



La noción de función mediada por entornos dinámicos. El caso del punto dinámico.

Rosa Ana **Ferragina**

Centro de Estudios en Didácticas Específicas. Universidad Nacional de San Martín.
Argentina.

rosaferragina_1@hotmail.com

Leonardo José **Lupinacci**

Centro de Estudios en Didácticas Específicas. Universidad Nacional de San Martín.
Instituto de Estudios Iniciales. Universidad Nacional Arturo Jauretche.

Argentina

leolupinacci@yahoo.com.ar

Resumen

Esta comunicación propone mostrar cómo la implementación de un recurso de enseñanza con tecnología dinámica, destinado a la presentación de la función como modelizadora en el estudio de variaciones con magnitudes geométricas, puede constituirse como el inicio de nuevos interrogantes sobre el concepto de función. El desarrollo del trabajo se realizará a partir del análisis de las producciones de los alumnos, que condujeron a nuevas preguntas sobre este objeto matemático mediado por la tecnología: la noción de función que subyace en el punto dinámico. Los interrogantes que analizaremos son: ¿Qué concepto de función está subyacente en un software de geometría dinámica, como GeoGebra? ¿Con cuáles de los desarrollados históricamente, sobre la función, tiene más relación? ¿La construcción de un punto dinámico establece una función?, y si es así, ¿de qué modo la caracteriza?

Palabras clave: función, variación, dependencia, TIC, entornos dinámicos, punto dinámico.

Introducción

El presente texto se enmarca en un proyecto de investigación en red titulado “Recursos tecnológicos para y por los docentes destinados a la enseñanza de la Matemática en Argentina y Francia” y que se realiza desde el área Didáctica de la Matemática por la Universidad Nacional de San Martín, la Universidad Nacional de Río Negro (ambas de Argentina) y el École Normale Supérieure de Lyon, Francia. En el contexto de la investigación se trabajó colaborativamente en el armado e implementación de un recurso de enseñanza, con un grupo de profesores 5to año de una Escuela Secundaria Técnica en la provincia de Buenos Aires, Argentina. Los profesores

decidieron re elaborar un recurso preexistente,¹ en donde la función se constituye como una herramienta de modelización para el estudio de variaciones de magnitudes geométricas. La elección realizada se ajustaba a los contenidos que planteaban desarrollar en esa etapa del año y a los propósitos didácticos establecidos en su planificación.

Esta comunicación se basa en el análisis de cuatro ítems (e, f, g y h) del recurso (ver Anexo 1). Éstos se refieren a la construcción, mediante un software de geometría dinámica, de un punto que exprese la variación entre dos magnitudes geométricas y su respectiva interpretación. Motiva esta elección, la dificultad presentada por los alumnos en el desarrollo de estos ítems, puesto que una fallida simbolización de las componentes del punto, condujo a que se detuvieran las actividades grupales para que los profesores realizaran aclaraciones e indicaciones. Los alumnos no interpretaban en esa instancia de trabajo el motivo por el que necesitaban la construcción de ese punto.

El desarrollo del trabajo se realizará a partir del análisis de las producciones de los alumnos, que condujeron a nuevas preguntas por parte de los investigadores acerca de este objeto matemático mediado por la tecnología: la noción de función que subyace en el punto dinámico.

Las producciones de los alumnos

En la implementación del recurso de enseñanza, una vez construida por los alumnos la figura a analizar (rectángulo inscrito en un cuarto de círculo de radio 6), se propuso el estudio de la variación del área del rectángulo en relación a la longitud de su base, tarea para la cual se propone desde la consigna construir un punto que refleje tal relación.

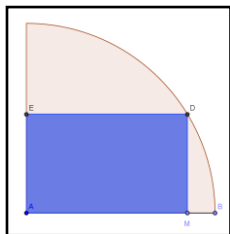


Figura 1. Construcción dinámica a realizar por los alumnos

En GeoGebra, los puntos pueden ser construidos ingresando sus coordenadas por medio de la Barra de Entrada, coordenadas que no necesariamente deben ser numéricas sino que el software admite también el ingreso de símbolos que hagan referencia a magnitudes de objetos ya construidos previamente.

