

# Un estudio sobre la comprensión y dificultades de profesores de secundaria acerca de la probabilidad

Martha Catalina **Guzmán** Reyes  
Secretaría de Educación Pública y Cultura de Sinaloa  
México  
katyguzre@hotmail.com.mx

Santiago **Inzunza** Cazares  
Universidad Autónoma de Sinaloa  
México  
sinzunza@uas.uasnet.mx

## Resumen

*En el presente trabajo se presentan resultados de una investigación sobre los conocimientos y comprensión de la probabilidad que muestran profesores de secundaria mexicanos. En el estudio participaron 80 profesores de secundarias técnicas a los que se les aplicó un cuestionario de 17 preguntas sobre los conceptos de probabilidad establecidos en el programa de matemáticas. Los resultados señalan que la probabilidad es un área complicada para los profesores de secundaria, se observó además un razonamiento combinatorio muy endeble en la mayoría de los profesores y poca utilización de representaciones como diagramas de árbol y diagramas de Venn.*

**Palabras clave:** Probabilidad, Formación de Profesores, Didáctica de la Probabilidad.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La sociedad actual requiere individuos que sean capaces de desarrollar competencias, como analizar, comprender e interpretar información de diversos hechos que suceden a su alrededor, los cuales con gran frecuencia involucran alguna componente de incertidumbre; es decir, se requieren individuos matemáticamente competentes que aborden la incertidumbre desde una perspectiva matemática y científica y no meramente sobre la base de creencias y conjeturas. Los sistemas educativos han sido receptivos a lo anterior y desde la última década del siglo pasado se han realizado reformas a los currículos de matemáticas en diversos países (por ejemplo: NCTM, 1989) para incorporar contenidos de estadística y probabilidad desde los niveles de educación básica hasta el nivel universitario. En el caso de México a partir de 1975 se reconoce la necesidad de brindar formación sobre probabilidad y estadística en la educación básica obligatoria (Ojeda, 2006) y aparece por primera vez en los programas de estudio bajo el título “Registros Estadísticos y Probabilidad”.

Como puede verse, la probabilidad tiene más de 30 años en el currículo escolar de la escuela secundaria de México; sin embargo, como consecuencia en buena medida a la insuficiente formación de los docentes de educación básica en probabilidad, es frecuente que los profesores de matemáticas de este nivel se refieran a la probabilidad como el área que mayor

dificultad les representa para impartirla, llegando muchas veces incluso a relegar su estudio. Lo anterior se refleja en los bajos resultados de las evaluaciones nacionales de sus alumnos, como es el caso del Examen ENLACE (Examen Nacional de Logro Académico en Centros Escolares) y el Examen EXCALE (Examen de Calidad y Logro Educativo) que se aplican desde hace algunos años en el sistema de educación básica mexicano.

Existen múltiples factores que han incidido hasta ahora en la enseñanza de la probabilidad en secundaria para que los resultados obtenidos tanto por profesores como por estudiantes en las evaluaciones no sean satisfactorios. Entre dichos factores se pueden destacar los siguientes:

- Los programas han sufrido un cambio radical en cuanto al enfoque de enseñanza de la probabilidad de 1975 a 2006 y los profesores no los han asimilado totalmente.
- La formación de los profesores en probabilidad no es muy sólida, y por ello tradicionalmente la han evadido o la imparten de una forma muy superficial.
- Los programas de matemáticas tienen una orientación determinista y privilegian a otras ramas de las matemáticas, lo que trae como consecuencia que se otorgue menos importancia a la probabilidad, tanto a nivel de contenidos como en las evaluaciones nacionales.

Existe muy poca investigación en torno a los factores anteriores con profesores de secundaria mexicanos, razón por la cual en el presente trabajo nos hemos propuesto abordar una problemática relacionada con la naturaleza y conocimientos sobre probabilidad que tienen los profesores de secundaria acerca de los principales contenidos de probabilidad establecidos en el programa de matemáticas, con el propósito de identificar sus principales dificultades y desafíos para enfrentarse a los nuevos retos establecidos en la última reforma a los planes de estudio para la educación secundaria. La pregunta que nos hemos planteado y alrededor de la cual gira la presente investigación es *¿cuál es el nivel de comprensión y las principales dificultades que tienen los profesores sobre los contenidos de probabilidad del programa de estudios de matemáticas en secundaria?*

## ANTECEDENTES

Aunque diversos trabajos han contribuido a clarificar el conocimiento que requieren los profesores para la enseñanza de la probabilidad, la investigación sobre conocimientos pedagógicos y sobre dominio de contenidos de probabilidad de los profesores, así como sobre el conocimiento del aprendizaje de sus estudiantes es todavía limitado; lo cual puede deberse al hecho de que la introducción de la probabilidad, especialmente en los niveles básicos, es relativamente nueva (Jones et al., 2007). Sin embargo, dicha situación se ha empezado a revertir en los años recientes ante el reconocimiento de la importancia que juega una formación y actualización adecuada de profesores de probabilidad y estadística en el mejoramiento de la educación estadística.

