envolvendo a construção e análise gráfica de uma função, adaptada do artigo de Jesus, Peixoto e Mascarenhas (2002).

Na condição de professores-pesquisadores, a formulação das tarefas teve o propósito de gerar respostas para a seguinte indagação: como se deu a apreensão conceitual dos alunos envolvidos em tarefas de Cálculo Diferencial e Integral?

Na busca de respostas à questão de investigação organizamos a escrita do artigo apresentando a fundamentação teórica, o percurso metodológico e os resultados mediante à análise da produção de informações dos estudantes.

A compreensão no aprendizado de matemática

Em Matemática, somente se pode aprender se compreendemos o enunciado da tarefa proposta, bem como as estratégias para sua resolução. Na perspectiva de Duval (2012) compreender envolve o ponto de vista matemático e cognitivo.

Do ponto de vista matemático, a compreensão inicia-se com a explicação sobre o uso de determinadas propriedades matemáticas que, no decorrer do processo, deve responder à exigência epistemológica de prova que é comum a todo conhecimento científico. Não se trata aqui de demonstrar no senso estrito do termo, mas é necessário argumentar sobre as conjecturas construídas de modo a validá-las ou refutá-las.

Do ponto de vista cognitivo, compreender implica no reconhecimento dos objetos matemáticos representados. Para ocorrer este reconhecimento, a compreensão é guiada pelo modo de acesso aos objetos matemáticos. O acesso a estes objetos se faz pela produção de diferentes registros de representação semiótica, as quais não podem ser confundidas com os objetos que eles representam (Duval, 2009). Outro detalhe é o fato de termos a possibilidade de pelo menos dois registros de representação semiótica distintos serem associadas a um mesmo objeto, o que constitui o problema crucial da compreensão no aprendizado da matemática (Duval, 2012).

Ser capaz de reconhecer o mesmo objeto em pelo menos dois registros diferentes de representação semiótica possibilita a conversão de registros quando necessário.Esta conversãoé uma transformação de registros em que se alteram a forma de apresentar o conteúdo, conservando a referência ao mesmo objeto. A representação geométrica de uma reta pode ser representada na forma de um registro algébrico $y = ax + b$, com “a” e “b” números reais.

Além deste tipo de transformação dos registros de representação semiótica há também o tratamento, o qual constitui numa transformação estritamente interna ao registro, sendo muitos destes específicos de cada objeto. Como exemplo, podemos citar que no cálculo do limite de uma função escrita na forma de quociente; aplicamos processos de fatoração para obter expressões algébricas mais simples, com a finalidade de eliminar a indeterminação, o que permite determinar o seu valor.

Em síntese, Duval (2012) argumentou que a atividade matemática comporta duas faces. Uma delas é matemática, centrada nos objetos, no processo lógico-dedutivo, que leva à decomposição dos conteúdos matemáticos a ensinar. A outra face é cognitiva, inversa da matemática; pois não se decompõe em conteúdos, mas em atitudes intelectuais (maneira de olhar, de raciocinar, de explorar o objeto matemático na mobilização de diferentes representações). Atitudes desta natureza é que possibilitam aos alunos a capacidade de compreender e de saber utilizar conhecimentos matemáticos para resolver problemas.

A relação com o saber

Em nosso cenário, a sala de aula, estamos contemplando o professor, o aluno e o saber sob a ótica da Didática, em especial, da matemática, como a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem por parte de um sujeito (D`Amore, 2007). O termo condições tem sido tratado em nossas pesquisas como a relação que o sujeito (aluno) estabelece com o saber nas interações com os colegas e com o professor.

Bernard Charlot,em entrevista para Souza (2011, p. 17), afirmou que “a relação com o saber é a relação com lugares, pessoas, atividades, etc., em que se aprende”. Esta relação é singular e externalizada por meio de representações:“argumentação, verificação, experimentação, vontade de demonstrar, provar, validar” (Charlot, 2000, p.60). No caso do objeto matemático o mesmo não é perceptível, mas seu acesso se dá por meio de registros de representação semiótica.Neste sentido, temos incluído o software winplot em nossas aulas de Cálculo Diferencial e integral, por conta do nosso interesse sobre as relações que o estudante pode estabelecer com a tecnologia e com seus pares.

Delineamento metodológico

Dada à natureza da questão de investigação, optamos pela pesquisa qualitativa, a qual pressupõe uma produção descritiva de informações em função do interesse do pesquisador na compreensão do significado que os participantes atribuem às suas experiências (Ponte, 2006). Neste sentido, a partir da formulação de duas tarefas matemáticas, utilizamos três instrumentos para a constituição do repertório de informações para análise: imagens geradas pelo software winplot, registros escritos da resolução dos estudantes e fragmentos de intervenções realizadas pelos pesquisadores.