En cuanto a la construcción del punto por parte de los alumnos, si bien en general identificaron las variables a relacionar (longitud de la base y área del rectángulo), se presentaron dificultades en la construcción. Pareció existir una resistencia a identificar que las coordenadas de un punto puedan ingresarse con valores que no sean numéricos, idea que surge ante preguntas por parte de los alumnos acerca de “la fórmula” que se debe ingresar en el software, indicando que tal relación debería definirse por medio de una expresión algebraica y no por un punto.

¹ La actividad seleccionada por los docentes está presente originalmente en Barbin & Douady (1996), siendo posteriormente adaptada para ser trabajada con software GeoGebra en Ferragina (2012). Los profesores tomaron estas referencias para adaptar la actividad a sus propósitos didácticos.

Algunas respuestas de los alumnos a dicha tarea fueron:

I. "El área del rectángulo varía dependiendo de M , modifica su tamaño. Las coordenadas de dicho punto deberían ser $(x; y)$ variable independiente y dependiente, que en el problema se representan como base y área. La base es la variable independiente porque no necesita de nadie para poder moverse, en cambio, el área es la variable dependiente que depende de la base para cambiar sus medidas".

II. "Las coordenadas deben ser la base del rectángulo y su área porque el área depende de la base del rectángulo".

III. "Las coordenadas de dicho punto son P igual $(a_1, \text{polígono1})$. Porque utilizamos el área y los lados del polígono para poder hacer nuestro punto".

IV. " a_1 (base) Polígono1 (área). Seleccionamos esos porque a_1 representa la base y polígono1 representa el área del rectángulo".

En las dos primeras respuestas encontramos referencias específicas a la identificación de las variables, resaltando en este punto a la relación de dependencia de una sobre la otra. En las respuestas III y IV aparecen ejemplos que hacen referencia a los nombres que el software otorgó a los elementos construidos y que son tomados para la construcción del punto. La respuesta que hace referencia a las coordenadas del punto como $(a_1, \text{polígono1})$ fue una expresión que circuló por distintos grupos de alumnos a partir de interacciones y consultas. Esto provocó que algunos grupos utilizaran indistintamente estos "nombres" de los objetos, independientemente de su propia construcción o que los nombres establecidos por el software a estos elementos no fueran los mismos, cuestión posible puesto que cada grupo de alumnos construyó su propia figura dinámica.

La continuidad del trabajo permitió analizar los desplazamientos del punto construido a través del rastro dejado en la pantalla por dicho punto, acciones que posibilitaron centrar el análisis en las variables utilizadas para la construcción del punto y en sus variaciones.

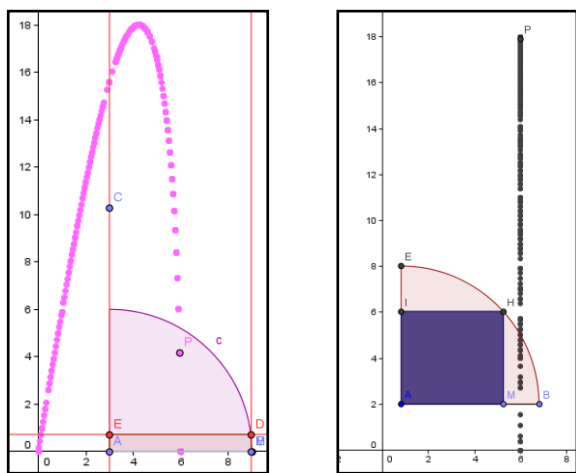


Figura 2: Rastro dejado por un punto dinámico construido correctamente (izquierda) e incorrectamente (derecha).

El análisis de estas variaciones mediante el rastro dejado por el punto, permitió contrastar entre lo esperado y lo obtenido. En la figura 2, se presenta a la izquierda, el rastro dejado por un punto dinámico cuyas coordenadas son correctas, mientras que la imagen de la derecha se corresponde

con la producción de un grupo de alumnos que replicó la simbología utilizada por el grupo anterior (a_1 y polígono1), siendo que los elementos implicados no fueron llamados igual por el software (específicamente, en la construcción el valor a_1 hacía referencia a la distancia AB, que en todas las construcciones y de acuerdo al enunciado, tenía el valor fijo 6).