Stohl (2005) identifica en una revisión de la literatura que hay mucho menos investigación sobre comprensión de la probabilidad por parte de profesores que por parte de estudiantes e identifica cuatro grandes categorías, que a su vez nos servirán de marco para analizar algunas investigaciones que involucran a profesores de probabilidad de diferentes niveles:

1. Creencias de profesores y conocimiento sobre el contenido de probabilidad.

2. Comprensión de los profesores sobre la comprensión de los estudiantes sobre probabilidad.
3. Implementación de actividades de probabilidad por parte de los profesores.
4. Uso de herramientas de simulación por parte de los profesores para su aprendizaje y enseñanza.

#### *Creencias de profesores y conocimiento sobre el contenido de probabilidad*

En un estudio sobre eventos independientes realizado por Sánchez (2000) con profesores de matemáticas mexicanos de preparatoria, encontró que los profesores exhibieron diversas ideas confusas cuando se enfrentaron a tareas que involucran la independencia de eventos. Entre las principales dificultades encontradas se encuentra la falta de una clara distinción entre experiencias independientes y eventos independientes, creer que eventos independientes es sinónimo de eventos mutuamente excluyentes y la creencia que sólo se puede aplicar el concepto de eventos independientes a sucesiones de experiencias. También con profesores de preparatoria mexicanos, Inzunza y Juárez (2007) realizaron un estudio sobre razonamiento estadístico, el cual involucraba diversas ideas de probabilidad en relación con los datos. Los resultados muestran un bajo nivel de razonamiento y diversos sesgos probabilísticos, a pesar que entre ellos había profesores con experiencia en la enseñanza de la probabilidad y la estadística. Mientras tanto, Begg y Edward (1999), al realizar una investigación con profesores en servicio y en formación encontraron que los profesores mostraron una comprensión muy débil de la probabilidad. Estos mismos profesores mostraron un bajo nivel de confianza en su habilidad para enseñar probabilidad en comparación con la construcción de gráficas y cálculos estadísticos.

#### *Comprensión de los profesores sobre la comprensión de los estudiantes sobre probabilidad*

En un amplio estudio realizado por Watson (2001) con profesores australianos de primaria y secundaria sobre conocimiento de contenido y didáctica de la probabilidad, reportó que los profesores de secundaria tuvieron una significativa mayor confianza que los profesores de primaria para enseñar eventos igualmente probables, mediciones básicas de probabilidad y muestreo. Un amplio conocimiento estadístico, aún cuando es esencial no es suficiente para que los profesores puedan enseñar probabilidad. En esta idea, Batanero, Godino y Roa (2004) analizan las razones por las cuales la probabilidad resulta un tópico difícil de enseñar para los profesores de matemáticas y los contenidos necesarios en la preparación didáctica de los profesores para enseñar probabilidad.

#### *Implementación de actividades de probabilidad por parte de los profesores*

Haller (1997) observó las clases de probabilidad de cuatro profesores de secundaria en un programa que incluía experiencias con contenido probabilístico, concepciones erróneas y aspectos pedagógicos ligados a la enseñanza de la probabilidad. Las observaciones de Haller indican que los profesores que se encontraban en el espectro bajo de conocimientos de probabilidad, mostraban errores y concepciones erróneas, dependían en gran medida de libros de texto y dejaban de lado oportunidades para fomentar las relaciones con fracciones, decimales y porcentajes en los cálculos de probabilidades. En contraste, los profesores que se encontraban en el espectro alto de conocimientos de probabilidad, no cometían errores de contenido, ampliaban las lecciones de los libros de texto y explotaban las oportunidades para hacer conexiones, entre probabilidad, decimales, fracciones y porcentajes. Por su parte, en un estudio realizado por Watson (2001) se examinó la cognición de sus estudiantes (profesores de primaria y secundaria)

y las dificultades que podrían experimentar con los datos y el azar. En su documentación sobre las dificultades menciona que sólo 2 de 15 profesores de primaria mencionaron aspectos procedimentales como “encontrar probabilidades”, mientras que 13 de 28 profesores de secundaria se refirieron a calcular probabilidades, permutaciones y diagramas de árbol. Se observó con ello, que las respuestas, particularmente de los profesores de secundaria sugieren que los enfoques procedimentales en la enseñanza tienden a dominar. Watson señala además, que hubo poca evidencia que los profesores de secundaria usaran enfoques basados en actividades de simulación y muestreo para reforzar la teoría.

