Errores algebraicos que cometen los profesores en formación

Ana María **Martínez** Blancarte

Egresada del CINVESTAV I. P. N.

Estado de México. México, D. F.

anismaba@hotmail.com

Marleny **Hernández** Escobar

Egresada del CINVESTAV I. P. N.

México, D.F.

marlenylesly@hotmail.com

Resumen

La asignatura de matemáticas a lo largo de la historia ha presentado una dificultad importante a los estudiantes de todas las edades escolares. En particular en este trabajo nos enfocamos al álgebra. A continuación mostramos algunos errores algebraicos detectados en estudiantes normalistas del quinto semestre de la Licenciatura de Matemáticas de la Escuela Normal Superior de México. La investigación se realizó mediante la aplicación de un cuestionario de treinta y dos reactivos, los cuales tuvieron como objetivo detectar y analizar los errores cometidos por los normalistas de acuerdo a la clasificación de errores algebraicos de estudiantes de secundaria propuesta por Marilyn Matz. Podemos mencionar que el conocimiento algebraico de los normalistas presenta dificultades importantes que causan una preocupación en nosotras (como investigadoras) por fortalecer los conocimientos especializados de esta rama de las matemáticas.

Palabras clave: álgebra, errores, extrapolación, linealidad, Matz, y profesores en formación**.**

El antecedente previo de los alumnos al iniciar su trabajo con álgebra, realmente es nulo,dado que en la enseñanza primaria se tiene un acercamiento a las letras cuando se trabajan las fórmulas geométricas; pero realmente no se le da el enfoque algebraico necesario (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005), es decir, sólo se le enseña al estudiante a tratar esas letras como etiquetas que se refieren a entidades específicas o a la inicial de una palabra; sin la introducción a un álgebra temprana.

Ursini *et al*, 2005 detectan que en la enseñanza del algebra escolar, en particular en la escuela secundaria surgen con mayor frecuencia las letras y se espera que los estudiantes aprendan a interpretarlas como números generales, incógnitas o como una función, dependiendo de la expresión o la situación en la que aparecen. Por lo anterior, los estudiantes al enfrentarse a las situaciones algebraicas, ponen en juego su conocimiento aritmético previo, el cual en ocasiones, les impide asimilar la transición que se presenta al pasar de la aritmética al álgebra; ocasionándoles dificultades.

De acuerdo con Matz (1982), dichas dificultades se deben a que los estudiantes no asimilan los cambios conceptuales en el paso de la aritmética al álgebra, por lo anterior, en ocasiones, se ven forzados a resolver una nueva situación con lo que saben, cometiendo así errores generados por una elección incorrecta de una técnica de extrapolación.

Matz (1982) menciona que los errores algebraicos se pueden clasificar en tres categorías:

1. Errores generados por una elección incorrecta de una técnica de extrapolación.
2. Errores que reflejan un conocimiento básico pobre, aunque correcto.
3. Errores que surgen durante la ejecución de un procedimiento.

A continuación, describiremos únicamente los errores que tienen que ver con la extrapolación ya que es el punto de interés del presente trabajo, debido a que existen técnicas que pueden desempeñar un papel importante para poder explicar la respuesta correcta o incorrecta al resolver un problema.

Las dos técnicas de extrapolación que ponen en juego los alumnos al resolver situaciones algebraicas son la linealidad y la generalización, ambas las describimos a continuación:

La linealidad: sucede cuando el estudiante al trabajar con un objeto, lo descompone y trata de manera independiente cada una de sus partes. La mayoría de la experiencia previa de los alumnos es compatible con la hipótesis de la linealidad debido a que en la aritmética, la inmensa cantidad de ocasiones, los estudiantes agregan y utilizan la ley de la distributividad que muy probablemente refuerza la aceptación de la linealidad.

Los errores de extrapolación lineal se clasifican en errores de distribución generalizada, de aplicación repetida y en los de la regla de reconocimiento. La descripción de cada uno se muestra a continuación:

- Distribución generalizada: surge cuando una expresión algebraica compuesta se descompone de forma lineal mediante la distribución de su operador de nivel superior a través de la expresión de sus partes.