Otras construcciones del punto dinámico provocaron que la pantalla del software devolviera también imágenes inesperadas. En el caso de la figura 3, la construcción del punto estuvo dada por las variables pertinentes, pero la separación de las mismas en la sintaxis utilizada fue realizada por medio del punto y coma, símbolo generalmente utilizado por los alumnos en el trabajo con lápiz y papel para representar un punto. Esta sintaxis es reconocida por el entorno informático como el ingreso de un punto dadas sus coordenadas polares y no sus coordenadas cartesianas.

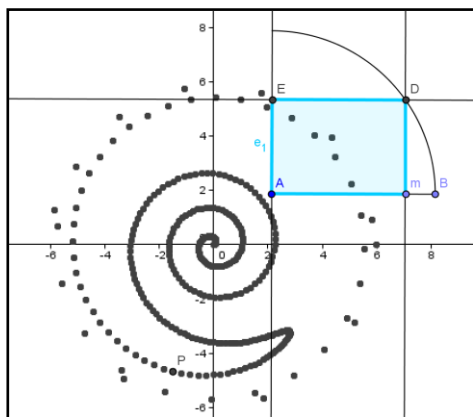


Figura 3: Inconveniente con la sintaxis

En este caso particular, los alumnos mencionaron lo “extraño” de la representación obtenida, pero no pudieron argumentar acerca de las cuestiones de por qué dicha trayectoria no podía corresponder con los valores de las magnitudes puestas en juego. Si bien el entorno GeoGebra permite las construcciones geométricas sin la mediación de un lenguaje específico de programación, las herramientas de cálculo algebraico que ofrece requieren del conocimiento de ciertos comandos y de la sintaxis de los mismos, estructuras que en algunos casos difieren de las utilizadas cotidianamente en el entorno del lápiz y papel. Esto resalta que los entornos informáticos no son transparentes, planteando la necesidad de familiarización tanto de los aspectos específicamente matemáticos como de los aspectos no matemáticos (Artigue; 1991).

Las producciones anteriores evidencian la dificultad de muchos alumnos de dotar de sentido al punto construido, principalmente al no cuestionar las representaciones obtenidas o al no contrastar lo esperado con lo obtenido. Esto produjo que, en algunos casos, se detuviera el trabajo grupal y los docentes tuvieron que guiar la construcción del punto, centrando el análisis en las técnicas matemáticas e informáticas para su elaboración. Luego de obtenida la representación gráfica correspondiente a la variación buscada, los alumnos no presentaron inconvenientes para identificar los valores correspondientes al área máxima del rectángulo y a la longitud de la base correspondiente, obteniendo los valores a partir de la lectura sobre los ejes cartesianos, incluso utilizando el zoom. Algunos alumnos argumentaron dichas técnicas en función de la imposibilidad de contar con una fórmula que les permitiera conocer el “valor exacto”. Por un lado, esta ausencia de una expresión general, permitió avanzar con la implementación del recurso en pos de buscar dicha expresión y, además deja entrever la

posibilidad de diferentes concepciones en relación al concepto de función.

La implementación de este recurso, llevó al grupo de investigadores al planteo de los siguientes interrogantes: ¿Qué concepto de función está subyacente en un software de geometría dinámica, como GeoGebra? ¿Con cuáles de los desarrollados históricamente, sobre la función, tiene más relación? ¿La construcción de un punto dinámico establece una función?, y si es así, ¿de qué modo la caracteriza?

Acerca del concepto de función

Es posible identificar tres líneas de caracterización de la función, en el recorrido histórico realizado por las diferentes definiciones adoptadas para este concepto (Boyer, 1994).

I. Una variación entre cantidades, estableciendo una dependencia entre esas cantidades variables: que se vislumbran en los trabajos de Oresme y Galileo.