O enunciado das tarefas envolveu sequências didáticas que, segundo Almouloud (2007) é uma atividade de ensino cuja finalidade para uma pesquisa é o seu processo experimental, ou seja, o conjunto de etapas delineadas pela elaboração, aplicação, produção e análise das informações.

A construção da sequência didática para a primeira tarefadeu-se a partir da metáfora descrita a seguir por Barros e Meloni (2006, p.741): “a metáfora dividir para conquistar é baseada numa tática de guerra do imperador romano Júlio César, que mandava espiões para semear discórdia nos países a serem conquistados, enfraquecendo-os. A ideia básica desta abordagem é a seguinte: um problema difícil é por vezes divisível num conjunto de problemas cuja resolução é relativamente fácil. Para tanto, podemos primeiramente dividir o problema em subproblemas (menores), em seguida resolver estas novas instâncias e, finalmente, intercalar os resultados desses subproblemas para achar a solução do problema principal, ou seja, dividir para alcançar o todo (conquistar o todo)".

Inspirados nessa metáfora, elaboramoso enunciado da tarefa envolvendo um problema subdividido em problemas menores, cujas resoluções possibilitaram a resolução do problema inicial:

Tarefa 1: Metáfora dividir para CONQUISTAR

Em termos matemáticos considere f(x) = $-x^2 + 4$ definida no intervalo [-1, 2]:

1. Utilize o Winplot para calcular a área entre a curva e o eixo "x". Selecione "Visualizar" para ver os retângulos construídos ao longo dos subintervalos.
2. A partir desta representação gráfica fracione o intervalo [-1, 2] de forma que cada retângulo tenha largura igual a 0,5. Determine a medida da área entre a curva e o eixo "x".
3. Agora utilize retângulos com largura igual a 0,25 a partir da fração do intervalo [-1, 2]. Determine a medida da área entre a curva e o eixo "x".
4. Se continuarmos dividindo a atividade original em subproblemas, o que podemos afirmar sobre a medida da referida área, ao passo que os retângulos ficam com cada vez mais estreitos em sua largura?

O enunciado da segundo tarefa foi uma adaptação da propostafeita por Jesus, Peixoto e Mascarenhas (2002) e ganhou a seguinte formulação:

Tarefa 2: Construa o gráfico da função f(x) = x.sen$\left(1/x\right)$ e utilize-o na análise de cada item a seguir:

a) como podemos apresentar o conjunto domínio?

b) a medida que "x" se aproxima cada vez mais de zero, o que ocorre com o produto x.sen $\left(1/x\right)$?

c) a medida que ocorre um distanciamento cada vez maior dos valores de "x" em relação ao zero, o que ocorre com o produto de x.sen$\left(1/x\right)$?

d) como podemos apresentar o conjunto imagem?

e) é pertinente associarmos assíntotas a esta representação gráfica?

Na próxima seção destacamos produções de informações geradas por grupos de estudantes pertencentes a uma turma com 27 alunos, no decorrer do desenvolvimento de suas atividades matemáticas. Os alunos foram orientados no momento da apresentação das tarefas sobre a importância de preservar o raciocínio expressos por diferentes formas de registros e, portanto, estavam cientes do papel de protagonistas nesse cenário de pesquisa. Por isso, tivemos oportunidade de acesso tanto aos registros escritos por meio de lápis e papel, quanto aos registros plotados na tela do computador.

A produção e análise das informações

O processo de resolução da 1ª tarefa iniciou-se com a apresentação da figura 1, construída por um grupo de 4 estudantes, relativa ao valor da área compreendida entre a curva $f(x) = -x^2 +4$ e o eixo x, definido no intervalo [-1, 2]. Através da utilização do winplot foi gerado o valor 9 unidades de área, bem como a visualização de 24 sub-intervalos no item a.