- Aplicación repetida: los términos adicionales tienen la misma forma que el término prototípico, es decir, si los términos adicionales no son de la misma forma, entonces algunos estudiantes aplican la regla sólo a los términos que coinciden, dejando a los términos adiciones tal cual están, aplicando la norma de forma selectiva.

- En la regla de reconocimiento: el análisis superficial de un prototipo puede llevar a la formulación de una norma inexacta.

Suceden cuando el libro de texto o el mismo profesor presentan ejemplos que el estudiante no entiende por lo que inventan una regla que explique cómo funciona el ejemplo.

La generalización: los estudiantes utilizan un puente entre las reglas conocidas y los conocimientos nuevos, generalizan reglas a partir de una regla conocida u optan por otras bajo la suposición de la aplicación.

Hay mayor necesidad de generalizar sobre los números que sobre los operadores, debido a que el álgebra es en sí misma, es una abstracción de la aritmética.

Por todo lo anterior, surgió en nosotras el interés por indagar si los futuros profesores también tienen dificultades de extrapolación al resolver situaciones algebraicas e identificar cuáles son las más persistentes. Tener un acercamiento al conocimiento matemático sobre la resolución de situaciones algebraicas de los futuros profesores nos podría indicar el por qué el conocimiento de los estudiantes se encuentra en determinado nivel y cómo mejorarlo.

Método

La investigación se llevó a cabo en la Escuela Normal Superior de México con diecinueve normalistas del quinto semestre de la Licenciatura en Educación Secundaria en el área de Matemáticas.

El instrumento metodológico que se empleó para recabar la información fue un cuestionario de treinta y dos reactivos en el cual se identificaron los errores que cometieron los normalistas en el manejo de ejercicios algebraicos.

Para organizar los resultados, retomamos la clasificación de los errores algebraicos de Matz (1982), la cual establece las siguientes tres categorías:

- Errores generados por una selección incorrecta de una técnica de extrapolación.
- Errores que reflejan un conocimiento básico pobre, aunque correcto.
- Errores que surgen durante la ejecución de un procedimiento.

Resultados y discusión

Comenzaremos por presentar un concentrado con las respuestas que cada uno de los normalista emitieron a las situaciones algebraicas de linealidad que se les plantearon.

ALUMNOS /EJERCICIOS	10 $\sqrt{A+B}=$	16 $2^{a+b}=$	18 Simplificar $\frac{Ax+By}{x+y}=$	29 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$ R=
1	$A^{½}+B^{½}$	$(2^a)(2^b)$	A+B	$R_1+R_2+R_3$
2	$(A+B)^{½}$	2^a+2^b	Ax+By/x+y	$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$
3	$\sqrt{A}+\sqrt{B}$	$(2^a)(2^b)$	Ax+By/x+y	$\frac{R_1+R_2+R_3}{R}$
4	$(A+B)^{½}$	2^a+2^b	$\frac{Ax}{x+y}+\frac{By}{x+y}$	$\frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}$
5	$\sqrt{A}+\sqrt{B}$	2^a+2^b	A+B	$\frac{R_1+R_2+R_3}{R}$
6	$\sqrt{A}+\sqrt{B}$	$(2^a)(2^b)$	Ax+By/x+y	$\frac{(R_1)(R_2)(R_3)}{3}$
7	$\sqrt{A}+\sqrt{B}$	2^a+2^b	A+B	
8	$\sqrt{A}+\sqrt{B}$	2^a+2^b	A+B	
9	$\sqrt{A}+\sqrt{B}$	2^a+2^b	Ax+By/x+y	$(R_1)(R_2)(R_3)$
10	$\sqrt{A}+\sqrt{B}$	$(2^a)(2^b)$	A+B	
11	A^2+B^2	2^a+2^b	A+B	
12	$A^{½}+B^{½}$	2^a+2^b	Ax+By/x+y	$R_1+R_2+R_3$
13	$\sqrt{A}+\sqrt{B}$	$(2^a)(2^b)$	Ax+By/x+y	
14	$A^{½}+B^{½}$	2^a+2^b	A+B	
15	$A^{½}+B^{½}$	$(2^a)(2^b)$	Ax+By/x+y	

16	$(A+B)^{½}$	$(2^a)(2^b)$	A+B	$\frac{R_1R_2R_3}{3}$
17	$(A+B)^2$	2^a+2^b	A+B	
18	$\sqrt{A}+\sqrt{B}$	$(2^a)(2^b)$		$R_1+R_2+R_3$
19		2^a+2^b		

Tabla 1. Concentrado de respuestas sobre linealidad

En la tabla 1, los resultados sombreados son incorrectos por lo que podemos deducir que la mayoría de los futuros profesores tienen problemas de extrapolación lineal al resolver situaciones algebraicas, lo cual puede ser un motivo de que los estudiantes de secundaria también presenten los mismos problemas.

