Figuras dinámicas y funciones: representaciones vinculadas en la pantalla de Geogebra

Enrique **Di Rico**
Universidad Pedagógica de Buenos Aires
Argentina
enrique.dirico@ba.unipe.edu.ar

Cecilia **Lamela**
Universidad Pedagógica de Buenos Aires
Argentina
cecilia.lamela@ba.unipe.edu.ar

Juan Pablo **Luna**
Universidad Pedagógica de Buenos Aires
Argentina
juan.luna@ba.unipe.edu.ar

Carmen **Sessa**
Universidad Pedagógica de Buenos Aires
Argentina
carmen.sessa@ba.unipe.edu.ar

Resumen

En este taller compartiremos una experiencia educativa llevada a cabo en varias oportunidades con estudiantes del profesorado y profesores de matemática.

La propuesta didáctica consiste en estudiar magnitudes variables en una familia de figuras geométricas y relacionar algunas de esas variables por medio de funciones que permitan estudiarlas. Este trabajo se realiza utilizando el programa Geogebra ya que permite construir un modelo dinámico de la familia de figuras estudiadas. Además, al definir una función, permite vincular de un modo particular, la pantalla del gráfico funcional y la de la figura dinámica.

Esta propuesta plantea definir varias funciones, cambiando la variable independiente, que al ponerlas en relación permite obtener nueva información de la situación geométrica.

Estas experiencias nos permiten afirmar que esta propuesta resultar ser un medio favorable para la formulación de preguntas y el establecimiento de conjeturas, otorgando elementos para su validación.

Palabras clave: educación matemática, figuras dinámicas, gráfico de funciones en Geogebra, formación docente.

Introducción

El objetivo de este taller es compartir con colegas una experiencia educativa llevada a cabo en varias oportunidades con estudiantes del profesorado de matemática y profesores en ejercicio. Para ello presentaremos las actividades que componen la experiencia así como algunas producciones de los estudiantes y profesores que trabajaron con ellas y las discusiones que se generaron a partir de estas producciones.

El diseño y gestión de esta experiencia conlleva una fuerte presencia de entornos tecnológicos, no solo por el trabajo con computadoras de cada participante sino también por el uso de un proyector que permite hacer público en el aula cada pantalla. Esto nos obligó a tomar en cuenta cambios en el tipo de trabajo matemático en el que pretendíamos involucrar a los profesores (en formación y formados), no solo en relación a las tareas propuestas sino también a las formas de abordarlas y al papel que jugarían las representaciones en la pantalla en los procesos de validación implicados.

Por otro lado, nuestro trabajo como docentes también nos implicó en nuevas decisiones tanto para la planificación como para la gestión de la experiencia. La noción de *orquestación instrumental* (Trouche, 2004) toma en cuenta estos espacios de decisión docente cuando se trabaja con la inclusión de las computadoras, abarcando tanto aquellos vinculados a las tareas y las maneras de realizarlas como a los relacionados a los instrumentos y su organización para el trabajo individual y grupal.

La propuesta didáctica consiste en estudiar magnitudes variables en una familia de figuras geométricas y con ese objetivo se propone ligar variables para definir funciones. Tanto la situación geométrica inicial como las funciones que se definieron para estudiarla son abordadas con el programa Geogebra.

El recurso informático permite en primer lugar, construir un modelo dinámico de la familia de figuras estudiada. En segundo lugar, al definir una función, el programa Geogebra permite vincular de un modo particular la pantalla del gráfico funcional y la de la figura dinámica. Este nuevo “artefacto” abre posibilidades a un tipo de trabajo potente que se pretende explorar con los docentes y estudiantes.

Nuestra propuesta se encuentra en la línea de lo presentado en Arcavi y Hadas (2000). Ellos tratan allí la vinculación entre entornos de geometría dinámica (trabajando con el programa Geometry Inventor, 1994) y entornos gráfico-funcionales, mostrando la potencialidad del acceso, la visualización y el estudio de una situación geométrica a través de modelos funcionales, fundamentalmente de su representación gráfica. De este artículo nos interesa retener la mención que hacen los autores sobre la comparación y contraste ─que posibilita el software─ entre los cambios en los estados del modelo dinámico de la situación geométrica y el movimiento de un punto en el gráfico de la función.