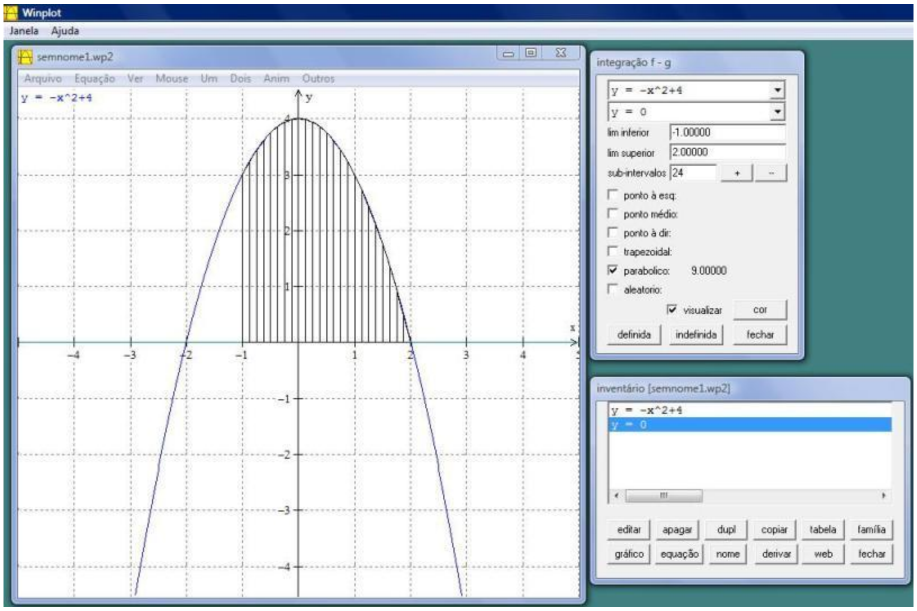


Figura 1. Tela do Winplot para cálculo de área.

Para os itens b e c a estratégia de resolução foi desenvolvida em duas etapas. A primeira levou em conta o cálculo feito “a mão”. Já na segunda etapa, buscou-se sistematizar os passos desenvolvidos na primeira etapa no winplot; os quais estão descritos a seguir:

1. Considerou a largura proposta para cada conjunto de retângulos e verificou a quantidade deles no intervalo [-1,2];
2. Identificado os valores de “x” como extremos das bases dos retângulos, foi calculado os valores correspondentes às imagens (altura de cada retângulo) na função $f(x)=-x^2+4$.
3. Para cada retângulo estabeleceu-se o valor correspondente à área.
4. A soma das áreas representou o valor aproximado para a referida integral.

Especificamente, em relação ao item b, apresentamos o protocolo de resolução (figura 2) e a respectiva imagem gerada pelo software (figura 3), tendo em vista a partição do intervalo [-1,2] em sub-intervalos de dimensão igual a 0,5:

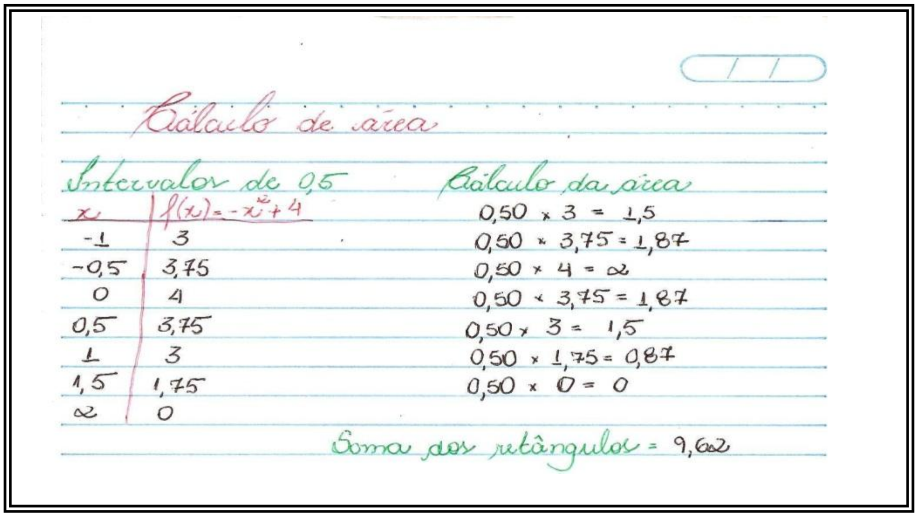


Figura 2. Cálculo aproximado da área a partir de seis subintervalos.