Desde el siglo XII, se crean en Europa universidades que comienzan a discutir los pensamientos de la antigüedad clásica, en especial las ideas de Aristóteles referentes a la naturaleza del infinito y la divisibilidad de las cantidades, en su tratado de física. Sobre estas ideas, se basa el trabajo de Nicolás Oresme, profesor de la Universidad de París, a mediados del siglo XIV. Oresme propone una aproximación geométrica, frente a los estudios cinemático- aritméticos analizados hasta el momento. Utiliza segmentos rectilíneos para representar todo lo que varía, puesto que todo lo medible puede imaginarse como una cantidad continua, pasando después a una representación de diversos tipos de cambio. Los aportes de Galileo se basan en lo realizado por Oresme, hasta las presentaciones gráficas son similares. Pero, a diferencia de Oresme, los estudios cuantitativos de movimiento de Galileo se basan en experiencias realizadas y que luego le permiten establecer leyes entre magnitudes que son auténticas relaciones funcionales. Todavía, este tipo de relaciones se expresan verbalmente, por una tabla o por una representación gráfica.

II. Una dependencia entre magnitudes mediante la obtención de una expresión algebraica o fórmula: mediante los aportes de Descartes, Leibniz, Bernoulli.

Con *La Géométrie* de Descartes, es posible interpretar a las curvas por medio de ecuaciones. Además, en este texto aparece por primera vez que una ecuación en x e y es un modo de expresar dependencia entre dos cantidades variables, tal que a partir de valores de una de ellas es posible calcular valores de la otra. Leibniz y Jean Bernoulli, en sus cartas, escriben intentos de cómo expresar mediante una palabra cantidades que dependen de una cierta variable, para designar lo que hasta el momento eran expresiones analíticas. Bernoulli, en sus trabajos, propone varias notaciones para indicar que se trata de una función de x , entre ellas la más parecida a la actual es ϕx .

III. Sólo una correspondencia, como relación o regla, entre dos conjuntos de números o magnitudes: con las definiciones de Cauchy, Dirichlet y el grupo Bourbaki.

Dirichlet, en su cátedra de análisis de Gotinga, expuso la formulación más general de función como correspondencia entre dos conjuntos de números, cualquiera sea la forma en que se establece esa correspondencia:

“Designamos por \mathbf{a} y \mathbf{b} dos valores fijos y por \mathbf{x} una magnitud variable comprendida entre \mathbf{a} y \mathbf{b} . Si a todo \mathbf{x} corresponde un valor finito $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ que varía de forma continua cuando \mathbf{x} varía también de forma continua desde \mathbf{a} hasta \mathbf{b} diremos que \mathbf{y} es una función continua para ese intervalo. Aquí no es del todo necesario que \mathbf{y} se exprese en función de \mathbf{x} según una misma ley

en todo el intervalo; ni es incluso necesario prever una expresión algebraica explícita entre x e y .” (Dirichlet, citado por Lacasta (1998), p 46)

En las primeras definiciones de función, los conceptos centrales son el cambio y la dependencia, estando presente la correspondencia de un modo implícito. Cuanto más se avanza con las definiciones modernas, hay menos indicio de cambio y dependencia, para poner en primer plano a la función como una correspondencia pura entre dos conjuntos. Siendo esta última caracterización de difícil acceso para los alumnos de la escuela secundaria, porque es poco intuitiva si es el primer acercamiento al concepto que tienen. (De Cotret, 1988)

Ahora se podría preguntar qué definición de función está presente en los tipos de software que se emplean en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, ¿han modificado ese concepto como se realizó en su propia historia?

La definición de función mediada por un software de geometría dinámica

Cuando un concepto matemático está influido por la utilización de alguna tecnología informática, es posible que se modifiquen: aspectos asociados a las transformaciones de lenguaje que posibilitan su modelización en estos entornos, los medios de representación que permiten su desarrollo y a las técnicas que posibilitan el acercamiento a tal concepto. Este proceso de transformación, denominado transposición informática (Balacheff, 2000) deja en evidencia la no neutralidad de las herramientas informáticas en cuanto a los objetos de enseñanza gestionados con estas tecnologías, que imprimen ciertas características y restricciones a los objetos del saber que median y los convierten en “objetos modelizados”.

Es posible considerar a la función como un objeto de enseñanza que puede ser modelizado mediante el empleo de algún software determinado. ¿Qué características de la función se pueden ver afectadas por este proceso de transposición informática? En primer término, lo referente al lenguaje específico utilizado por la herramienta en particular. Luego, los marcos de representación (algebraico, numérico o geométrico) que están presentes en este tipo de software, permitiendo varios tratamientos para el concepto de función y que posibilitan la construcción de concepciones muy diversas de ese concepto. Estas concepciones no son ajenas a las prácticas específicas propuestas desde la gestión de clase pero, seleccionar una herramienta informática en particular para el tratamiento del concepto de función, supone, desde el rol docente, asumir ciertas condiciones para su desarrollo.