*Uso de los profesores de herramientas de simulación para su aprendizaje y enseñanza.*

El uso de simulación y experimentación en complemento con otros enfoque de la probabilidad son ampliamente sugeridos en la enseñanza de la probabilidad (por ejemplo: Batanero, Henry y Parzysz, 2005). En esta dirección se encuentra el trabajo de Sánchez (2002), quien realiza un estudio con profesores mexicanos de preparatoria para conocer el potencial de un ambiente de simulación con el software Fathom. Después de diversas sesiones de trabajo los profesores respondieron un cuestionario que recogía sus opiniones sobre diversos aspectos relacionados con la simulación como herramienta de enseñanza, tales como el papel de la simulación en la enseñanza, las etapas de una simulación, la complejidad de usar simulaciones y los conceptos más importantes que se podrían abordar con actividades de simulación. Los resultados indican que los profesores son conscientes de ciertos aspectos del potencial pero rechazan u subestiman otros que son muy importantes.

El presente trabajo de investigación se ubica en la primera categoría definida por Stohl (2005) que corresponde a creencias de profesores y conocimiento sobre el contenido de probabilidad.

## MARCO CONCEPTUAL

### **La naturaleza y complejidad de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad**

La literatura en educación estadística reporta diversos estudios que muestran la complejidad que representa el aprendizaje de la probabilidad en todos los niveles, lo cual ha motivado diversos llamados y esfuerzos para investigar y conocer mejor la problemática de su enseñanza y aprendizaje. Una de las razones que se ofrecen es que la probabilidad tiene una naturaleza contra la intuición que complica el razonamiento probabilístico, otra razón tiene que ver con la inadecuada preparación de los profesores en el tema. Entre las recomendaciones y sugerencias que se proponen está iniciar el estudio de la probabilidad desde etapas tempranas como una medida para familiarizar a los niños con el azar y la incertidumbre (Langrall y Mooney, 2005; Watson, 2005); otras propuestas consisten en que la enseñanza de la probabilidad haga explícitas las conexiones entre las nociones teóricas y experimentales mediante el uso de los diversos enfoques de la probabilidad (Fischbein y Gazit, 1984), usar tecnología para construir modelos y explorar situaciones aleatorias (Pratt, 2005) y preparar mejor a los profesores para el conocimiento de la pedagogía y el contenido de la probabilidad (Da Ponte, 2008; Kvantinsky y Even, 2002).

Diversos educadores estadísticos sugieren que la enseñanza de la probabilidad debe contemplar los diversos enfoques de la probabilidad como una medida para ayudar a los estudiantes a comprender mejor sus diversas aplicaciones, a desarrollar intuiciones adecuadas y

mejorar el razonamiento probabilístico. Sin embargo, muchos profesores tienen preferencia por el enfoque clásico de la probabilidad, en tanto está más ligado a la visión determinista de las matemáticas y desconfían de los resultados aproximados que se obtienen al realizar o simular una serie de ensayos de un experimento aleatorio. Esto último como consecuencia de una inadecuada comprensión de la ley de los grandes números, que establece que la diferencia entre la probabilidad empírica y teórica tiende a cero conforme se incrementan los ensayos de un experimento aleatorio. En resumen, profesores que no tienen una sólida comprensión de los conceptos probabilísticos y una visión completa de lo que representa el campo de la probabilidad, difícilmente podrán enseñar probabilidad en forma adecuada.