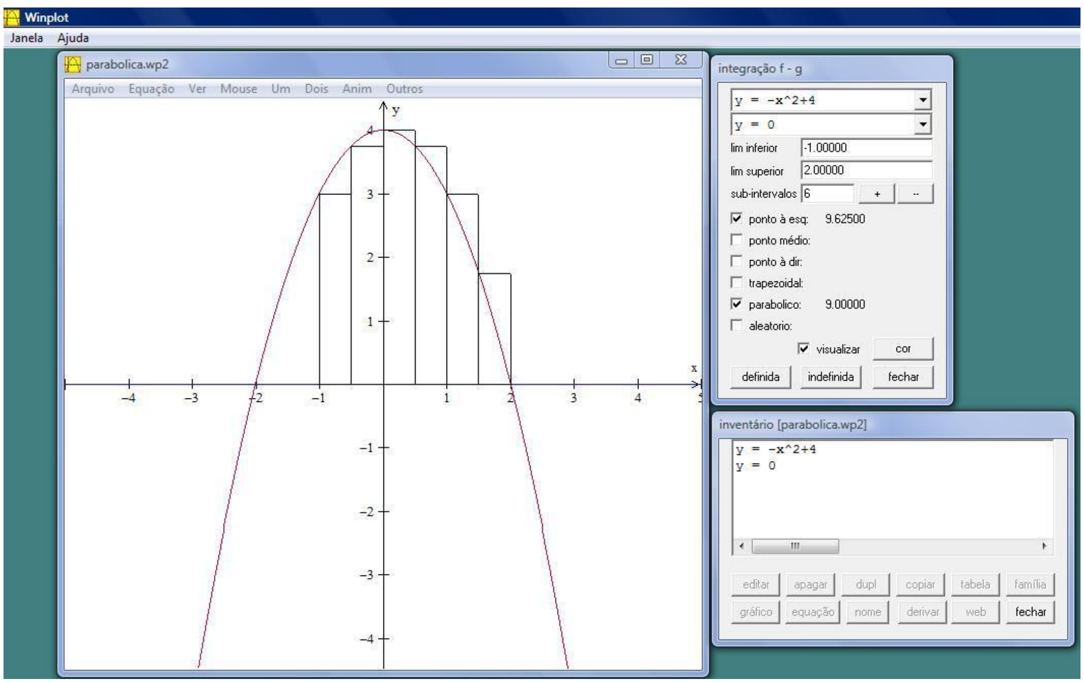
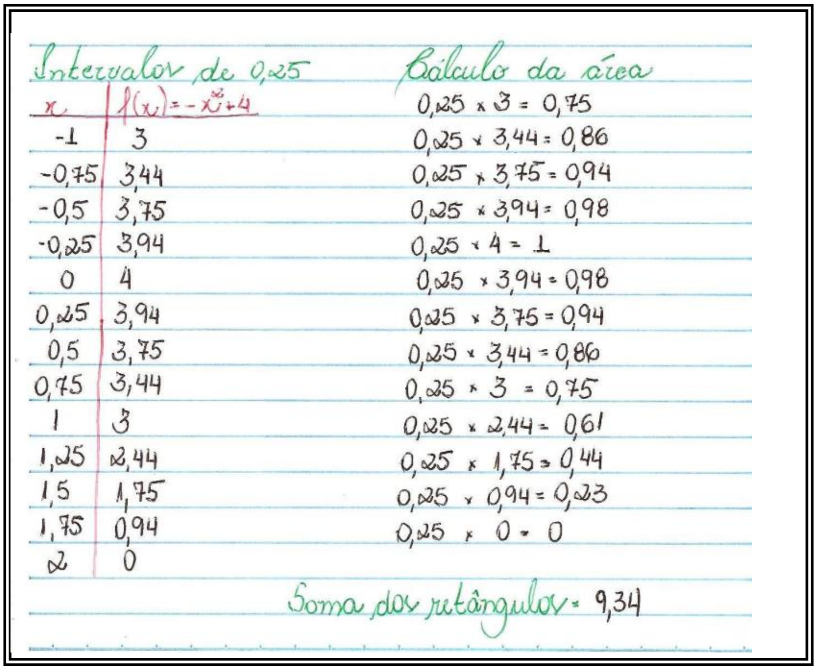


Figura 3. Tela do winplot com cálculo aproximado de área.

Ao compararmos as figuras 2 e 3 observamos uma convergência no valor aproximado da área em questão, com uma diferença de 0,005.

Em relação ao item c, a partição do intervalo [-1, 2] em subintervalos de dimensão igual a 0,25 gerou o dobro de retângulos, ou seja, de 6 para 12. O protocolo de resolução está na figura 4 e a respectiva imagem gerada pelo software na figura 5.



Intervalor de 0,25 — Cálculo da área

x	$f(x) = -x^2+4$	Cálculo da área
-1	3	0,25 x 3 = 0,75
-0,75	3,44	0,25 x 3,44 = 0,86
-0,5	3,75	0,25 x 3,75 = 0,94
-0,25	3,94	0,25 x 3,94 = 0,98
0	4	0,25 x 4 = 1
0,25	3,94	0,25 x 3,94 = 0,98
0,5	3,75	0,25 x 3,75 = 0,94
0,75	3,44	0,25 x 3,44 = 0,86
1	3	0,25 x 3 = 0,75
1,25	2,44	0,25 x 2,44 = 0,61
1,5	1,75	0,25 x 1,75 = 0,44
1,75	0,94	0,25 x 0,94 = 0,23
2	0	0,25 x 0 = 0

Soma dos retângulos = 9,34

Figura 4. Cálculo aproximado da área a partir de doze subintervalos.