Las experiencias realizadas nos permiten afirmar que se trata de un medio favorable para la formulación de preguntas y para el establecimiento de conjeturas, otorgando elementos para la validación de las mismas.

Preguntas y conjeturas en torno a una familia de trapecios

En la experiencia se trata de estudiar una familia dinámica de trapecios rectángulos que se construye en el programa Geogebra a partir de un triángulo equilátero fijo de lado 10.

Para un triángulo equilátero ABC, la familia de trapecios rectángulos EFGB verifica que G se encuentra en la altura CD del triángulo, el vértice F pertenece al lado AC, el vértice E al segmento AD y los ángulos F y E son rectos.

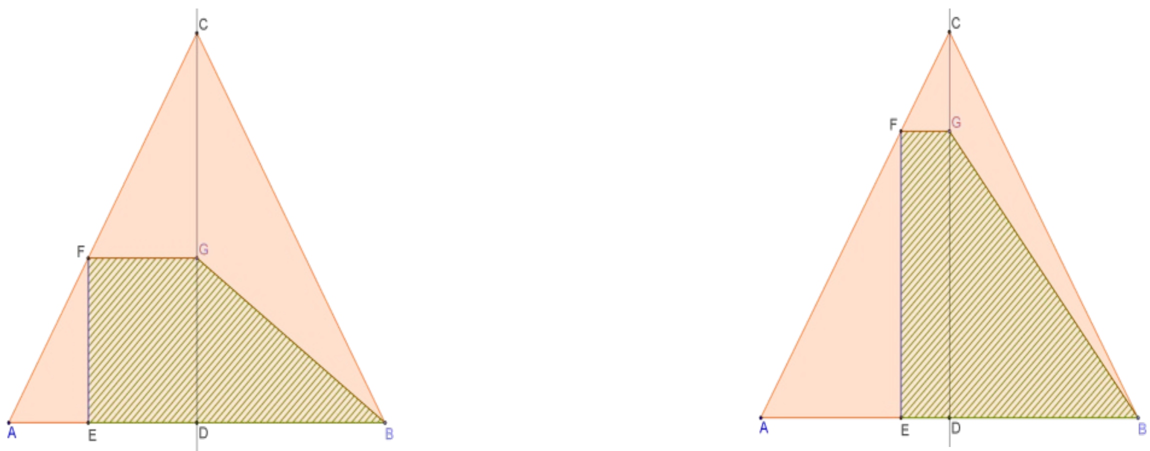

Figura 1. Imágenes de dos trapecios miembros de la familia.

La primera actividad consistió en la construcción de la familia dinámica de trapecios en la pantalla de cada asistente. A partir de esta construcción y como **segunda actividad**, los profesores y estudiantes fueron invitados a plantear en el aula afirmaciones y preguntas referidas a las características de estos trapecios. En diferentes experiencias se plantearon: *el lado EB varía entre 5 y 10, el lado FE varía entre 0 y 5, el lado GB entre 5 y* $5\sqrt{3}$ *. En la posición límite de E=D el área del trapecio es* $\frac{25\sqrt{3}}{2}$*. ¿El área del trapecio varía entre 0 y* $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ *?*

Estas afirmaciones y preguntas nos permitieron poner en relieve que entre todas las magnitudes asociadas a la familia de trapecios algunas cambian y otras no al considerar diferentes miembros. Invitados a identificar magnitudes que cambian mencionaron las siguientes: *el área del trapecio; la longitud de los 4 lados; la medida de los segmentos AF , FC, CG; la medida de dos de los ángulos (los otros son siempre rectos); el perímetro del trapecio; la medida de la diagonal EG, ya que varía entre 5 y 10, y la medida de la otra diagonal BE (primero se identificó que en los dos trapecios límite de la familia esta diagonal mide lo mismo, 10, pero luego se argumentó que esta medida no puede ser constante en toda la familia porque B está fijo, y entonces E debería describir una circunferencia, y en la situación describe un segmento).* Entre los invariantes se identificaron algunas relaciones entre medidas: *medida del lado EB - medida del lado FG = 5; medida del segmento AF + medida del segmento FC = 10,* *medida del segmento AE + medida del lado EB = 10; medida del segmento CG + medida del lado GD =* $5\sqrt{3}$.