### **El conocimiento de probabilidad necesario para la enseñanza**

Even y Kvatinsky (2010) proponen un conjunto de cinco aspectos relacionados con los conocimientos que los profesores deben tener sobre probabilidad para una enseñanza adecuada, los cuales nos servirán de marco para el análisis e interpretación de los conocimientos de los profesores:

- Las características esenciales y la fortaleza de la probabilidad.
- Diferentes representaciones y modelos
- Uso de enfoques alternativos de la probabilidad
- Repertorio básico de ejemplos
- La naturaleza de la teoría de la probabilidad

Adicionalmente, Heitele (1975) sugiere un conjunto de ideas estocásticas que son fundamentales en el currículo de probabilidad y que deben ser abordados a diferentes niveles de formalización en los diversos niveles educativos iniciando desde la educación básica. Dichos conceptos deben ser parte del bagaje de conocimientos que los profesores de secundaria deben tener y la mayor parte de ellos han sido tomados en cuenta para nuestro análisis del conocimiento de los profesores: experimentos aleatorios, eventos y espacio muestral, regla de la adición de probabilidades, independencia y probabilidad condicional, equidistribución de la probabilidad, combinatoria, variables aleatorias, ley de los grandes números, muestreo, modelado y simulación.

## **METODOLOGÍA**

### **Sujetos de estudio y contexto de la investigación**

El presente estudio se llevó a cabo con 80 profesores mexicanos en ejercicio en el sistema de secundarias técnicas del estado de Sinaloa, de los cuales el 85% tenía estudios relacionados con docencia de las matemáticas (licenciatura y normal superior) y el otro 15% contaba con una carrera universitaria. Los profesores se encontraban participando en un curso sobre uso de un software de geometría dinámica que era impartido por uno de los autores, y en el cual se le pidió su colaboración para participar en la investigación. El promedio de experiencia docente de los profesores era de 18 años con rango de 2 a 37 años.

### **Criterios para el diseño del cuestionario**

Con el propósito de que el cuestionario para evaluar los conocimientos de los profesores tuviera validez de contenido, consideramos el contenido de probabilidad del programa de matemáticas y los objetivos en términos de conocimientos y habilidades que el estudiante debe

desarrollar a lo largo del curso (ver tabla 1); con ello buscamos identificar además, los desafíos que el nuevo programa representa para los profesores. El cuestionario contemplaba 11 preguntas de opción múltiple y 6 preguntas de respuesta abierta, una de las cuales tenía a su vez cuatro incisos (ver anexo). La mayoría de las preguntas fueron tomadas de la literatura y algunas fueron diseñadas por los autores para la investigación.

Tabla 1: *Relación entre ítems de cuestionario y contenidos de Probabilidad*

Tema	Número de ítem	Propósito
Aleatoriedad, secuencias aleatorias y sus propiedades	1, 12	Identificar propiedades de secuencias aleatorias y heurística de representatividad
Regla del producto de probabilidades	2, 5, 6, 11, 13	Identificar variables de tarea y estrategias de resolución
Regla de la adición de probabilidades	10, 14	Identificar intersección de eventos y exclusión, y estrategias de resolución
Interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial	3, 7, 9	Identificar variabilidad y estabilidad de las frecuencias de resultados de un experimento aleatorio
Razonamiento combinatorio y cálculo de probabilidades	4, 13, 16, 17	Identificar razonamiento combinatorio y uso de representaciones gráficas.
Simulación mediante urnas de Bernoulli	8	Identificar parámetros para simulación
Juegos equitativos y no equitativos	13	Identificar de condiciones de un juego equitativo y equiprobabilidad
Introducción a la probabilidad condicional	15	Identificar razonamiento con eventos condicionantes y condicionados

## ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Se analizaron las respuestas de los profesores a los diferentes ítems y se elaboró la tabla 2 con el porcentaje de respuestas correctas a cada uno de ellos, teniendo en cuenta además la clasificación temática en la tabla 2. La tabla 2 permitió identificar y clasificar los ítems por nivel de dificultad en tres categorías (baja, media y alta). Adicionalmente se consideraron algunos aspectos del conocimiento de probabilidad para la enseñanza definidos por Even y Kvatinsky (2010) para el análisis e interpretación de los resultados.

Tabla 2. *Porcentajes de respuestas correctas de los ítems del cuestionario por categoría temática*

No. de ítem	Categoría temática	Resultados	
		Respuestas correctas	Porcentaje
1	Aleatoriedad, secuencias aleatorias y sus propiedades	42	52%
2	Regla del producto de probabilidades	46	58%
3	Enfoque frecuencial de la probabilidad	57	71%
4	Razonamiento combinatorio y cálculo de probabilidades	42	53%
5	Regla del producto de probabilidades	41	51%
6	Regla del producto de probabilidades	24	30%