La presentación de las herramientas y comandos que posee un software de geometría dinámica, en este caso GeoGebra, para el tratamiento de funciones está poniendo su énfasis en su expresión algebraica para definirla (como en los trabajos matemáticos del siglo XVII) y luego, si es necesario, usar otros registros de representación (gráfica, tablas, transformaciones). Pero un software de características dinámicas, brinda la posibilidad de interactuar con los objetos construidos y simbolizados en tiempo real. La manipulación de los mismos a partir del arrastre y la utilización de otras herramientas y comandos, permitiría dar ese dinamismo a las funciones como una variación entre magnitudes, característica que analizaremos en el siguiente apartado.

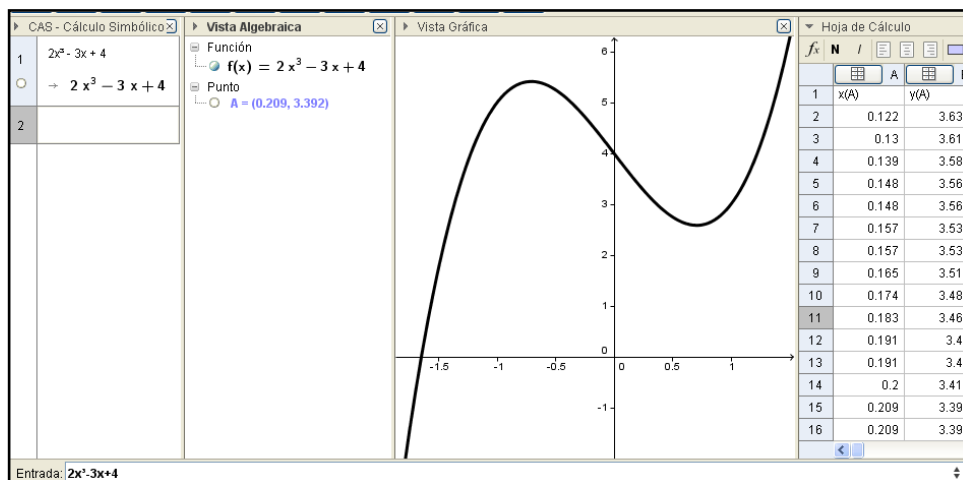


Figura 4: GeoGebra viabiliza el trabajo con diferentes registros matemáticos para un mismo objeto

Punto dinámico, ¿una función encubierta?

La posibilidad de transformación de cada objeto construido u obtenido mediante un software de geometría dinámica, permitiría interpretar de un modo particular el siguiente párrafo:

“La introducción del continuo de los números hace posible asociar a cada segmento de línea recta un número real determinado por su longitud; sin embargo, podemos ir mucho más lejos: no sólo la longitud, sino todo objeto geométrico y toda operación geométrica pueden ser remitidos a la esfera de los números. Los pasos decisivos en la aritmetización de la geometría fueron dados tan temprano como en 1629 por Fermat y en 1637 por Descartes. La idea fundamental de la geometría analítica es la introducción de “coordenadas”, es decir, números asociados o coordinados con un objeto geométrico que lo caracterizan por completo.” (Courant y Robbins, 2006, p 99)

Es posible, entonces, considerar que el objeto geométrico asociado a números es un punto. Esto no es una novedad para la expresión clásica de un punto mediante sus coordenadas, pero: ¿qué sucede si se considera que esos números pueden representar la medida de una longitud, una amplitud, un área, un volumen, un perímetro, etc.? El objeto geométrico es ahora un punto de coordenadas definidas mediante las medidas de otras magnitudes variables, que podrían controlar cómo se desplaza ese punto en el plano gráfico. A un punto construido con esas características es lo que llamamos punto dinámico. Algunos ejemplos:

I. Al seleccionar la herramienta Segmento de Longitud Fija, el software construye un punto (A, por ejemplo) y pide el ingreso de una medida (3, por ejemplo). Cuando se determina el otro extremo del segmento (B), es posible comprobar que éste no es único. Se generan todos los segmentos de la longitud ingresada respecto del primer punto construido. El punto B es un punto dinámico porque al desplazarlo construye no sólo un segmento sino un lugar geométrico: circunferencia de centro A y radio 3, según este ejemplo.