Como **tercera actividad** propusimos centrarnos en la magnitud "área del trapecio". *¿Qué podemos decir acerca de esa magnitud? Sabemos que cambia al mover nuestra figura dinámica, ¿qué podemos decir de ese cambio?*

Algunas conjeturas que se formularon fueron: *"algo pasa" cuando FEGD es un cuadrado; el área "baja y sube" y parece que "la variación es cuadrática"; no es cierto que el rango de variación sea entre 0 y* $\frac{25}{2}\sqrt{3}$ *sino que en algunos momentos toma valores mayores a* $\frac{25}{2}\sqrt{3}$*; cuando F es el punto medio del lado el área del trapecio es igual a la mitad del área del triángulo ABC; el área máxima está cuando F se mueva de la mitad para arriba; si tenemos distintos puntos libres influye en cómo se mueve la familia y no en cuáles son las magnitudes que varían ni en su rango de variación.*

Estas afirmaciones quedaron planteadas como conjeturas y propusimos considerar el área en función de alguna otra variable para estudiarlas. Queremos resaltar que la conjetura *parece que "la variación es cuadrática"* recién tiene un significado al considerar el área como variable dependiente en una relación funcional. Estos asuntos fueron discutidos más adelante en el aula.

Definir una función para estudiar el comportamiento de una magnitud variable

En la experiencia estudiamos las funciones aprovechando herramientas del programa Geogebra. En la quinta actividad se va a proponer a los participantes que elijan diferentes magnitudes como variables independientes. Pero antes nosotros propusimos para comenzar una en particular.

Enunciado de la **cuarta actividad**: *Cada uno, con su propio trapecio dinámico realice el gráfico del área en función de la medida del segmento ED. Para ello defina un punto P, en "vista gráfica 2", con abscisa = medida de ED y ordenada = área del trapecio y luego utilice la instrucción lugar geométrico para lograr el dibujo de la curva.*

Señalemos que, de este modo, no solamente se obtiene el gráfico de la función sino que, además, el punto P definido se mueve sobre la curva en estrecho vínculo con la figura dinámica: para cualquier estado de la familia, el punto retiene en sus coordenadas tanto la medida de ED como el área de ese trapecio particular que estamos viendo en la otra vista.

Una vez realizada la construcción les propusimos retomar las conjeturas y formular nuevas preguntas tanto de la función como de la situación geométrica.

Comenzó en ese momento un trabajo interesante que partía de la visualización de informaciones que proveía el complejo dinámico (las dos vistas gráficas con el punto P que las vincula). Estas informaciones se expresaban a veces en término de afirmaciones y otras veces en términos de preguntas, que en un juego entre lo individual y lo colectivo se precisaban, se descartaban, se reformulaban y en muchos casos se buscaba una validación en términos de propiedades geométricas de las figuras involucradas.

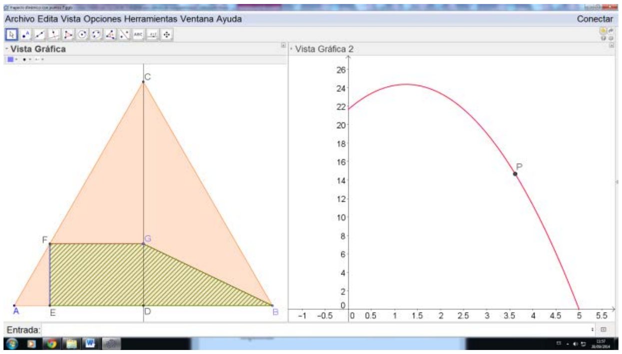

Figura 2. Gráfico de la función con el punto P correspondiente al trapecio de la izquierda.

Algunas de las preguntas y conclusiones que se sacaron en estas experiencias fueron:

– La ordenada al origen de esta función es $\frac{25}{2}\sqrt{3}$. Ese valor de ordenada se corresponde al área del "trapecio BCD" justamente porque en ese punto la abscisa es 0 y el "trapecio BCD" es el que se formaría con ED=0 (no queda trapecio sino que es el triángulo que coincide con la mitad del triángulo equilátero).

