

Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y el conocimiento del profesor¹

Raimundo Olfos Ayarza

Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Chile

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Chile

raimundo.olfos@ucv.cl

Ismenia Guzmán Retamal

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Chile

iguzmanr@ucv.cl

Resumen

La presente comunicación analiza por un lado las dificultades que muestran los alumnos en el aprendizaje de las fracciones como concepto, incluyendo sus representaciones, invariantes y situaciones que asocia a la noción, y por otro, la mirada del profesor frente a tales dificultades. Las dificultades de los alumnos se analizan a partir de la proporción de repuestas erróneas a ítems que cubren los objetivos fundamentales sobre el aprendizaje de fracciones para el nivel de 4º básico establecido por los OFCMO (Objetivos fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios) del Marco Curricular del Ministerio de Educación de Chile. La visión del profesor es estudiada a partir de un cuestionario que responde el docente en el contexto de la identificación de sus conocimientos pedagógico-disciplinarios. Específicamente, dentro de la componente CRAC (Conocimiento del profesor de la relación del alumno al conocimiento). La información se analiza de una muestra estratificada de estudiantes de 43 establecimientos de las Comunas de Valparaíso, Viña del Mar y Quilpué, elegidos atendiendo a dos variables, NSE (nivel socioeconómico del establecimiento) y SIMCE (puntuación del establecimiento en la última prueba de matemáticas de 4º básico en el marco del Sistema de Medición de la Calidad de la Educación en Chile). Los resultados muestran que la calidad de los conocimientos de los alumnos depende fuertemente del NSE de los establecimientos y está positivamente asociado al conocimiento pedagógico del docente, aunque no de manera significativa.

¹ Agradecimientos al patrocinio del Gobierno de Chile. Proyectos Fonide 10980, Fondecyt 1111009.

Palabras Claves: enseñanza de la matemática, fracciones, conocimiento pedagógico del contenido, errores y dificultades en el aprendizaje de la matemática.

Introducción

Este estudio surge en el contexto de la necesidad de caracterizar la importancia que tiene para el aprendizaje de la matemática la profundidad del conocimiento del profesor sobre la materia que enseña, no sólo en cuanto a contenido matemático, sino básicamente como saber adquirido y por adquirir por el alumno. Esto es, la hipótesis del estudio es que la efectividad de la enseñanza depende significativamente del saber que el profesor tiene de los saberes que pone en juego el alumno para aprender un nuevo contenido, en este caso las fracciones en 4º básico. Un profesor es efectivo en la medida que conoce lo que va a enseñar y tiene claridad de los obstáculos y dificultades que el alumno debe enfrentar para lograr el aprendizaje.

Marco conceptual

La organización de las actividades curriculares para lograr el aprendizaje de los alumnos en torno a las fracciones, según los Programas de Estudio en Chile, es consistente con la noción de campo conceptual de Vergnaud (1990), quien postula que la conceptualización involucra tres dimensiones inseparables, las situaciones o problemas que dan existencia a los conceptos, los invariantes propios de cada concepto, y el lenguaje o sistema de símbolos asociados a esta construcción conceptual. En el caso de las fracciones, las situaciones se refieren a la partición de la unidad y la relación parte todo, donde las partes son equivalentes. Los invariantes corresponden a la equivalencia de las partes y constitución del todo como suma de las partes, con sus respectivas propiedades algebraicas.. Las representaciones, lenguaje, corresponde a los números que constituyen el numerador y denominador, a las representaciones gráficas rectangulares y circulares preferentemente y a la representación de puntos en la recta numérica, entre otras.

La noción de CRAC (conocimiento de la relación del alumno al conocimiento) como componente del CPC (Conocimiento Pedagógico del Contenido), término acuñado por Shulman (1987), se refiere tanto a los errores y dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de un contenido, como a los preconceptos, conocimientos previos y estrategias que usualmente ponen en juego para la adquisición del nuevo contenido. El tema del conocimiento del profesor, estudiado ya a inicios de los 1990 (Fennema, E., & Franke, M. L., 1992), por ejemplo, ha repercutido en la actualidad. En el caso del CPC, tema profundizado por Hill et al (2007, 2008) y Krauss et al (2008), entre otros, se ha abierto un interesante campo de estudio. En el caso que nos interesa en este momento, en el estudio de las fracciones, se trata de fijar la atención en la capacidad del profesor para darse cuenta de las razones que dificultan a los alumnos la comprensión y manipulación de las fracciones. Por ejemplo, los alumnos tienen dificultad en cuantificar u

ordenar fracciones, en identificar fracciones equivalentes, en relacionar la fracción con su ubicación en la recta numérica, entre otras.