7	Enfoque frecuencial de la probabilidad	19	24%
8	Simulación mediante urnas de Bernoulli	39	49%
9	Enfoque frecuencial de la probabilidad	41	51%
10 a	Cálculo de probabilidades	38	48%
10 b	Regla de la adición de probabilidades	14	18%
10 c	La probabilidad de un evento complementario	56	70%
10 d	Regla de la adición de probabilidades	51	64%
11	Regla del producto de probabilidades	27	34%
12	Aleatoriedad, secuencias aleatorias y sus propiedades	15	15%
13	Juegos equitativos, Razonamiento combinatorio, Regla del producto de probabilidades	25	31%
14	Regla de la adición de probabilidades	24	30%
15	Introducción a la probabilidad condicional	50	63%
16	Razonamiento combinatorio y cálculo de probabilidades	18	23%
17	Razonamiento combinatorio y cálculo de probabilidades	36	45%

### Clasificación de los ítems por grado de dificultad

Sobre la base de los resultados anteriores y apoyándonos en el cuadro II, podemos definir tres niveles en el grado de dificultad que exhibieron los profesores al responder los ítems del cuestionario:

- *Nivel alto de dificultad (menos del 40% de respuestas correctas)*

En esta categoría se ubican los ítems 6, 7 y 11, los cuales corresponden a la regla del producto de probabilidades (una sola urna con reemplazo, en contexto de poblaciones con porcentajes como probabilidades) e interpretación de probabilidades a través de frecuencias representadas en gráficas. Por su parte, los ítems de respuesta abierta, 10b, 11, 12, 13, 14 y 16, los cuales corresponden a la regla de la suma de probabilidades con intersección, identificación de propiedades de secuencias aleatorias y razonamiento combinatorio también resultaron difíciles para la mayoría de los profesores.

- *Nivel medio de dificultad (entre 40% y 60% de respuestas correctas)*

En esta categoría se ubican los ítems 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10a y 17, los cuales corresponden a propiedades de secuencias aleatorias, regla del producto de probabilidades en contexto de urnas separadas, simulación con modelo de urnas, razonamiento combinatorio y enfoque frecuencial de la probabilidad.

- *Nivel bajo de dificultad (más del 60% de respuestas correctas)*

En esta categoría se ubica únicamente el ítem 3, el cual corresponde a la interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial en un contexto no gráfico. En los ítems de respuesta abierta 10c, 10d y 15, los cuales corresponden a la probabilidad de un evento complementario, regla de la suma de las probabilidades (sin intersección), introducción a la probabilidad condicional.

### Representaciones y Modelos

Los modelos permiten expresar axiomas, propiedades y teoremas importantes de la probabilidad a través de los cuales es posible calcular probabilidades de eventos o variables

aleatorias. Sin embargo, los resultados muestran que los profesores utilizaron pocas representaciones, tales como diagramas de árbol, diagramas de Venn, tablas y fórmulas en el cálculo de probabilidades, y en algunos casos en los que fueron utilizadas se observaron inconsistencias en su construcción, lo cual les hubiera permitido visualizar espacios muestrales, eventos favorables y frecuencias de resultados y con ello depender menos de estrategias heurísticas y creencias intuitivas.

### **Enfoques alternativos de la probabilidad**

El conocimiento sobre el enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad se exploró a través de diversos ítems del cuestionario. En el caso del enfoque frecuencial, a excepción del ítem 3 que resultó sencillo dado el contexto en que se presentó, los resultados muestran que los profesores tuvieron dificultades para interpretar probabilidades por medio de frecuencias y el efecto que tiene sobre ellas el tamaño de la muestra o número de repeticiones; incluso muchos profesores no respondieron algunos ítems, lo que evidencia el desconocimiento sobre el enfoque frecuencial de la probabilidad; en general se puede ver que no se aprecia correctamente la variabilidad a que se encuentran sujetas las frecuencias cuando se tienen pocas observaciones y se incurre en el sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra.

### **La naturaleza de la teoría de la probabilidad**

El conocimiento matemático de los profesores que apoya su conocimiento sobre probabilidad presenta diversas limitaciones según los resultados del cuestionario. El razonamiento combinatorio necesario para calcular probabilidades desde el enfoque clásico mostró ser muy superficial, al incurrir en diversos errores de identificación del espacio muestral y falta de uso de representaciones adecuadas. Ejemplo de ello lo representa el ítem 13, que a simple vista parece un juego justo, dado que en ambos casos existe la misma probabilidad de que la aguja caiga en el área sombreada; sin embargo la enumeración del espacio muestral permite ver que el juego tiene cuatro posibles resultados, de los cuales sólo uno es favorable; este mismo ítem pudo ser resuelto con la regla del producto de probabilidades.