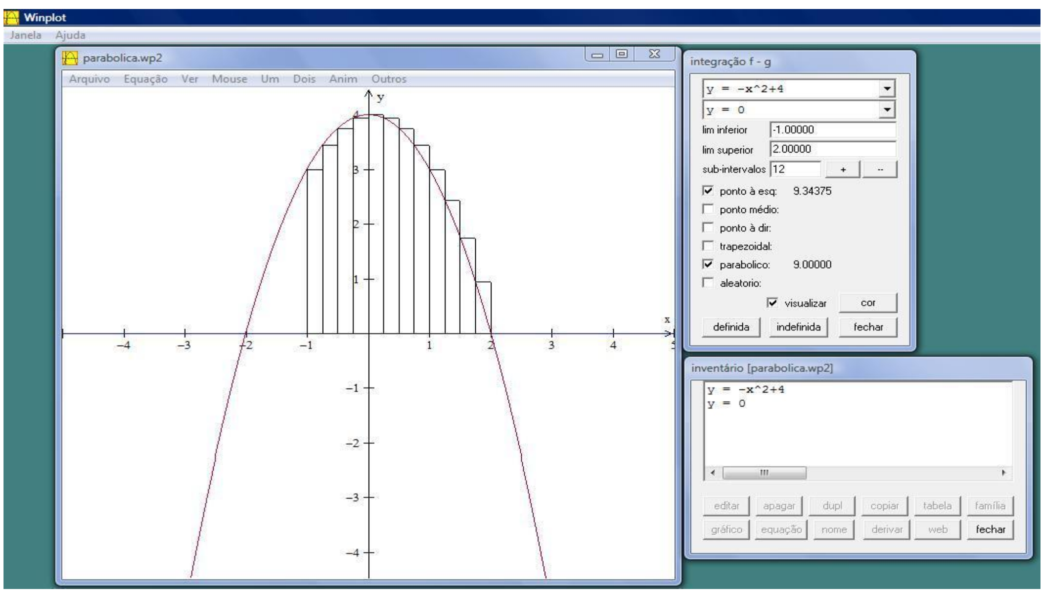


Figura 5. Tela do winplot com cálculo aproximado de área a partir de 12 subintervalos.

Ao compararmos a figura 4 e 5 observamos uma convergência no valor aproximado da área em questão, com uma diferença de 0,00375.

Na continuidade do processo de partição do intervalo [-1, 2], o estudante Ivan expos: “à medida que os subintervalos (retângulos) ficam cada vez mais estreitos, o limite da área tende a 9, ou seja, se com os retângulos subdivididos com intervalos de 0,5 em sua soma obtivemos 9,62; quanto mais subdivididos estes retângulos estiverem, a soma será um resultado cada vez mais próximo de 9. No gráfico, isto ocorre devido que os retângulos, cada vez mais estreitos, preencherem melhor o espaço entre (-1) e 2, eliminando as sobras à direita do eixo y ou faltas das áreas à esquerda do mesmo eixo, em relação à curva, conforme podemos ver nas figuras a seguir".

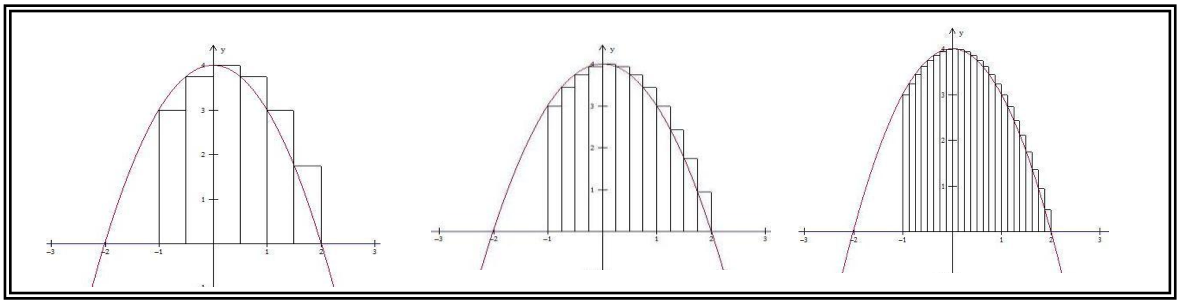


Figura 5. Apresentação dos subintervalos iguais a 0,5; 0,25 e 0,125 conforme comentado por Ivan

No decorrer da realização da sequência didática os estudantes transitaram da metáfora proposta por Barros e Meloni (2006) para uma estratégia de partição do intervalo [-1,2] com o auxílio do software winplot; ou seja, a área delimitada pela curva e o eixo x foi sendo ocupada por um conjunto de retângulos, cujo cálculo da área é mais simples.

No decorrer das etapas de resolução a utilização de retângulos com base cada vez mais estreita e, consequentemente em maior número, possibilitou aos estudantes, por um lado, visualizar o processo de otimização do preenchimento do espaço delimitado pela curva, o eixo x e o intervalo [-1, 2]. Por outro lado, o processo de partição de cada retângulo reduzindo o valor da sua nova base à metade do valor anterior permitiu a compreensão de que o cálculo da medida da área de uma figura não convencional pode ser expresso algebricamente como um limite de função.

Nas diversas figuras descritas houve tanto a articulação de registros de representação semiótica interno a um mesmo tipo de registro (tratamento), quanto entre registros (conversão). Em termos de tratamento tanto as diferentes representações gráficas nas figuras 1, 3, 5 e 6, quanto às representações em tabelas, no caso, as figuras 2 e 4.