– La "curva pega la vuelta", "hay valores de la ordenada (el área) que se corresponden con un par de valores de ED diferentes (dos trapecios diferentes con igual área), pero a partir de un determinado valor de área, estas se corresponden con un único valor de ED". Formulado esto, aparecieron las siguientes preguntas: ¿Cuál es ese valor de ED a partir del cual empieza a haber solo un trapecio para cada área? Se estableció como conjetura que eso ocurría cuando ED=2,5 punto medio de AD. El área de este trapecio es igual al del trapecio con ED=0, hecho que fue validado comparando las áreas de ambos.

En algunas oportunidades en el aula se precisó la conjetura sobre el trapecio de área máxima: ese trapecio se correspondía con un valor de ED = 5/4 (1/4 de AD), también formulado como "FC mide la cuarta parte de AC". Estas conjeturas surgían de asumir una cierta simetría en una parte del gráfico y de verificar geométricamente que el área del triángulo CDB= área del trapecio cuyo vértice F se encuentra en el punto medio de AC. A menudo los participantes querían hallar la fórmula del área en función de ED para validar esta conjetura algebraicamente. Nosotros no privilegiamos esta estrategia ya que la intención de la experiencia era involucrarlos en un juego de coordinación entre la representación gráfica de la función y la situación geométrica que ésta estaba modelizando. Invitamos a buscar una validación de la conjetura con argumentos geométricos pero no tomamos este asunto como tema en la continuación de las experiencias.

La variación del área a partir de otra variable independiente

El estudio del área continuó, en las experiencias, proponiendo como **quinta actividad**: *Ya tenemos el gráfico del área en función de ED; por grupo elijan otra variable independiente y realicen el gráfico del área en función de ella en el mismo sistema de coordenadas y sin borrar el gráfico anterior.*

¿Qué preguntas les surgen, tanto de la función como de la situación geométrica, a partir de este nuevo gráfico? ¿Cuáles pueden plantear relacionando los gráficos de las dos funciones entre sí?

En este momento podían surgir varias posibilidades de relaciones entre funciones, tomando diferentes variables independientes como ser: ángulo GBD, altura DG o EF, longitud de EB, longitud de AE, y otras. En particular nos interesa compartir las reflexiones que se generaron en las experiencias al estudiar de manera conjunta la variación del área en función de ED (primer gráfico realizado) y en función de la altura del trapecio EF.

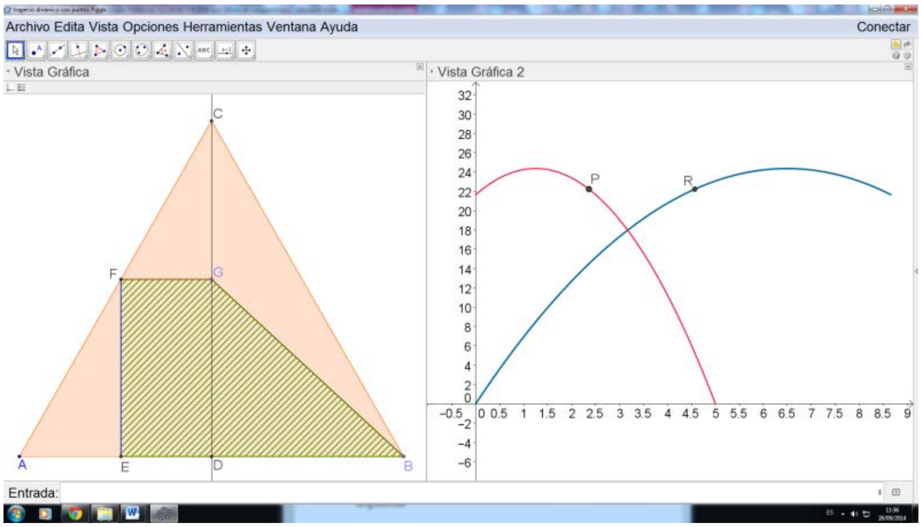

Figura 3. Los dos gráficos con sus puntos marcados.

Destacamos entre los asuntos que surgieron:

Las funciones tienen distintos dominios. Se diferenciaron los dominios de ambas funciones. Son intervalos diferentes y con distinta amplitud, y esto fue explicado viendo que para un mismo movimiento del punto libre una variable independiente se mueve a "mayor velocidad" que la otra variable independiente, es decir, recorre un intervalo de mayor longitud.