II. Construimos un punto cualquiera y una recta. Si utilizamos la herramienta Refleja Objeto en Recta, el punto simétrico que se obtiene también es dinámico. La posición de este punto, depende de la ubicación del primer punto y de la recta. Si se desplazan estos objetos geométricos, también lo hará el punto resultante de la simetría. Pero, en esta situación, queda más oculto de qué modo se establece esa dependencia entre el objeto reflejado respecto de los

otros, porque la construcción del punto dinámico la realiza el software y hay varias condiciones geométricas que intervienen en la determinación del mismo².

III. Construimos en un software de geometría dinámica, como GeoGebra, los puntos $A = (3,2)$; $B = (x(A), 5)$ y $C = (-2, y(A))$. En este caso, consideramos que los puntos B y C son dinámicos puesto que una de sus coordenadas depende, respectivamente, de abscisa y ordenada de A. Con sólo mover el punto A, se desplazarán los otros dos puntos que también podríamos decir de qué modo se desplazan, qué representación gráfica tiene y su correspondiente simbolización.

IV. Construir un segmento AB, luego su mediatriz y sobre ella otro punto C de modo que se forme un triángulo ABC isósceles. Ese punto C es un punto dinámico porque con su propio desplazamiento sobre la mediatriz, se genera una familia de triángulos isósceles que dependen de la posición de este punto.

V. En el ejemplo anterior, es posible analizar cómo varía el área del triángulo construido si también ésta cambia la medida de la altura del segmento base AB. Para estudiar esta variación podemos construir un punto que contenga estas dos medidas: (medida de la altura, medida del área del triángulo). Este punto construido ad hoc para visualizar esa variación es un punto dinámico, sus componentes son números que se corresponden con medidas y éstas fueron determinadas anteriormente. Al desplazar el primer punto dinámico C, sobre la mediatriz, se modifica tanto el valor de la altura como el del área y, también, se desplazará el segundo punto dinámico que se ha construido con esas componentes.

El punto dinámico, desde la perspectiva del software es un objeto dependiente, construido por el usuario o por el software; de este modo, recuperaría dos características fundamentales para conceptualizar a la función: el cambio y la dependencia. El análisis de los ejemplos citados, permitiría inferir que el punto dinámico rescataría el concepto de función de los primeros tiempos en su desarrollo histórico.

Falcade (2002), propone que la herramienta de arrastre es un artefacto, que se transforma en instrumento (en el sentido de la génesis instrumental de Rabardel³) porque es lo que confiere el dinamismo a un software de geometría dinámica y, admite dos posibilidades semióticas. La primera, desplazar al objeto dentro de un determinado espacio (como puede ser la pantalla), que es uno de los elementos más sobresaliente del concepto de variable: “la generalidad”. La segunda, evocar de un modo natural, pero implícito e intuitivo, la variación en el tiempo. La autora plantea que uno de los usos de este instrumento de arrastre puede realizarse dentro de un esquema de acción, por ejemplo, con el movimiento de un punto, se obtiene el desplazamiento de otro punto que depende del primero. Este uso refiere, fundamentalmente, a establecer la noción fundamental de variable dependiente que se ha adoptado en el marco de esta investigación.

La construcción de un punto dinámico con coordenadas variables, está implicando diferentes

² Las mismas características se cumplen para las otras herramientas de ese bloque de transformación que tiene el software.

³ Para Rabardel (1995) un *artefacto* es una cosa que puede sufrir una transformación de origen humano. Además, este autor establece la diferencia entre *artefacto*, de un determinado objeto, y un *instrumento* como una construcción psicológica, puesto que este último no existe en sí mismo, se transforma en instrumento cuando el sujeto es capaz de apropiárselo y de integrarlo a sus actividades. Es decir que el término instrumento se usa para designar al artefacto en situación, delimitado por su uso.

momentos en el proceso de esa variación. Primero se construye la que se considerará como variable independiente y luego se determinará qué otra variable dependerá de ella.