Com relação as transformações de registros de representação semiótica na modalidade de conversão temos os pares de figuras que associam tabelas e gráficos como formas de representação para a construção intuitiva do conceito de integral.

Na perspectiva de Duval (2009; 2012), esta mobilização e coordenação de registros de representação semiótica foi fundamental para a aprendizagem intuitiva do conceito de integral como limite de função, numa perspectiva geométrica.

Com relação à segunda tarefa, para a análise de cada um dos seus itens, recorremos aos registros escritos e entrevista sobre a atividade matemática desenvolvida por um grupo de 3 estudantes. O "fazer" matemática na concepção de Duval (2012) relacionou a maneira de raciocinar e ver o problema.

A seguir apresentamos um registro escrito deste "fazer":

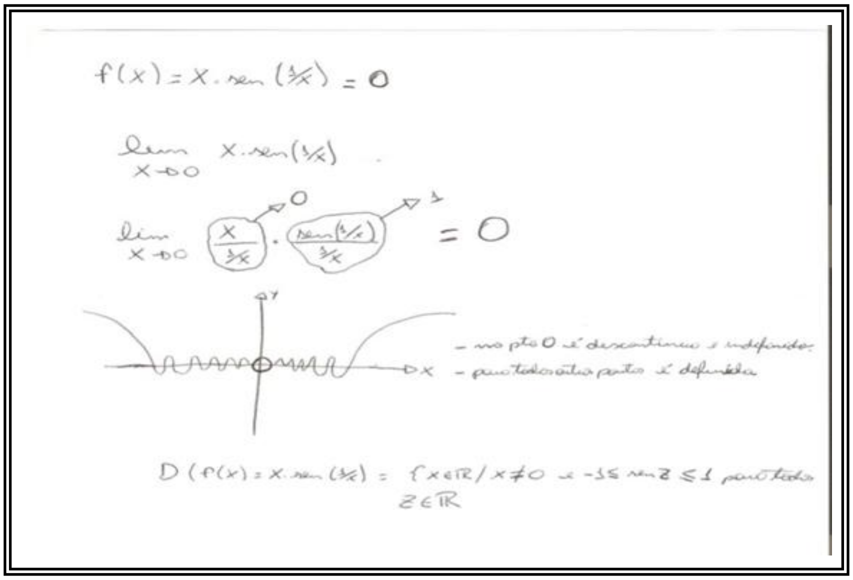


Figura 7. Resolução parcial da tarefa 2.

Com base no conteúdo da figura 7 intervimos por meio de indagações para analisarmos o teor das respostas de cada um dos cinco itens propostos:

a) $D(f(x)) = IR^{*}$ ou $\{x \in IR/x \neq 0\}$

b) O produto x.sen$\left(1/x\right)$ também tende a zero.

c) Tende a 1

d) Im (f(x)) = $\{y \in IR/y<1,\ y \rangle -0{,}2 \text{ e } y \neq 0\}$

e) Sim, elas vão ser paralelas ao eixo x, horizontal, no ponto y = 1 e y = - 0,2.

A análise das respostas revelaram erros nos três últimos itens. Na perspectiva de Duval (2012),estes erros classificados de transitórios, ou seja, são diretamente ligados a uma noção ou a um processo matemático particular. Era desejável que os alunos utilizassem o Teorema do Confronto ao invés do Limite Trigonométrico Fundamental.

Mediante a este diagnóstico houve a necessidade de intervenção do professor-pesquisador no processo de compreensão desses alunos. Primeiramente, resgatamos o seguinte registro do protocolo (figura 7): $-1 \leq \mathrm{sen}z \leq 1$. Pedimos que os alunos explicassem o conteúdo do registro escrito: “z representa a função $\left(1/x\right)$; então sen$\left(1/x\right)$ varia entre 1 e (-1)”. Na leitura deste registro os alunos perceberem o erro cometido no item “c”.

Para refletirmos sobre os erros cometidos no item “d” e “e”, sugerimos a construção de um gráfico gerado no software winplot e uma tabela (figura 8) correspondente ao intervalo [-5, 5], estabelecido a partir do domínio da função f(x) = x.sen$\left(1/x\right)$.