Los gráficos de las funciones tienen "distinto sentido de circulación" de los puntos sobre las gráficas. En estos gráficos en particular, los puntos P y R recorren cada curva en sentido contrario: a medida que la abscisa de uno de los puntos aumenta, en el otro punto la abscisa disminuye (siempre considerando el mismo trapecio). Además los puntos se mueven sobre las curvas manteniendo siempre la distancia entre ellos.

Los puntos de intersección de ambas curvas. Mirando la intersección de estas dos funciones surgieron varias preguntas sobre qué significa ese punto de intersección. En particular se observó que al mover la figura dinámica, los puntos P y R coincidían sobre la intersección. Se buscó una explicación de esto diciendo que había un trapecio con medida de ED = medida de EF; es decir el trapecio cuya "parte rectangular" DEFG era cuadrado. Para ese trapecio las dos variables independientes estudiadas valían lo mismo por lo tanto las coordenadas de los puntos P y R coinciden.

Otra variable independiente considerada fue CF (que no es un elemento del trapecio) y nuevamente se comparó con el gráfico de la función con variable independiente ED.

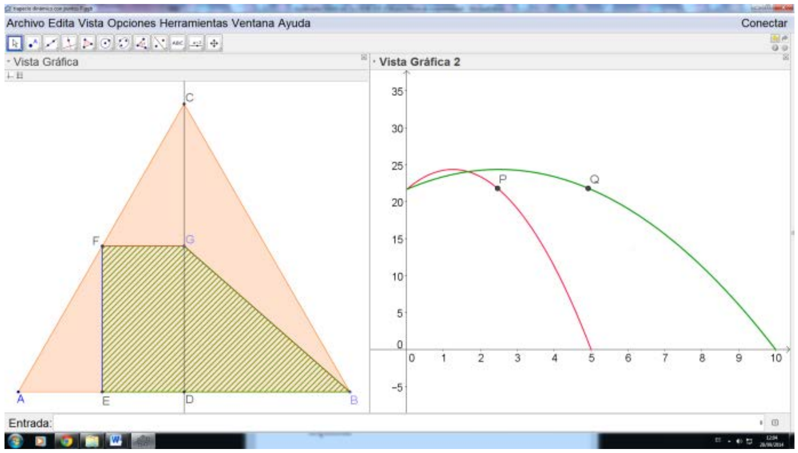

Figura 4. Los gráficos del área en función de CF y ED.

Compartimos ahora las reflexiones que surgieron en las experiencias al considerar esta nueva variable independiente.

– Al igual que en el la comparación anterior se analizaron los dominios de ambas funciones y se dio una explicación del porqué uno tiene el doble de amplitud que el otro.

– Para estudiar la intersección de estas dos curvas al mover la figura dinámica se notó que los puntos P y Q del gráfico no pasaban al mismo tiempo por el punto intersección, a diferencia de lo que ocurría con las funciones anteriores. Esto llevó a concluir que había dos trapecios diferentes T1 y T2 con igual área y con la medida de ED en T1igual a la medida de CF en T2.

Se vio además que la medida de ED del trapecio T2 es la mitad de la medida de ED del trapecio T1 (en la figura 5 este último segmento se llama E1D). Se dieron argumentos geométricos considerando el triángulo equilátero CFH (ver en la figura 5); en ese triángulo FG es la mitad de CF, que a su vez es igual a E1D.

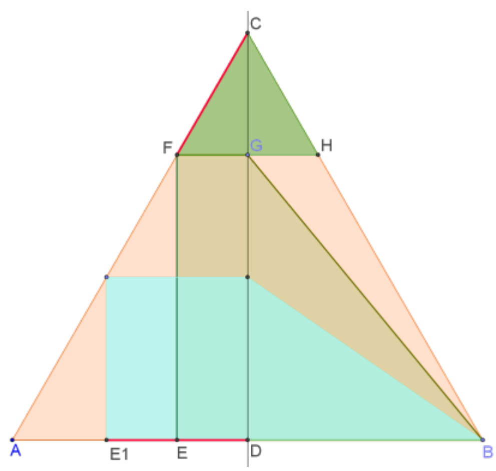

Figura 5. Comparando los trapecios T1 y T2

Hasta aquí quisimos detenernos en el análisis de algunas reflexiones que aparecieron en las experiencias realizadas al considerar distintas variables independientes para estudiar la variación del área de los trapecios. Fueron consideradas otros pares de variables sobre las cuales no vamos a detenernos en este escrito.