Dejamos para un segundo análisis la posibilidad de obtener una expresión simbólica mediante el desplazamiento de un punto dinámico. Esa posibilidad está presente mediante la opción de Activa Rastro para un punto que ofrece el software, GeoGebra en este caso.

Visualizar el rastro que deja un punto dinámico permitiría acceder a la noción de representación gráfica de una función mediante una trayectoria dinámica, que también puede analizarse como una sucesión de posiciones de un objeto (punto en este caso) dependiendo de los valores de sus componentes variables.

Es decir que hasta ahora la construcción de un punto dinámico permitiría conceptualizar a la función como una variación entre dos magnitudes, estableciendo previamente una dependencia entre ellas (Oresme, Galileo). Y, como las medidas de esas magnitudes pueden pertenecer a diferentes marcos matemáticos, posibilita trabajar con funciones que los relacione. Además, la representación gráfica no se instalaría como algo estático (ya construido o dado), ni como algo que aparece casi al instante (cuando se ingresa una fórmula); sino como una construcción, tal vez no precisa, por los rastros que va dejando al variar sus componentes (Oresme, Galileo, Descartes).

Es oportuno destacar que hasta la versión actual de GeoGebra (5.0), si bien tiene herramientas CAS, no es posible obtener la expresión analítica que corresponde al rastro que deja ese punto dinámico construido⁴. Esta condición se torna favorable para afianzar el camino elegido sobre la definición de función que queremos introducir: la no necesidad de una fórmula desde sus comienzos (tal como sucedió en su desarrollo histórico). Además, permitiría la formulación de conjeturas sobre la forma de esa representación, el análisis de algunos puntos característicos, etc., para luego pasar a un trabajo de corte más algebraico si se considera necesario.

Reflexiones finales y perspectivas

Por lo analizado en esta comunicación y elaborado en el proyecto de investigación, sugerimos que:

Se realicen previamente construcciones geométricas para familiarizar al alumno con el concepto de dependencia que está presente en el software de geometría dinámica, cuando categoriza a los objetos que construye. También facilitaría construcciones más complejas que pueden estar presentes en problemas geométricos con un análisis algebraico, como es el caso del recurso implementado.

Se presenten problemas sólo para analizar variaciones entre magnitudes, establecer cuál es independiente y por qué. Luego, cuál se podría tomar como magnitud dependiente (si existieran varias). Proponer anexar una tabla de valores, que está incluida en el software dinámico, como un comienzo hacia la noción que la variación de un punto puede generar una relación entre esas magnitudes.

Se analice la construcción de puntos dinámicos para focalizar la importancia que tienen en el

⁴La representación gráfica de una función, que ha sido definida por un punto dinámico, es posible visualizarla mediante dos herramientas del software **Activa Rastro** (como secuencia de puntos) y **Lugar Geométrico** (como una curva de trazo continuo).

estudio de situaciones que integran diversos marcos: su potencialidad para realizar conjeturas sobre el trazo que van dejando, respecto de las condiciones establecidas; la posibilidad de incorporar cuestiones relativas a la optimización de problemas, antes de llegar a los cálculos formales. Puesto que, la construcción de un punto dinámico supone un tipo de tarea con la que los alumnos no están familiarizados al no estar presente en el entorno de lápiz y papel.

Se propongan varias definiciones del concepto de función, como una muestra del recorrido histórico, para que se seleccione una o dos, de acuerdo con las diferentes características del objeto que se ha trabajado en las actividades. Decimos que puede haber más de una porque esto implicaría mostrar la multiplicidad de sentidos que están contenidos en sólo un término: función.

Finalmente, en la matemática formativa (Santaló, 1994) tiene que estar presente el concepto de función. Lo que estamos cuestionando ahora es qué definición es la que mejor equilibra la relación formativa – informativa, si su construcción está mediada por un software dinámico. Por eso creemos que, la construcción de un punto dinámico para analizar la variación de dos magnitudes, estaría actuando en el sentido que plantea Santaló «informar formando»: informa de una dependencia, cómo se establece la misma y, además forma un recorrido posible para caracterizar a las funciones cuando se trabaja con entornos dinámicos.