Acto seguido, analizaremos las respuestas a los reactivos para conocer en qué cosistió el error que comietieron los normalistas al resolver algunas de las situacines algebraicas que se les persentaron.

Según Matz en el reactivo 10.- $\sqrt{A+B=}$ nueve de los futuros profesores cometieron un error de distribución generalizada ya que el operador es interno, pues el estudiante recuerda que $\sqrt{(AB)=}$ es igual a multiplicar $\sqrt{A}$ por $\sqrt{B}$ e infieren que $\sqrt{A+B=}\sqrt{A}+\sqrt{B}$. Esta fue la respuesta que más se presentó en este reactivo, lo que nos lleva a decir que los futuros profesores utilizaron la distributividad de un operador haciendo referencia al otro operador involucrado en la acción.

En este caso el operador $\sqrt{}$ se distribuye con respecto a la multiplicación pero no con respecto a la adición.

Otros cuatro futuros profesores consideraron como respuesta $A^{½} + B^{½}$ pues los normalistas recuerdan que la operación inversa a la raíz cuadrada de un número se obtiene elevando a un exponente fraccionario la base, sólo tres futuros profesores llegaron a la respuesta correcta que es $(A+B)^{½}$ en donde observamos que recuerdan que la operación inversa a la raíz cuadrada de un número se obtiene elevando a un exponente fraccionario la base (A+B) localizada dentro del signo de la raíz, sin embargo olvidaron que por ser raíz cuadrada deben tomar en cuenta los dos resultados posibles $\pm(A+B)^{½}$.

Dos estudiantes a profesor recordaron que el signo de raíz se elimina al elevar al cuadrado la base que se encuentra dentro de dicho signo, un estudiante más, trató de interactuar con el reactivo, pero terminó pasándolo igual, mientras que otro se abstuvo de solucionar la situación algebraica.

De todo lo anterior deducimos que la mayoría de los estudiantes a profesor presentan errores de linealidad enfocados en la distribución generalizada debido a que hicieron uso de técnicas que recordaban. Dichas técnica las establecieron a lo largo de su vida educativa pero desafortunadamente no fueron las adecuadas a cada una de las situaciones, por lo que terminaron adecuándolas a su conveniencia logrando así, solucionar las situaciones que se les presentaron.

En el reactivo 16, once docentes en formación colocaron como respuesta $2^a + 2^b$.

En lo anterior notamos que por tener el signo de suma en los exponentes, los coeficientes también los sumaron, esto puso de relieve que la distributividad no debe identificarse sólo como operador.

Ocho docentes en formación colocaron que $2^{a+b} = (2^a)(2^b)$ en esta respuesta se observó la aplicación adecuada de las reglas algebraicas colocando la misma base (que es un número natural) en una multiplicación y los exponentes ***a*** y ***b*** respectivamente.

Otro ejemplo de error de extrapolación lineal lo vimos en el ejercicio 18, aquí se solicitó simplificar la expresión $\frac{Ax+By}{x+y}$; en las respuestas observamos que:

Nueve docentes en formación separaron el denominador en dos partes obteniendo así como respuesta A + B.

En la solución anterior notamos que los docentes en formación utilizaron la regla de manera inapropiada ya que no se debe separar el denominador, dicho proceso, sólo es posible en el numerador. Aplicaron una regla incorrecta de cancelación $\left(\frac{Ax}{x} = A \ y \ \frac{By}{y} = B\right)$ a cada literal.

Siete normalistas sólo trasladaron el ejercicio sin realizar ningún cambio, dos se abstuvieron de contestar, mientras que un docente en formación llegó a la siguiente respuesta separando los numeradores y repitiendo los denominadores $\frac{Ax}{x+y} + \frac{By}{x+y}$.