El trabajo matemático para hacer a partir de una relación que no es función

Posteriormente, en la **sexta actividad**, planteamos considerar otras variables que iban a dar lugar a fenómenos diferentes: *Les proponemos estudiar la variación del área en función de la diagonal FB.*

El gráfico de la relación causó mucha sorpresa. Algunos dudaron si era correcto y otros lo calificaron de “feo”. En un caso un profesor lo borró inmediatamente después de haberlo obtenido.

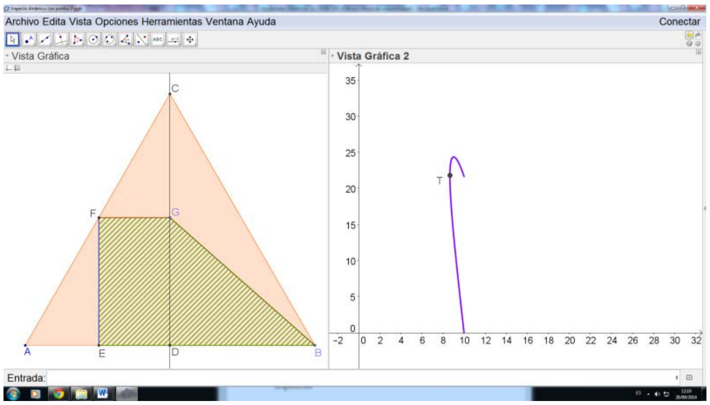

Figura 6. Gráfico de la relación entre la medida de la diagonal FB y el área del trapecio.

Sin embargo, estudiar la variación del área en relación a la variación de la diagonal, llevó a formular nuevas preguntas sobre la gráfica y sobre la situación geométrica. Así no preguntamos: *¿Qué significa que no sea función en términos de la situación geométrica?* Se llegó a formular que esto informaba que para todos los valores de la medida de la diagonal (menos 1) hay dos trapecios de la familia con diagonales que miden eso y áreas diferentes.

Se formularon también las preguntas *¿Cuál es el rango de variación de la “no función”? ¿A qué trapecio corresponde el punto más a la izquierda en el gráfico? ¿Cuánto mide su diagonal?*

En una de nuestras experiencias los profesores dieron interesantes argumentos para validar que el trapecio buscado es el que tiene el vértice F en la mitad de AC. Uno de los profesores se fijó en el punto F para decir que la menor longitud de la diagonal FB (que correspondía al punto más a la izquierda en el gráfico), se alcanzaba cuando FB es perpendicular a AC (por la propia definición de distancia de un punto a una recta). Y que entonces FB era la altura del triángulo ABC relativa al lado AC.

Otra profesora, explorando en el gráfico cartesiano, trazaba rectas perpendiculares al eje x para poder localizar, en la figura dinámica, los dos trapecios con la misma medida de la diagonal. Esta estrategia la llevó a trazar una circunferencia dinámica con centro en B y radio FB (que cambia al cambiar el trapecio de la familia) y marcar la intersección de ésta con el lado AC .Uno de los puntos es el vértice F y el otro punto permite determinar otro trapecio con la misma medida de diagonal. Ella se preguntaba cuándo estos dos puntos coinciden y llegó a la conclusión de que la circunferencia tiene que ser tangente al lado AC, y esto pasa si la diagonal FB es perpendicular al lado AC.

Estas consideraciones permitieron determinar que la medida de la diagonal buscada es $5\sqrt{3}$.

Los anteriores son un ejemplo de cómo la visualización de algunas características del gráfico, genera preguntas y conjeturas. Y de qué manera el trabajo sobre la figura dinámica permite contestar y dar argumentos geométricos para validar esas conjeturas.