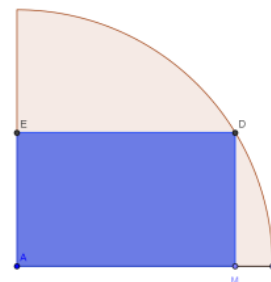
Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (1991). Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique. *Petit x* n° 26 1990-1991, 5-27.
- Balacheff, N. (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas por edades, en: Gorgorió, N. y otros (2000) *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, Barcelona: Grao, 93-108.
- Barbin, E. & Douady, R. (1996). *Enseñanza de las Matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Tropiques éditions.
- Boyer, C. (1994), *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad de Textos.
- Courant, R. y Robbins, H. (2006). *¿Qué son las matemáticas?* México DF: Fondo de Cultura Económica.
- DE Cotret S. (1988), Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante, *Petit x*, 17, 5-27.
- Falcade, R. (2002), L'environnement Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe d'une fonction, Laboratoire Leibniz-Imag de Grenoble, équipe IAM, *Petit x*, 58, 47-81.
- Ferragina, R. (Ed.) (2012). *GeoGebra entra al aula de Matemática*. Montevideo: Espartaco.
- Ferragina, R. y Lupinacci, L. (2015) Caracterización de la Función medida por software de geometría dinámica. El caso del punto dinámico, en: Fioriti, G. (2015) *Recursos tecnológicos para y por los docentes destinados a la enseñanza de la matemática en Argentina y Francia*. Buenos Aires: Teseo. En prensa.
- Lacasta, E. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Síntesis.
- Lupinacci, L. (2015) La función como variación. Producciones de alumnos y recursos docentes, en: Fioriti, G. (2015) *Recursos tecnológicos para y por los docentes destinados a la enseñanza de la matemática en Argentina y Francia*. Buenos Aires: Teseo. En prensa.
- Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies*. Paris: Armand Colin,.
- Santaló, L. A. (2002). *Matemática para no matemáticos*, en Parra, C. y Saiz, I. (1994) *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires: Paidós, 21-38.

Apéndice A

Recurso elaborado por los docentes

La figura muestra, un cuarto de círculo con radio AB de 6 cm y un punto M que se desplaza sobre AB. Sobre el segmento AM, se construye un rectángulo AMDE.



a) Realicen la construcción que se indica en la figura.

Para realizar la construcción, puede ser de utilidad comenzar con un segmento de longitud fija 6, construir un punto sobre él (M), y posteriormente construir el sector circular y el rectángulo.

b) ¿Qué ocurre cuando desplazamos al punto M? Indiquen qué elementos de la construcción cambian y cuáles permanecen constantes. ¿Qué ocurre con el área del rectángulo?

Mediante la herramienta Área es posible que el valor de la misma aparezca en pantalla.

También pueden hacer visible la longitud del segmento AM. Investiguen cómo.

Les proponemos estudiar las variaciones del área del rectángulo dependiendo de la posición del punto M.

c) ¿Cuánto vale el área cuando la base del rectángulo mide 3 cm? ¿Y cuando mide 5 cm?

d) ¿Cuánto debe medir la base del rectángulo para que el área del rectángulo sea de 15,5?

e) Si queremos crear un punto P cuyas coordenadas representen estas variaciones. ¿Cuáles deberían ser las coordenadas de dicho punto? Expliquen por qué deben seleccionar esas, y luego ingresen el punto P a través de la Barra de Entrada.

f) Ahora, desde el menú contextual del punto P, seleccionen la opción Activa Rastro. Vuelvan a desplazar el punto M a lo largo del segmento AB. ¿Qué ocurre? ¿Por qué?

g) ¿Cuál es el valor máximo al que llega el área del rectángulo? ¿Por qué?

h) ¿Cuánto mide la base del rectángulo cuando el área es máxima?

i) Trataremos ahora de encontrar la fórmula que corresponde al rastro dejado por el punto P. Antes de comenzar con esa búsqueda, ¿qué tipo de función te parece observar según el rastro? ¿Por qué? Propone algunas fórmulas posibles ingresándolas desde la Barra de Entrada. Indica si tus conjeturas fueron correctas.