Objetivo de la comunicación

Esta comunicación da a conocer parte de los hallazgos de un estudio que relaciona el saber del alumno con el conocimiento pedagógico del profesor, referido al aprendizaje de las fracciones en 4º básico.

Diseño del estudio

Se aplica una prueba de conocimientos a los alumnos al finalizar el 4º básico con ítems referidos a fracciones. Paralelamente se solicita a los profesores de esos alumnos responder en línea un cuestionario con ítems referidos al contenido de fracciones y otros referidos al conocimiento pedagógico sobre el tema, particularmente incluyendo 11 preguntas sobre el conocimiento pedagógico sobre las fracciones. Luego se relacionan los datos recogidos por ambas partes. Las preguntas a los alumnos se presentan en 3 formas, de modo que cada alumno responda 10 a 11 preguntas vinculadas al aprendizaje de las fracciones, no se cansen y no les quite demasiado tiempo en el contexto de sus clases normales de matemáticas. Por su parte, los profesores responden con confianza y sin límite de tiempo. Para facilitar la participación de los docentes, se les da un incentivo económico. Se recogen antecedentes del establecimiento y del profesor. Con respecto al profesor se registra los años de experiencia docente, las horas de formación matemática y género, entre otras variables de interés.

Instrumentos

La prueba de fracciones para los alumnos contempla 32 ítems, de los cuales fueron seleccionados siete de ellos para su análisis y discusión en esta presentación. El cuestionario de conocimiento matemático y conocimiento pedagógico del contenido consideró 11 ítems referidos al CRAC, de los cuales se analizan 7 en esta comunicación.

Las preguntas para los alumnos

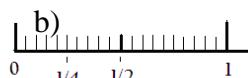
Forma A

8. ¿En qué caso están bien ubicadas las fracciones en la recta numérica?

- a)



- 1



-

- L **XIII CIAE** L

c)

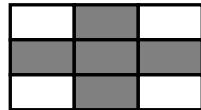
d)

Forma B

5. Parte de la figura está sombreada.

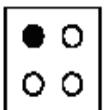
¿Qué fracción de la figura está sombreada?

- a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{6}{9}$

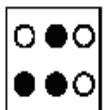


6. ¿Cuál de las figuras tiene $1/2$ de los círculos en blanco?

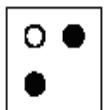
(a)



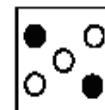
(b)



(c)



(d)

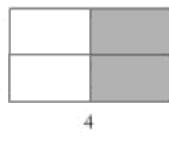
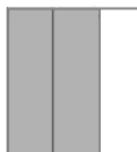
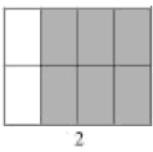
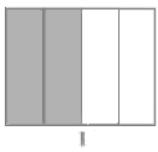


7. Existen 600 bolas en una caja y $1/3$ de esas bolas son rojas. ¿Cuántas bolas rojas hay en la caja?

- a) 600 bolas b) 1800 bolas c) 200 bolas d) 300 bolas

FORMA C

3. Cada figura representa una fracción. ¿Qué figuras representan la misma fracción?



- a) 1 y 3 b) 1 y 4 c) 3 y 4 d) Ninguna de ellas

5. Viviana tiene que hacer una tartaleta que lleva $\frac{3}{4}$ Kg. de harina. Si tiene un paquete de un Kg., ¿qué debe hacer para obtener $\frac{3}{4}$ Kg?