## **CONCLUSIONES**

Los resultados del estudio señalan que la probabilidad es un área complicada para los profesores de secundaria, ya que en sólo cuatro ítems tuvieron porcentajes de respuestas correctas superiores al 60%. Entre los conceptos de mayor dificultad sobresale la aplicación de la regla del producto de probabilidades en contexto de reemplazo, la regla de la suma de probabilidades en eventos no mutuamente excluyentes y la interpretación de probabilidades desde un enfoque frecuencial. Se observó además un conocimiento matemático y razonamiento combinatorio endeble para apoyar el conocimiento de probabilidad en la mayoría de los profesores y poco uso y dominio de representaciones como diagramas de árbol y diagramas de Venn; lo cual condujo a los profesores a utilizar estrategias heurísticas y razonamientos intuitivos que derivaron en algunos sesgos, como la insensibilidad al tamaño de muestra al interpretar resultados de secuencias aleatorias.

## **BIBLIOGRAFIA**

Batanero, C., Godino, J. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12(1). <http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html>



- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning*. Springer Science+Business Media, Inc., 15-37
- Begg, A. y Edwards, R. (1999). Teacher's ideas about teaching statistics. *Paper presented at the combined annual meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne Australia.
- Da Ponte, J. P. (2008). Preparing Teachers to Meet the Challenges of Statistics Education. *Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference*. C. Batanero.; G. Burrill & Ch. Reading (eds.). Joint ICMI/IASE Study. Monterrey México.
- Even, R. y Kvatinsky, t. (2010). What mathematics do teachers with contrasting teaching approaches address in probability lessons? *Educational Studies in Mathematics*, 74, 207-222.
- Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?.
- Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). Creating Statistical Reasoning Environments. En J. B. Garfield & D. Ben-Zvi, D. (eds.). *Developing Students' Statistical Reasoning*, Springer Science+Business Media, 91-114.
- Green, D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D.R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G.M. Constable (eds.). *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*. University of Sheffield.
- Haller, S. K. (1997). *Adopting probability curricula: The content and pedagogical content knowledge of middle grades teachers*. Unpublished doctoral dissertation. University of Minnesota.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Inzunsa, S. y Juárez, J. A. (2007). Evaluación de Cultura y Razonamiento Estadístico: Un estudio con profesores de preparatoria. *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Querétaro México.
- Jones, G., Langrall, C.W. y Mooney, E.S. (2007). Research in Probability: Responding to Classroom Realities. En F. Lester (ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston VA.
- Kvatinsky, T. y Even, R. (2002). Framework for teacher knowledge and understanding about probability. *Proceedings of Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* Hawthorn, VIC: International Statistical Institute
- Langrall, C. y Mooney, E. (2005). Characteristics of elementary school student's probabilistic reasoning. En G. Jones (ed.). *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning*. Springer Science+Business Media, Inc. 95-119.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA.
- Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed.). *Matemática Educativa, 30 años. Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*.
- Pratt, D. (2005). How do teachers Foster student's understanding of probability. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning*. Springer Science+Business Media, Inc., 171-189
- Sánchez, E. (2000). Investigaciones didácticas sobre el concepto de eventos independientes en probabilidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(3), 305-330.
- Sánchez, E. (2002). Teachers' beliefs about usefulness of simulation with the educational software fathom for developing probability concepts in statistics classroom. *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*.
- Sánchez, E. y Hernández, R. (2003). Variables de tarea en problemas asociados a la regla del producto en probabilidad. *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual*. E. Filloy (Ed.). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN y Fondo de Cultura Económica, 295-313.

- Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Revista Educación Matemática*, 21(2), Editorial Santillana, 39-77.
- Shaughnessy, M. (2003). Research on student's understanding of probability. En J. Kilpatrick, W. G. Martín y D. Schifter (Eds.). *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. 216-226. National Council of Teachers of Mathematics. Reston VA.
- SEP (2006). *Educación Secundaria. Matemáticas*. Programas de Estudio. Secretaría de Educación Pública. México.
- Stohl, H. (2005). Probability and Teacher Education and Development. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for the teaching and learning*. New York, NY: Springer Verlag, 345-366.
- Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of the chance and data. *Journal of the Mathematics Teacher Education* 4(4), 305-337.