En la mayoría de sus respuestas observamos una forma primitiva de aplicar las reglas que según Matz subyacen en muchas extrapolaciones en las cuales los operadores pueden ser lineales o no lineales.

En el segundo grupo de errores de linealidad que se refiere a la aplicación repetida, tenemos que se aplica un operador independientemente a cada uno de los términos de la expresión; un ejemplo claro es lo que sucedió en el ejercicio 29.

Tres docentes en formación obtuvieron $R_1+R_2+R_3$. En la respuesta anterior observamos que los normalistas sólo tomaron el recíproco de cada fracción en la suma.

Dos futuros profesores dieron como respuesta $R_1R_2R_3$, lo que nos lleva a ver que solo colocaron el reciproco cambiando la suma por multiplicación.

Dos más respondieron $\frac{R_1+R_2+R_3}{R}$. Esta solución muestra que colocaron el denominador del primer miembro como denominador del segundo miembro, invirtieron los denominadores colocándolos como numeradores en el mismo lugar.

Dos escribieron $\frac{(R_1)(R_2)(R_3)}{3}$. Observamos en lo anterior que concatenaron los denominadores y sumaron los numeradores invirtiendo sus posiciones y eliminando así el primer miembro.

Es importante notar que los docentes en formación revisaron y transformaron la regla que conocían aplicándola repetidamente en este ejercicio. Lo anterior, según Matz se puede evitar si se re-escribe el ejercicio para poder ajustarlo a una regla conocida, resolverlo como una fracción igualada a otra fracción. A continuación se encontraría un común denominador y por último, se agruparía la suma de fracciones en una sola fracción como se muestra en la siguiente respuesta que dio uno de los normalistas.

Uno escribió $\frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}$ y nueve no contestaron.

De acuerdo a las respuestas que emitieron los normalistas en el reactivo 29, reafirmamos que el conocimiento previo de los futuros profesores fue muy importante al momento que llevaron a cabo el análisis de los cambios conceptuales en el paso de la aritmética al álgebra.

La segunda técnica que maneja Matz de extrapolación es la de generalización, la cual se indagó a través de los reactivos 2, 6 y 24. Dicha técnica suele ser un puente entre las reglas conocidas y los ejercicios nuevos, en estos ejercicios es más frecuente la generalización sobre números que sobre operadores, dada la estructura misma del álgebra.

En la tabla 2 mostramos las respuestas que dieron los docentes en formación a los ejercicios donde observamos un error de generalización (las incorrectas están sombreadas).

En los resultados del ejercicio 24 casi todos (18) son válidos pero no productivos.

ALUMNOS /EJERCICIOS	2 Si x=-3 & y=-5 entonces xy =	6 Simplificar 3X +4XZ	24 (Ax+B) (Cx+D)=
1	15	3x+4xz=0	AxCx+AxD+BCx+BD
2	-8	x(3+4z)	AxCx+AxD+BCx+BD
3	15	x(3+4z)	ACx^2+ADx+BCx+BD
4	15	$7x^2z$	ACx^2+ADx+BCx+BD
5	15	3x+4xz=0	ACx^2+ADx+BCx+BD
6	15	x(3+4z)	ACx^2+ADx+BCx+BD
7	-8	3x+4xz=0	ACx^2+ADx+BCx+BD
8	-8	x+1xz	ACx^2+ADx+BCx+BD
9	15	x(3+4z)	ACx^2+ADx+BCx+BD
10	15	x(3+4z)	ACx^2+ABCDx+BD
11	-8	3x+4xz=0	ACx^2+ADx+BCx+BD
12	15	3x+4xz=0	ACx^2+ADx+BCx+BD
13	15	3x+4xz=0	AxCx+AxD+BCx+BD
14	-8	7xz	ACx^2+ADx+BCx+BD
15	15	7xz	ACx^2+ADx+BCx+BD
16	15	x(3+4z)	ACx^2+ADx+BCx+BD
17	15	$7x^2z$	ACx^2+ADx+BCx+BD
18	15	x(3+4z)	ACx^2+ADx+BCx+BD
19	15	x(3+4z)	ACx^2+ADx+BCx+BD

Tabla 2. Concentrado de resultados sobre la generalización

En el reactivo 2 (si x = -3 & y = -5, entonces xy=) Catorce futuros docentes anotaron como respuesta correcta al número 15; lo que nos lleva a deducir que la mayoría de los normalistas tienen establecidas las reglas que recuerdan y las aplican de manera adecuada a la situación o problema que en este caso se les presentó.