- | | |
|--|-----------------------------|
| a) Separar o quitar $\frac{1}{4}$ de Kg. | c) Agregar 1 Kg. |
| b) Agrega $\frac{1}{4}$ de Kg. | d) Usar sólo 3 de los 4 Kg. |

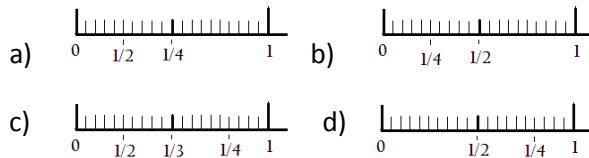
La aplicación en línea del cuestionario al profesor permitió conseguir un alto nivel de respuestas, privacidad y adaptación a las diferencias personales de los profesores, evitando el estrés. El instrumento en sus primeras líneas hacía notar la privacidad de la información y el hecho de que las respuestas debían darse en conformidad a la realidad del docente y no del “deber ser” de un

docente, con el objeto de recoger información lo más fidedigna a la percepción de la realidad del participante. Las preguntas del instrumento son de 4 alternativas y abarcan las categorías y subcategorías del CPC y el CC atendiendo al marco teórico propuesto.

Las siete preguntas planteadas a los docentes consideradas para el presente análisis fueron:

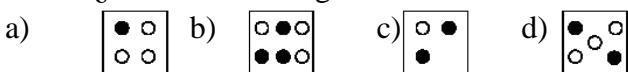
1. Para plantear un ítem con 3 alternativas, ¿cuál alternativa eliminaría por considerar que no es un buen distractor para sus alumnos de 4º básico?

Ítem: ¿En qué caso están bien ubicadas las fracciones en la recta numérica?



2. Si se plantea la siguiente pregunta a sus alumnos, ¿cuál sería la alternativa errónea que más elegirían sus alumnos?

Ítem: ¿En cuál de las figuras está la mitad de los puntos sombreados?



3. Ante el ítem de abajo, ¿Cuál piensa que sería la alternativa errónea que más alumnos de su 4º básico elegiría?

Ítem: Viviana tiene que hacer una receta que lleva $\frac{3}{4}$ kg de harina. Si tiene un paquete de 1 kg, ¿qué debe hacer para obtener $\frac{3}{4}$ kg?

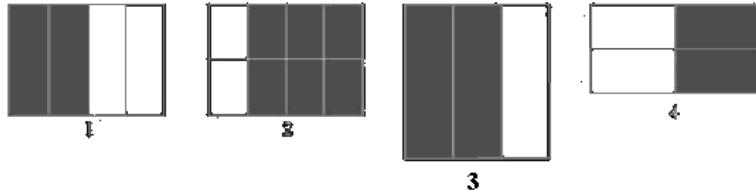
- | | |
|---|----------------------------|
| a) Separar o quitar $\frac{1}{4}$ de kg | c) Agregar 1 kg |
| b) Agrega $\frac{1}{4}$ de kg | d) Usar sólo 3 de los 4 kg |

4. Al finalizar el 4º básico, ¿qué alternativa errónea del ítem de abajo cree que elegiría la mayoría de sus alumnos?

Ítem: Tenía una cantidad de dinero, de la cual gasté la tercera parte. Si me quedan \$ 30, ¿cuánto era la cantidad inicial?

- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| a) \$ 10 | b) \$ 60 | c) \$ 30 | d) \$ 90 |
|----------|----------|----------|----------|

5. Una vez que usted termina la enseñanza de las fracciones en 4º básico, ¿qué parte de su curso responderá correctamente a la pregunta de cuáles de las figuras representan la misma fracción?



- a) Más de 2 tercios de los alumnos
b) Entre 1 tercio y 2 tercios del curso
c) Menos de 1 tercio del curso
d) No sabría decir.
6. Al finalizar la enseñanza de las fracciones, ¿qué proporción del curso usted estima responderá bien a la pregunta?
Existen 600 bolas en una caja, y $\frac{1}{4}$ de esas bolas son rojas. ¿Cuántas bolas rojas hay en la caja? I) 600 bolas II) 2400 bolas III) 150 bolas IV) 200 bolas
- a) Más del 66% de los alumnos responderá bien
b) Entre el 33% y 66% responderá bien
c) Menos del 33% responderá bien
d) No sabría decir
7. Frente a la pregunta ¿Qué fracción de la figura está sombreada? Varios alumnos respondieron $\frac{5}{4}$. Ello podría deberse a que:
- a) Confunden el numerador con el denominador
b) Confunden el denominador con el complemento
c) Se equivocan en los cálculos
d) No cuentan las celdas sombreadas al determinar el denominador