## CUESTIONARIO

- ¿Cuál de las siguientes sucesiones consideras que es más probable de aparecer al lanzar una moneda equilibrada al aire 5 veces?  
a) AAASS      b) ASSAS      c) ASASA      d) SASSS  
e) **Las cuatro sucesiones son igual de probables.**  
Justifica tu respuesta (*Adaptado de Kahneman, Slovic y Tversky, 1982*)
- Se tienen dos urnas: la urna A tiene dos bolas, una marcada con la letra a y otra con la letra b. La urna B tiene tres bolas, una marcada con el número 1, otra con el número 2 y otra con el número 3. Se extrae al azar una bola de la urna A y otra bola de la urna B. ¿Cuál es la probabilidad de sacar la bola con la letra a y la bola con el número 3?  
a)  $\frac{5}{6}$       b)  $\frac{2}{5}$       c)  $\frac{1}{6}$       d) Otra  
Justifica tu respuesta: (*Tomado de Sánchez y Hernández, 2003*)
- El siguiente mensaje está impreso en un frasco de prescripción médica. Advertencia: En aplicaciones en área de la piel, existe un 15% de probabilidad de que se presente irritación. Si se presenta irritación, consulte a su médico. ¿Cuál de los siguientes enunciados consideras que es la mejor interpretación de la advertencia?  
a) No usar el medicamento en la piel, pues existe buena posibilidad de que se presente irritación.  
b) Para aplicación en la piel, aplicar solamente el 15% de la dosis recomendada.  
c) Si se genera irritación, esto afectará probablemente solo el 15% de la piel.  
d) **Aproximadamente 15 de cada 100 personas que usan este medicamento se les irrita la piel.**  
e) Hay una mínima posibilidad de que se irrite la piel usando este medicamento.  
Justifica tu respuesta: (*Tomado de Garfield y Ben-Zvi, 2008*)
- Cuando se lanzan dos dados simultáneamente, ¿Cuál de los siguientes eventos consideras que es más probable?:  
a) **Obtener un 5 y un 6**  
b) Obtener 6 en los dos dados  
Justifica tu respuesta (*Tomado de Green, 1983*)
- Se tienen dos urnas: la urna A contiene dos bolas negras y una blanca. La urna B contiene una bola negra y cuatro blancas. Se extrae al azar una bola de la urna A y otra bola de la urna B. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas negras?  
a)  $\frac{2}{15}$       b)  $\frac{13}{15}$       c)  $\frac{3}{8}$       d) Otra  
Justifica tu respuesta (*Tomado de Sánchez y Hernández, 2003*)

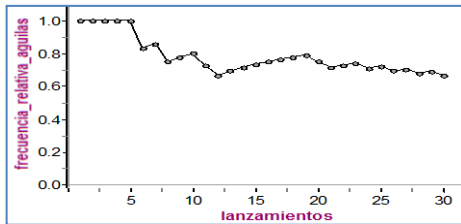
6. Se tiene una urna con tres bolas: una negra y dos blancas. Se extrae una bola al azar, se ve su color y se devuelve a la urna. Se mezclan las bolas y se vuelve extraer una bola al azar y se ve su color. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra las dos veces?

- a)  $\frac{2}{6}$                       b)  $\frac{2}{3}$                       c)  $\frac{1}{9}$                       d) Otra

Justifica tu respuesta. (Tomado de Sánchez y Hernández, 2003)

7. La siguiente gráfica representa las frecuencias relativas de águilas que se obtuvieron al lanzar una moneda al aire 30 veces seguidas. Con base en la gráfica contesta lo siguiente:

- a) La moneda era legal (equilibrada)  
b) La moneda estaba sesgada (desequilibrada)  
c) **No es posible saber si la moneda estaba sesgada o no, con los datos de la gráfica**



Justifica tu respuesta.

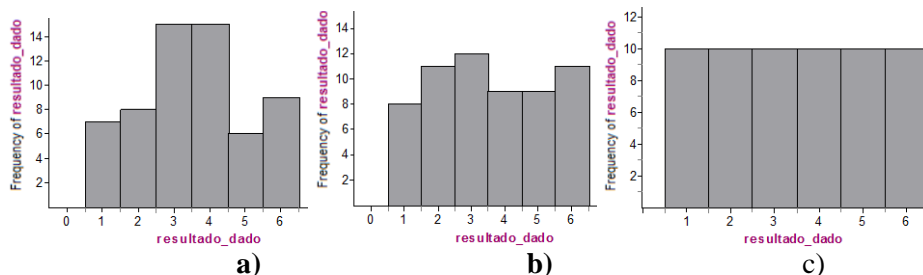
8. Un jugador de béisbol tiene un promedio de bateo en una temporada de 0.300. Es decir, el 30% de las veces que se coloca en la caja de bateo pega un hit. Se desea hacer una simulación de la situación anterior con canicas rojas y azules colocadas en una urna, de tal forma que canica azul representa “pegar hit” y canica roja representa “no pegar hit”. Selecciona la composición de la urna y las condiciones que representan la situación anterior.