Destaquemos que ciertas informaciones se toman del gráfico y no se plantea la necesidad de validarlas. Por ejemplo que los dos trapecios con diagonales de la misma medida tienen efectivamente distinta área. Otras informaciones que se leen en el gráfico se toman como conjeturas que necesitan ser validadas. Estos diferentes estatutos de las informaciones que provee el gráfico fueron compartidos con los participantes, muchas veces de manera implícita.

En otra experiencia en la cual la mayoría de los asistentes eran profesores universitarios, ellos interpretaban que el punto que se encuentra más a la izquierda en el gráfico cartesiano, permite dividir la curva en los gráficos de dos funciones. Cada una corresponde a una parte de la familia de trapecios. Evocaron la imagen de una circunferencia y las dos funciones que se pueden definir a partir de ella. Llegaron a definirlas:

G1 es la función que para cada valor de la diagonal entre $5\sqrt{3}$ y 10, devuelve el área del trapecio con esa diagonal y altura menor que $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

G2 es la función que para cada valor de la diagonal entre $5\sqrt{3}$ y 10, devuelve el área del trapecio con esa diagonal y altura entre $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ y $5\sqrt{3}$.

Finalmente, como última actividad, planteamos el estudio del área en relación con la otra diagonal EG y la producción del nuevo gráfico en el mismo sistema de coordenadas, sin borrar el gráfico anterior. Nuevamente invitamos a la formulación de preguntas y conjeturas.

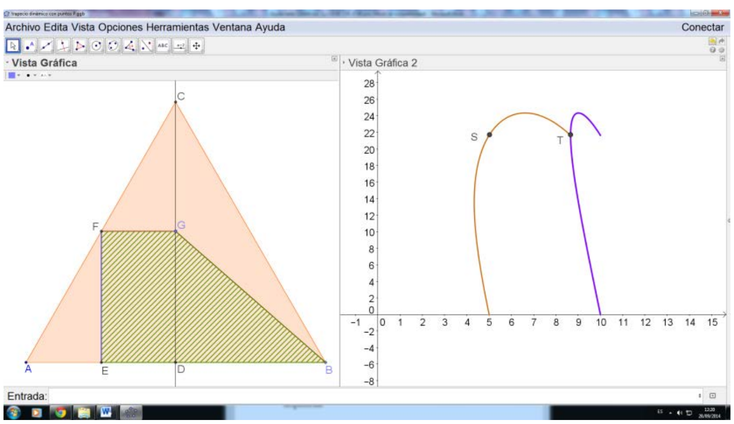

Figura 7. Las dos no funciones que relacionan área con diagonales.

Aparecen en las experiencias preguntas centradas en la situación geométrica y otras en el gráfico de la relación. Por ejemplo, la pregunta que apareció recurrentemente, *¿Cuál es el valor mínimo de diagonal EG para estos trapecios?*, es una pregunta sobre los trapecios. En cambio, este mismo asunto fue formulado considerando el gráfico, *¿Hasta dónde llega hacia la izquierda el gráfico?*

A diferencia de lo que pasaba con la diagonal FB, el nuevo gráfico dejaba leer que no todos los trapecios tendrían otro con la misma medida de la diagonal EG y diferente área. Se formuló entonces *¿Cuáles son aquellos valores de la diagonal para los cuales hay dos trapecios con distintas áreas y cuáles son aquellos valores que no?*

Se establece la conjetura: *Para todos los trapecios cuyo lado EF mida mayor que la mitad de la altura del triángulo ABC, no hay otro con la misma medida de la diagonal EG. Para el resto siempre, salvo en un punto, hay otro con la misma medida de la diagonal y ese otro tiene diferente área.*

Para estudiar la relación del área con la diagonal EG, lo primero que se establece es que esa diagonal siempre mide lo mismo que el segmento FD. La ventaja de esto último es que el extremo D no cambia al mover los trapecios de la familia.

Se elabora a partir de esto una estrategia para probar la conjetura, similar a la desplegada por la profesora en la actividad 6: trazar circunferencia dinámicas con centro en D (fijo) y radio FD (que cambia con el trapecio). La intersección de esta circunferencia con el lado AC resulta ser un punto (doble), cuando FD es perpendicular a AC y un punto (simple) a partir de la medida 5 para el radio. Para todas las otras posiciones de F, todo trapecio tendrá otro con la misma media de la diagonal y diferente área.