Resultados

Respondieron un total de 1532 alumnos a la prueba de fracciones, de un total de 58 cursos. Dieron información completa 43 profesores de los cursos considerados. Las preguntas para los alumnos tienen como objetivo identificar los aprendizajes de los alumnos con respecto a:

A4- La capacidad para resolver problemas utilizando fracciones. La respuesta exige razonamiento en dos pasos, es considerada a priori como una pregunta difícil para el nivel. La respuesta correcta es “d”. Los alumnos respondieron como sigue a) 171 b) 155 c) 60 d) 93

C3 Se trata de un problema sencillo que pide al alumno reconocer visualmente dos formas de representar una fracción por medio de sectores rectangulares. La respuesta correcta es “b”. Respuestas de los alumnos: a) 55 b) 231 c) 39 d) 85

B7 Se trata de un problema de dificultad media en el que se pide al alumno determinar una fracción de una cantidad. En esta oportunidad se ofrecen números simples. La respuesta correcta es “c”. Los alumnos respondieron a) 54 b) 68 c) 195 d) 141.

Los tres ítems anteriores miden los aspectos centrales del campo conceptual de las fracciones: referidos a sus invariantes, representaciones y las situaciones en que se las trabaja.

B5- En este caso se pide al alumno reconocer el numerador y el denominador de una fracción a partir de su representación en un contexto gráfico. La respuesta correcta es “c”. Las respuestas de los alumnos fueron a) 96 b) 53 c) 366 d) 25

B6- Se pide al alumno distinguir la parte del todo, a partir de una representación por medio de círculos blancos y negros, que llevan a una posible confusión entre el todo y el complemento de la fracción. La respuesta correcta es “b”. Las respuestas dadas por los alumnos fueron a) 55 b) 185 c) 261 d) 39.

C5- Se presenta un problema en contexto, en el cual el alumno debe identificar el complemento de una fracción propia, lo que falta para llegar al entero. Además se pide vincular la fracción con una situación de una medida. De este modo se cubren las situaciones referidas a parte de un todo continuo, parte de una cantidad discreta y parte de una medida, magnitud. La respuesta correcta es “a” y el número de alumnos que respondió a cada alternativa fue: a) 146 b) 68 c) 64 d) 125

A8- En este caso se pidió al alumno identificar fracciones en la recta numérica, respetando el orden. La respuesta correcta es “b”. Las respuestas dadas por los alumnos fueron a) 89 b) 125 c) 173 d) 73.

Tabla 1

Respuestas de alumnos de alternativas correctas

	A-4	A-8	A-9	B-5	B-6	B-7	C-3	C-5
a)	171	89	135	96	55	54	55	146
b)	155	125	68	53	185	68	231	68
c)	60	173	174	366	261	195	39	64
d)	93	73	83	25	39	141	85	125

La tabla 1 es un resumen que muestra las dificultades y errores que tuvieron los estudiantes frente a cada ítem. Cada una de esas preguntas se asocia con una pregunta presentada a los profesores, con el objeto de vincular el saber de los alumnos con el de sus profesores. Las preguntas A4, C3 y B7 se refieren a los conocimientos adquiridos por los alumnos. B5, B6, A8 y C5 se vinculan con los errores de los alumnos en el estudio y aprendizaje del concepto de fracción. Además, A4 se vincula con la pregunta 4 de los profesores, C3 con la 5, B7 con la 6, B5 con la 7, B6 con la 2, A8 con la 1 y C5 con la 3. No se consideró en este análisis el número de respuestas omitidas, que en algunos casos sobrepasó el centenar.

Todas las preguntas se asocian con el CRAC, esto es, con las dificultades y errores en la adquisición del concepto de fracción, en sus aspectos conceptuales, procedimentales y de

representación; o bien, se relacionan con los conocimientos que se ponen en juego en el proceso de aprender fracciones: conocimientos ya adquiridos, o estrategias usuales de los alumnos para aprender el concepto.

La siguiente tabla muestran los resultados desagregados por NSE.