- a) Una urna con 3 canicas azules y 7 rojas. La selección se realiza sin reemplazo  
b) **Una urna con 3 canicas azules y 7 rojas. La selección se realiza con reemplazo.**  
c) Una urna con 3 canicas rojas y 7 azules. La selección se realiza con reemplazo.

Justifica tu respuesta

9. Un dado equilibrado fue lanzando al aire 60 veces, ¿Cuál de las siguientes gráficas te parece más apropiada para representar los resultados obtenidos?

Justifica tu respuesta.



10. En una bolsa negra se han colocado 10 canicas, de las cuales 5 son de color rojo y están numeradas del 1 al 5; 3 son de color verde y están numeradas del 6 al 8, y 2 canicas son azules y están numeradas con el 9 y 10. Si se selecciona una canica al azar de la bolsa, determine la probabilidad de que:

- a) ¿Salga una canica verde y un número impar? **Respuesta: 1/10**  
b) ¿Salga una canica azul o un número par? **Respuesta: 6/10**  
c) ¿No salga un número par? **Respuesta: Respuesta: 5/10**  
d) ¿Salga azul o roja? **Respuesta: 7/10**

11. En un almacén 90% de las manzanas son rojas y 10% son verdes. Si se toman al azar dos manzanas, ¿Cuál es la probabilidad de que ambas manzanas sean rojas?

a)  $\frac{81}{100}$                       b)  $\frac{18}{10}$                       c)  $\frac{18}{20}$                       d) Otra

Justifica tu respuesta. (Tomado de Sánchez y Hernández, 2003)

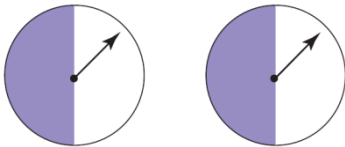
12. En una clase se pidió a los niños que lanzaran una moneda 40 veces. Algunos hicieron el experimento, pero otros hicieron trampa y sólo colocaron el resultado como si realmente lo hubieran hecho. Utilizaron A para águilas y S para soles. A continuación se muestran los resultados de Juan y Pedro.

Juan: A S A S S A A S A S A A S S A S S A A S S A S A A S S A S A S A S A S A S A S A S A S A S A S A S

Pedro: A S S S A S S A S A S S S A S S S S A A S S S A S S A S S S S A S S S S A S S S S A S

¿Consideras que tanto Juan como Pedro hicieron el experimento? ó ¿Quién sí lo hizo y quién no? Justifica tu respuesta. (Tomado de Batanero, Godino y Roa, 2004)

13. Un juego de la feria consta de dos ruletas como las que se muestran en la figura. Un jugador gana un premio sólo si ambas flechas caen en el área sombreada, cuando se hace girar una vez cada una de las flechas.



¿Consideras que el juego anterior es equitativo? Justifica tu respuesta

**Respuesta: No es equitativo** (Tomado de Shaughnessy, 2003).

14. Consideren el experimento de lanzar un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par o menor que tres?

**Respuesta: 2/3**

15. Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas rojas. Seleccionamos dos bolas al azar, una después de la otra y sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea roja dado que la primera también fue roja?

**Respuesta: 1/3**

16. Santiago tiene una bolsa negra que contiene cuatro canicas, cada una de ellas está etiquetada con los siguientes dígitos: 4, 6, 8 y 1. El pide a un compañero que seleccione una canica de la bolsa y anote el número, y después regresa la canica a la bolsa. Este procedimiento se repite hasta completar 3 dígitos. ¿Cuántos números diferentes de 3 dígitos se espera que puedan obtener el amigo de Santiago?

**Respuesta: 64 dígitos**

17. Una bolsa oscura contiene únicamente dos fichas de igual tamaño. Una de ellas tiene sus dos caras rojas, la otra tiene una cara azul y la otra roja. Una persona saca una ficha y muestra solo una de sus caras y resulta ser roja. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones consideras correcta?

a) Es más probable que esta ficha tenga las dos caras rojas

**b) Es igualmente probable que esta ficha sea la que tiene la otra cara azul**

c) Es menos probable que esta ficha sea la que tiene las dos caras rojas que la de cara roja y azul.

Justifica tu respuesta