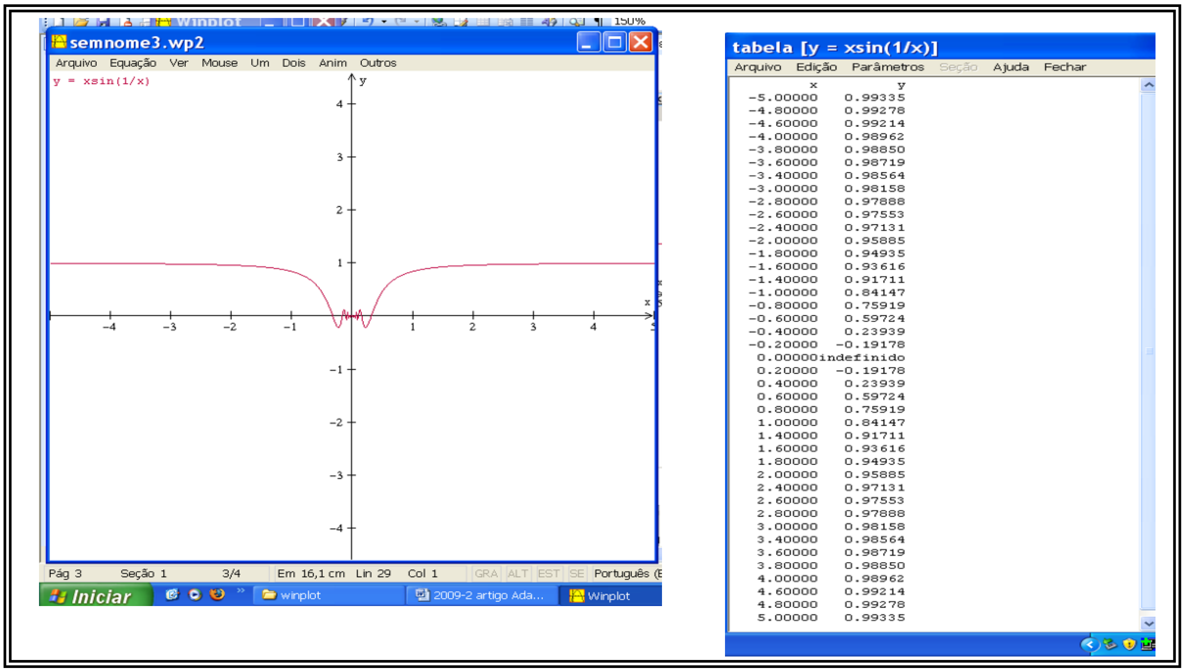


Figura 8. Gráfico e tabela gerados pelo winplot.

A tabela da figura 8 permitiu aos alunos validarem a conjectura de que y = x.sen $\left(1/_x\right)$ oscila de (-1) até 1 levando em conta o domínio da função, o que caracterizou corretamente o intervalo da imagem de f(x). Esta atitude intelectual dos estudantes, manifestada pela exploração do objeto matemático a partir da conversão e coordenação do registro gráfico e figural (tabela), possibilitou aos alunos a capacidade de compreender e de saber o que foi feito de errado na resposta do item “d”.

Em relação ao item “e”, o professor-pesquisador questionou esse grupo de estudantes sobre o conceito de assíntota para que a partir do gráfico da figura 8, pudessem validar a conjectura de que a função f(x)= xsin(1/x) oscila indefinidamente entre (-x) e (x).

Pelo Teorema do Confronto, os alunos construiram a desigualdade $-x \leq xsen\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$. Em seguida, designaram f(x)=-x e h(x)=x. Aplicaram os limites de função para f(x) e h(x) para x tendendo a zero e observaram que seus resultados tendem a zero. Finalizaram, concluíram que $\lim_{x\to 0} x.sen(1/_x) = 0$.

Nesta tarefa, o grupo de estudantes mobilizou registros de representações semióticas de natureza algébrica e gráfica (figura 7). Porém, ao complementá-los com o auxílio do winplot (figura 8), a compreensão do objeto matemático tornou-se mais acessível. A intervenção do professor-pesquisador em resgatar o conceito de assíntota foi um passo importante para motivar a revisão das atitudes intelectuais dos alunos, ou seja, que a aplicação do Teorema Fundamental da Trigonometria no item “e” foi inconsistente frente à mobilização dos registros de representação semiótica.

A funcionalidade do software winplot na atividade matemática da tarefa 2 ressaltou a concordância que temos em relação a Guimarães (2002, p.3) ao afirmar que o uso dos softwares matemáticos agiliza processos algébricos, e por exemplo, pode proporcionar atividades de reflexão, como mudanças de parâmetros das funções, além de permitir visualização gráfica. Podem proporcionar um ambiente de investigação por parte dos alunos, e não simplesmente uma forma ágil de obter respostas.

Ao refletir como se deu o processo de desenvolvimento das atividades matemáticas dos alunos, pudemos perceber que as tarefas propostas tornaram-semomentos de investigação, nos quais os estudantes se deparavam com problemas para serem resolvidos. A subdivisão dos mesmos, em problemas menores, foi uma estratégia pedagógica que motivou os estudantes na observação de propriedades, no estabelecimento de relações, possibilitando a aprendizagem pela compreensão dos enunciados das tarefas propostas, sob o ponto de vista matemático e cognitivo.