Cinco escribieron como resultado -8, en lo anterior se observa un conocimiento básico y una extrapolación de las reglas aritméticas que conocen, ya que sólo operaron los números (realizaron una adición), concatenaron las literales y no se percataron o no recordaron que dos literales juntas expresan una multiplicación y no una adición.

Otro ejemplo del error de generalización se observó en el ejercicio 6 en donde debían de simplificar 3x +4xz. Ocho docentes en formación, simplificaron el ejercicio de manera correcta obteniendo como respuesta x(3+4z) lo anterior reveló que los futuros docentes recordaron propiedades establecidas y las aplicaron adecuadamente.

Seis anotaron 3x + 4xz = 0. Lo cual nos lleva a decir que sólo igualaron la expresión a cero, recordando que una operación debe tener un signo igual para tener solución. Realizaron una transferencia de su conocimiento aritmético al algebraico.

Dos escribieron 7xz. Aquí observamos que los docentes en formación realizaron la adición de los números y concatenaron las literales, lo cual refleja un conocimiento sobre las operaciones que aprendieron en aritmética.

Dos obtuvieron$7x^2z$. En lo anterior notamos que además de realizar la adición de los números y la concatenación de las literales, elevaron al cuadrado la x, pues recuerdan que cuando una misma literal aparece dos veces en un sólo término, ésta se puede escribir elevada al cuadrado.

Uno contestó x + 1xz. Lo que refleja que el docente en formación sólo operó aritméticamente los números sin considerar la parte literal. Lo anterior lo llevó a cometer un error que refleja un conocimiento básico pobre.

En este reactivo, concluimos que se necesita asimilar sintáctica y semánticamente las expresiones algebraicas, aceptando que la x y la z representan un número.

Otro error de generalización lo observamos en el reactivo 24[(Ax+ B) (Cx + D)].Un docente en formación escribió ACx^2+ABCDx+BD. Aquí observamos que agrupó las x en orden descendente tomando en cuenta el exponente y obteniendo como resultado final de su ejercicio un trinomio de segundo grado.

Tres concluyen que la culminación del ejercicio es AxCx+AxD+BCx+BD. En lo anterior, según Matz trabajar con ecuaciones requiere reconocer cuándo las expresiones no son equivalentes, esto es muy crítico cuando en la resolución de ejercicios se entremezclan reducciones y deducciones pues si el estudiante no se plantea el proceso que lleva al resultado y reconsidera la regla que lo conduce al objetivo puede ejecutar pasos que son obviamente válidos pero no productivos.

Quince concluyeron el ejercicio de como ACx^2+ADx+BCx+BD. Para lo anterior Matz propone que en este tipo de ejercicios, los estudiantes deben determinar la culminación del proceso, no como en el caso aritmético que el número indica el resultado deseado.

De acuerdo a los ejemplos descritos sobre las técnicas de extrapolación que son la linealidad y la generalización, notamos que no sólo con alumnos de secundaria o preparatoria aparecen estos tipos de errores, sino también a nivel superior los encontramos muy a menudo, debido a que los estudiantes se han apropiado de reglas o las recuerdan y las modifican para aplicarlas a cualquier ejercicio parecido que se les presente, sin darse cuenta del tipo de error que cometen.

A manera de conclusión

No solo a nivel de secundaria se presentan dificultades con el álgebra, sino también en el nivel superior.

Los futuros profesores sólo se han apropiado de reglas o las recuerdan y las extrapolan al aplicarlas a cualquier ejercicio parecido que se les presente, sin darse cuenta del tipo de error que cometen.

Los estudiantes a profesor presentan más errores de linealidad que de generalización al resolver una situación algebraica.

Se debe indagar y mejorar el conocimiento de los profesores para poder encontrar alternativas de apoyo que ayuden a erradicar los errores de extrapolación en los estudiantes de todos los niveles.

Referencias bibliográficas

Matz, M. (1982). Towards computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior.*3 (1), 93-166.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., Trigueros, M. (2005). Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa. (1° Ed.)México: ANPM, Trillas.