Las visualizaciones dinámicas de trapecios y circunferencias en la vista gráfica 1, así como la posibilidad de ver ligado a este dinamismo el gráfico de la relación con un punto marcado, fueron marcos potentes para las ideas que desplegaron los profesores en sus conjeturas y en sus validaciones.

Cuando las dos gráficas de las relaciones son tomadas en forma conjunta aparece la pregunta por el punto en que se tocan.

Recorriendo la familia de trapecios por medio de la figura dinámica y analizando los gráficos y las posiciones de sendos puntos móviles, los participantes pudieron leer casi inmediatamente -ya lo habíamos discutido en el estudio de otras intersecciones- que no corresponde a un solo trapecio con igual medida en sus dos diagonales dado que los puntos que recorren cada curva no coinciden en la intersección. Es decir, hay dos trapecios diferentes donde la diagonal FB de uno tiene la misma medida que la diagonal EG del otro y, además, tienen la misma área.

En un primer momento se conjeturó que uno de los trapecios es el que tiene la diagonal FB mínima, ya que el punto de intersección se ubica en el extremo izquierdo de la curva. Este trapecio, como se había visto antes, tienen su vértice F en la mitad del lado AC y la diagonal FB coincide con la altura del triángulo ABC relativa a este lado .

El otro trapecio se encontró al hacer coincidir la intersección de las curvas con el punto móvil que corresponde a la diagonal EG. Se llegó a visualizar que esto corresponde al "trapecio" con medida ED=0.

Que ambas diagonales tienen la misma medida se validó por el hecho de que la diagonal EG coincide con CD, la altura del triángulo equilátero de lado 10. Que ambos "trapecios" tienen la misma área ya se sabía desde la cuarta actividad.

A modo de cierre

En estas experiencias planteamos a los profesores (en formación y ya formados) un trabajo que se ubica en la coordinación entre una situación geométrica y la determinación de funciones que nos permitan estudiarla. El recurso de Geogebra nos permitió producir el gráfico de una función sin determinar una fórmula algebraica que la expresara. De este modo se favoreció la visualización, comparando y contrastando los cambios entre el fenómeno geométrico y el gráfico en el plano cartesiano.

La propuesta de definir funciones "área" cambiando la variable independiente, y aún relaciones no funcionales que involucraran el área, permitió el planteo de preguntas y de conjeturas tanto sobre la situación geométrica como sobre los gráficos.

Muchas afirmaciones acerca del crecimiento o el comportamiento de la variación del área cobraron otro sentido cuando fueron estudiadas en relación a variables independientes diferentes. De este modo entendemos que el mismo concepto de función fue revisitado.

Propusimos un trabajo atípico sobre las no-funciones en relación a lo que se trabaja tradicionalmente en la escuela y en la universidad, dónde solo aparecen para ser descartadas. Estudiamos la situación desde la información que portan los gráficos sin importar si son de relaciones funcionales o no. Las relaciones no-funcionales fueron una herramienta que permitió plantearse otras preguntas sobre la familia de trapecios. En ese sentido es un trabajo que permite volver sobre lo funcional, entenderlo, completarlo, matizarlo.

En todas nuestras experiencias los profesores valoraron volver sobre lo que sabían en un ambiente experimental y en interacción con otros colegas. Algunos participantes manifestaban, al final del taller, "haber dudado" de aquello que dominaban. Dudar es un buen motor para volver a aprender.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 5, 25-45.

Borsani, V., Cedrón, M., Cicala, R., Di Rico, E., Duarte, B. & Sessa, C. (2013). La integración de programas de geometría dinámica para el estudio de la variación de magnitudes geométricas: nuevos asuntos para la didáctica. En *Actas del VII CIBEM* (pp. 6901-6908). Recuperado el 11 de agosto de 2014, de: http://www.cibem.org/7/actas/pdfs/643.pdf.

Borsani, V., Cedrón, M., Cicala, R., Di Rico, E., Duarte, B. & Sessa, C. (en prensa). Un diseño colectivo para la función cuadrática con Tic. Transformaciones en el aula. *Prácticas pedagógicas y políticas educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense.* Buenos Aires: UNIPE: Editorial Universitaria.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 9, 281-307.