Do ponto de vista matemático, exploramos com os estudantes o processo lógico-dedutivo por meio da avaliação de conjecturas necessárias à aprendizagem do conceito de área (tarefa 1), do conceito de assíntota e da aplicabilidade do Teorema do Confronto, ambos presentes na tarefa 2.

Do ponto devista cognitivo, instigamos a mobilização e coordenação de registros de representação semiótica distintos, necessários ao acesso dos objetos matemáticos, no caso, os referidos conceitos em questão.

Este cenário de investigação ressaltou como resultado de pesquisa que os pontos de vista matemático e cognitivo, embora inversos sob a perspectiva de Duval (2012), não são excludentes; pelo contrário, são inter-relacionados no processo da aprendizagem.A inter-relação ocorreu pelo fato de que a apreensão conceitual no contexto do Cálculo Diferencial e Integral se fez pela mobilização e coordenação de diversos registros de representação algébrico, geométrico, tabela e gráfico.

Considerações finais

Quando lecionamos Cálculo Diferencial e Integral, temos a preocupação com o desempenho não satisfatório de uma quantidade significativa de alunos. Neste relato de pesquisa apresentamos um cenário de investigação com o objetivo de analisar a apreensão conceitual dos alunos envolvidos em duas tarefas.

Na primeira, os estudantes foram capazes de produzir saberes envolvendo o conceito de área de uma figura bidimensional via limite de função. Esta apreensão conceitual, em um primeiro momento,articulou o registro algébrico, gráfico eo figural (partições de uma curva a partir da construção de retângulos), todos apresentados na tela do winplot. Em um segundo momento, a construção de subproblemas (problemas menores) fez com que os alunos registrassem em uma tabela os cálculos feitos com o auxílio de lápis e papel. Apoiados neste registro,os alunos utilizaramoutro registro (numérico) para estabelecer o cálculo da área relativa a cada retângulo e, consequentemente, do conjunto de retângulos.

Para cada subproblema recorreram à visualização gráfica proporcionada pelo winplot com o objetivo de avaliar a convergência no cálculo da área requerida. O fato de que a cada nova convergência, a diferença entre os cálculos das áreas foi ficando cada vez menor permitiu aos alunos utilizarem o registro da língua natural para sistematizar intuitivamente o conceito de integral na perspectiva geométrica.

Na segunda tarefa a apreensão conceitual por parte dos alunos ocorreu com a valorização dos seus erros cometidos, no sentido de servirem de base para o processo aprendizagem. Recorremos ao registro gráfico e de tabela, gerados no winplot, para que os alunos pudessem confrontar com os seus registros algébricos e, rever os erros produzidos.

A visualização gráfica da tarefa permitiu aos alunos a coordenação dos registros de representação semiótica mobilizados na atividade matemática da tarefa 2. Esta coordenação não se fez de forma direta, pois a aplicabilidade correta do Teorema do Confronto só foi possível quando os alunos compreenderam sobre a importância do conceito de assíntota. Na representação gráfica produzida no winplot, não foi inclusa as assíntotas, comprometendo a realização correta da tarefa. Porém, a intervenção do professor-pesquisador foi de suma importância para atenuar os erros transitórios.

Referências e bibliografia

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática.* Paraná: Editora UFPR.

Barros, R. M., & Meloni, L. G. P. (2006). O processo de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral por meio de metáforas e recurso multimídias. In *34º Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, COBENGE* (pp.733-774). Passo Fundo: Editora da Universidade de Passo Fundo

Charlot, B. (2000). *Da relação com o saber: elementos para uma teoria*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

D'amore, B. (2007). *Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino*. *Bolema, 20*(28), 1179-1205. Rio Claro,

Duval, R. (2009). S*emiósis e pensamento humano: Registro semiótico e aprendizagens intelectuais.* Tradução Lênio Fernandes e Marisa Rosani Abreu da Silveira. São Paulo: Editora da Livraria da Física.

Duval, R. (2012). Quais teorías e métodos para pesquisa sobre o ensino da matemática? Praxis Educativa, *2*(7), 305-330. Ponta Grossa.

Guimarães, O. L. (2002). Cálculo Diferencial e Integral: do algebrismo às representações múltiplas. In *25ª Reunião Anual da ANPED* (p. 16). Caxambu.

Jesus, A. R., Peixoto, A., & Mascarenhas, M. (2002). Visualizando funções: Familias de gráficos, retas tangentes e áreas de figuras planas com a utilização de software livre. In I *Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Salvador: Sociedade Brasileira de Matemática* (p. 33).

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em Educação Matemática. *Bolema, 19*(25), 105-132. Rio Claro.

Souza, H. B. M. (2011). Professores, Alunos, Escola, Saber – relações atravessadas pela contradição: entrevista com Bernard Charlot. *Cadernos de Educação, 39,*15-35. Pelotas,