Tabla 2

Respuestas y alternativas correctas según nivel socioeconómico (NSE).

		NSE		Alto		
A	A	B	B	B	C	C
F-4	F-8	F-5	F-6	F-7	F-3	F-5
61	30	25	14	8	14	32
52	42	12	60	18	61	25
13	49	129	83	81	9	12
26	27	2	8	48	20	32
		NSE		Bajo		
32	16	29	13	19	24	60
39	28	17	26	22	95	30
16	48	63	71	35	16	28
33	20	7	9	38	39	54

La comparación de los resultados de la prueba por nivel socioeconómico deja ver diferencias a favor del grupo de NSE Alto, lo cual era esperado y ratifica el criterio de selección de las muestras.

Resultados de la aplicación de los ítems a los profesores

Los resultados de las preguntas seleccionadas del cuestionario fueron tabulados en conformidad a las alternativas elegidas como respuestas de los profesores, sin considerarlas a priori correctas o incorrectas. Para el análisis de las respuestas dadas a las preguntas referidas al CRAC, se consideró primeramente que las afirmaciones en relación a los errores de los alumnos y sus estrategias y preconceptos serían contrastados a partir de las respuestas de los estudiantes. La poca cantidad de alumnos por curso, junto al hecho de que se hayan usado 3 formas para recoger la información de los alumnos, llevó a la conveniencia de cambios en los criterios inicialmente contemplados para decidir si una respuesta era correcta.

Para decidir qué respuestas a las preguntas asociadas al CRAC dan más evidencias de un conocimiento de las estrategias, errores y pre-concepciones de los alumnos, los investigadores tuvieron en cuenta las respuestas de los alumnos de los correspondientes docentes. En efecto:

Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y el conocimiento del profesor

consideremos el caso referido a la pregunta A8 del alumno y 1 del profesor. Cada columna corresponde a las respuestas de un curso, alrededor de 5 a 10 alumnos por curso. Hay un total de 39 grupos cursos. La respuesta “c” es la más usual. Sin embargo, “b” es la respuesta correcta. Los distractores menos considerados corresponden a la alternativa “a” y “d”. La fila inferior de la Tabla 3 corresponde a la respuesta dada por el profesor a la pregunta 1. El área gris corresponde a los profesores que dieron la respuesta óptima, (c). Varios profesores dieron respuestas fuera de lugar: a) 12 b) 9 c) 22 d) 9.

Tabla 3

Respuesta de alumnos y profesores por curso al ítem A8

	curso 1	curso 2	curso 3	curso 4	curso 5	curso 6	curso 7	curso 8	curso 9	curso 10	curso 11	curso 12	curso 13	curso 14	curso 15	curso 16	curso 17	curso 18	curso 19	curso 20	curso 21	curso 22	curso 23	curso 24	curso 25	curso 26	curso 27	curso 28	curso 29	curso 30	curso 31	curso 32	curso 33	curso 34	curso 35	curso 36	curso 37	curso 38	curso 39	curso 1 al 22	curso 23 al 39
a)	1	4	3	4	1	0	4	0	0	0	3	1	1	2	0	3	1	1	1	1	2	3	0	2	2	1	1	1	0	0	1	1	0	5	2	0	1	2	36 12		
b)	1	4	3	1	0	1	1	2	3	2	0	1	0	2	4	0	3	2	5	3	0	1	3	2	3	2	1	2	1	2	4	0	2	4	4	1	1	3	0	42 22	
c)	2	2	2	4	7	4	2	3	1	1	3	5	6	1	2	6	3	2	2	10	4	1	0	4	2	4	6	4	4	3	6	1	6	4	1	3	0	5	3	73 48	
d)	1	1	2	1	4	0	2	1	0	2	1	0	4	0	2	4	2	1	4	0	1	0	0	2	1	1	1	1	1	3	1	2	2	0	0	0	2	1	2	33 18	
	←profesores que responden correctamente a la pregunta 1→															←profesores que responden mal→																									

Un análisis de las respuestas por nivel socioeconómico también deja ver diferencias entre los grupos cursos. En efecto:

Tabla 4

Respuestas de los alumnos por curso y NSE a la pregunta A8

Cursos NSE Alto				Cursos NSE Bajo				Cursos NSE Medio			
3	3	0	0	0	1	3	0	5	4	0	0
1	1	2	1	1	1	6	1	0	2	4	2
2	2	4	1	0	2	3	1	4	4	2	1
1	0	3	2	0	3	1	0	2	3	2	1
1	1	4	2	0	2	1	2	1	0	7	4
1	6	1	1	0	0	3	1	2	4	4	2
0	1	4	0	0	0	2	1	3	1	5	0
4	1	2	2	2	1	1	1	1	0	6	4
3	4	2	2	1	1	5	0	1	2	1	0
0	0	6	4	1	2	4	1	1	1	0	0
1	0	1	2	0	2	3	3	1	1	4	1
2	1	1	0	3	3	3	2	1	6	2	2
1	2	6	2	1	0	4	1	0	4	6	1
3	5	2	1	4	0	4	0	1	3	10	0
1	2	2	1	2	4	2	2	4	1	4	1
0	3	0	1	0	0	0	0	2	0	3	2
1	3	5	1	15	22	45	16	0	1	2	1
3	3	2	2					1	5	2	4
2	4	2	2					0	4	4	0
30	42	49	27					5	4	1	0

2	1	3	0
0	0	0	0
0	1	0	2
37	52	72	28

En el grupo de NSE Bajo de la Tabla 4, el doble de alumnos prefiere “c” antes de “b”. En el grupo Alto, la cantidad de alumnos que prefiere “c” no es muy superior a la de alumnos que prefiere “b”. En todo caso, es claro que el distractor “c” es el más usual.

El análisis de este ítem permite dar una visión de que es posible construir ítems para medir el CRAC del docente. Pero que la construcción de los ítems es muy delicada.

La hipótesis principal del estudio postula una asociación entre el Conocimiento del profesor (CC y CPC) y la efectividad de la enseñanza, lo que quedó parcialmente probado. Un primer análisis de la asociación entre el CPC de los docentes y los resultados del pos-test de los alumnos llevó a correlaciones positivas pero no suficientemente significativas.

Correlación de Pearson de CPC y CC = 0,294. Valor P = 0,050

Correlación de Pearson de CPC y FRAC-ALUMNOS = 0,241. Valor P = 0,111

Conclusiones

Es posible identificar un saber del profesor sobre los errores y dificultades de los alumnos y sobre las sub-comprensiones de los alumnos y sus estrategias erróneas. Ese saber es útil para lograr mejores aprendizajes en los alumnos.

En la actualidad una gran parte de los profesores ignora las dificultades y sub-comprensiones de sus alumnos, no focalizando las clases en los aspectos que son relevantes considerar.

Ese conocimiento al cual nos estamos refiriendo es dependiente del contenido que se enseña, pero no es exactamente el contenido, sino que referido a la relación entre los alumnos y los contenidos que estudian.

Como se mostró en este estudio, en el caso de las fracciones, hay dificultades comunes en los alumnos que permanecen invariantemente, más allá del grupo curso y más allá del NSE de los estudiantes. Se trata de conocimientos equivocados, basados en conocimientos previos que tiene un alcance limitado y que se extienden más allá del ámbito de validez. Por ejemplo, muchos niños, pese a haber estudiado fracciones en 4º básico, a fin de año piensan que $\frac{1}{2}$ es menor que $\frac{1}{3}$ porque 2 es menor que 3.

Sin dudas la formación de los profesores debiera poner atención a estos aspectos, lo cual mejoraría la efectividad de los docentes.

Referencias Bibliográficas

- Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 147–164. New York: Macmillan.
- Hill, H. C., Ball, D. L., Blunk, M., Goffney, I. M., & Rowan, B. (2007). Validating the ecological assumption: The relationship of measure scores to classroom teaching and student learning. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, 5(2–3), 107–117.
- Hill, H., Lewenberg, D. y Shilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge, Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematic Education*. (39) 4, 327-400.
- Krauss, S., Baumert, J. y Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *ZDM Mathematics Education* 40, 873–892.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.
- Vergnaud, G. (1990) Teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, Vol. 10, n° 2, 3, pp. 133-170, 1990. Traducción: Juan D. Godino. Extraído el 20 de Enero del 2010 de
http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf