Construcción de conceptos matemáticos mediante la visualización geométrica

César **Briseño** Miranda
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
cbriseno@cinvestav.mx
José **Guzmán** Hernández
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
jguzman@cinvestav.mx

Resumen

En este estudio se reportan los resultados obtenidos al trabajar con estudiantes de tercer semestre de bachillerato dos problemas relacionados con la visualización de representaciones geométricas en ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico. Esta investigación pretende identificar de qué forma el uso de la tecnología contribuye en la construcción de conceptos matemáticos mediante el estudio de figuras geométricas. Se trata de un estudio de tipo cualitativo, cuyo marco conceptual está basado en la teoría de representaciones de Duval y en la visualización de objetos matemáticos con ayuda tecnológica. En este trabajo se diseñaron e implementaron Actividades relacionadas con la visualización de figuras geométricas del tipo estático y dinámico. Los resultados muestran que la herramienta tecnológica potencia la visualización de representaciones geométricas, pero el papel-y-lápiz como herramienta de trabajo se vuelve necesario para conjeturar conceptos abstractos surgidos de tales representaciones.

Palabras clave: visualización, representaciones, geometría, ambientes, tecnología.

Introducción y planteamiento del problema

La visualización como herramienta de enseñanza y de aprendizaje de conceptos matemáticos (especialmente de geometría) ha sido foco principal de investigación desde hace varios años. Diversos autores (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 1999; Presmeg, 2006; Phillips, L.M., Norris, S.P., & Macnab, J.S., 2010, entre otros) han reconocido la importancia de la visualización para lograr la construcción (en los estudiantes) de conceptos matemáticos. De acuerdo con Presmeg (2006), la investigación sobre la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas comenzó en las décadas de los 70 y 80, basándose en la psicología teórica. En la década de los 90, cuando la importancia de este campo de investigación fue reconocida en educación matemática, se convirtió en centro de temas diversos entre los que destacan el desarrollo curricular y la eficacia de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas. A partir del año 2000 se ha observado un aumento en las investigaciones sobre la visualización de figuras desde el punto de vista semiótico, dando prioridad a la comprensión de los conceptos de imagen y de representación. En la actualidad, se tiene una gran cantidad de materiales educativos relacionados con matemáticas. En ellos, la visualización juega un papel trascendental debido a que existen libros de texto matemáticos llenos de imágenes, diagramas y gráficos, así como diversos programas informáticos que permiten a los estudiantes interaccionar con ellos. Debido a las numerosas representaciones geométricas que se encuentran en diferentes medios –papel-y-lápiz y tecnológico–, surge la necesidad de identificar (por parte del alumno) características y propiedades que éstas presentan. Varios autores (e.g., Arcavi, 2003; Hitt, 1995; Haciomeroglu, 2011, entre otros) afirman que las herramientas tecnológicas reducen la *distancia* entre la representación física, la representación de las imágenes mentales y el objeto matemático mismo, lo cual permite la comprensión (por parte de los estudiantes) de dichos objetos. En este artículo se pretende identificar de qué forma la visualización promueve la construcción de conceptos matemáticos apoyados en el uso de los ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico.

Antecedentes y fundamentación teórica

La revisión de artículos de investigación relacionados con la visualización (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 2003; Presmeg, 2006, entre otros) en educación matemática nos permitió hallar dos problemáticas centrales: la primera se relaciona con las dificultades teóricas que se tienen para poder explicar la función de la visualización de objetos matemáticos, y la segunda trata sobre el rol que juega la visualización en el aprendizaje de las matemáticas. Estas dos problemáticas se superponen y se intercalan entre ellas debido a que no es posible estudiar a una de ellas sin la presencia de la otra. Las ideas surgidas de la visualización en matemáticas enriquecen los contenidos visuales, cuya utilización resulta provechosa, tanto en las tareas de representación como en el manejo de conceptos de esta disciplina. La visualización en ocasiones se emplea para describir representaciones visuales; en otras, se usa para determinar el uso de cierta representación específica, o bien, para definir la actividad cognitiva del sujeto cuando hace uso de representaciones visuales. La representación de un objeto matemático involucra su análisis. Si el objeto es una figura geométrica, se deben identificar características de ella y hacerse un tratamiento del objeto empleando el sentido de la vista.

Arcavi (2003) se refiere a la visualización como la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente o sobre el papel con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión. De acuerdo con Phillips et al. (2010, p. 26) es recomendable realizar distinciones explícitas mediante la adopción de tres términos: (a) objeto de visualización relacionados con objetos físicos vistos e interpretados por una persona con el propósito de entender algo más que el objeto mismo; (b) visualización introspectiva es una construcción imaginativa de una posible experiencia visual en ausencia de un objeto de visualización. Se centra en objetos capturados en la mente, y (c) visualización interpretativa, la cual involucra la interpretación del significado de los objetos de visualización o visualizaciones introspectivas, en función de la red existente en la persona de creencias, experiencias y entendimientos. En la visualización se distinguen: objetos físicos (e.g., ilustraciones, animaciones, pantallas generadas por la computadora, etc.), así como, “objetos mentales” almacenados y procesados en la mente en forma de esquemas mentales, imágenes mentales, construcciones y representaciones mentales; o bien, mediante funciones cognitivas manifestadas en la percepción visual, la manipulación y transformación de las representaciones visuales de la mente; éstas concretan los modos abstractos de pensamiento. Phillips et al. (2010) enfatizan que estas distinciones son importantes para entender el contexto de las visualizaciones y poder establecer aplicaciones eficaces de visualización en el aula de matemáticas.

Unidades constitutivas de una figura geométrica

La representación de un objeto matemático involucra su análisis, sin embargo, independientemente de las concepciones de la naturaleza y de la existencia de los conceptos matemáticos por parte de quienes aprenden o enseñan, muchos matemáticos consideran ese modo de conocimiento consistente en “ver”, tal visualización debe realizarse ya sea por los sentidos, por la imaginación o por la inteligencia. La pureza de la visión permite una aprehensión simultánea de los objetos. Para Duval (2003), la aprehensión visual es inmediata; ésta permite discriminar e identificar en menos de una décima de segundo los diversos elementos del campo de visión y sus relaciones. Así, "ver" es siempre reconocer alguna cosa a primera vista. Sin embargo, los objetos vistos no tienen únicamente un solo aspecto. De manera que, si la visión es aprehensión simultánea con valor global entonces nunca es completa (Duval, 1999), debido a que la visualización desencadena procesos automáticos no conscientes del sujeto –que dependen de todo eso que ha podido ser guardado en su memoria–, el aprendizaje visual es directo. Un objeto geométrico requiere dos tipos de aprehensión: (a) la perceptiva, en la cual se reconocen las unidades figurales de la representación geométrica; (b) operatoria, en la cual se efectúan las modificaciones posibles de las relaciones que constituyen las partes de la representación (Duval, 2003).

La visualización a diferencia de la percepción no se desarrolla dentro del espacio real en tercera dimensión (3D), sino que se proyecta sobre una superficie en segunda dimensión (2D). Esta reducción de dimensión (de 3D a 2D) constituye una primera ruptura entre la visión real y la visualización (Duval, 2003). Duval (1999) afirma que la implantación de una mancha visible en la figura es el primer indicio de toda representación visual, y es susceptible de variaciones visuales; éstas pueden agruparse en dos categorías: (a) Variación dimensional, ligada con el número de dimensiones: 0 (punto), 1 (línea) o 2 (área); (b)Variación cualitativa, ligada con la forma (línea recta o curva; contorno abierto o cerrado de un área), tamaño, orientación, granulación, color, etcétera. Distinguir estas dos categorías de representación permite definir las características de una figura; debido a que en todas ellas aparece como la combinación de valores para cada una de las variaciones visuales de los tipos dimensional y cualitativo, los cuales forman las unidades figurales elementales. Por ejemplo, una circunferencia está formada por la unidad punto y la forma curva cerrada. Incluso, al hablar de un cuadrado, figura aparentemente reducida a una sola unidad figural de dimensión 2, puede ser considerada como configuración de cuatro unidades figurales de dimensión 1 (segmentos que forman los lados), debido a que son las relaciones (paralelismo, simetría, tangente…) entre las unidades figurales elementales las que constituyen el contenido pertinente de una figura geométrica. Es común que las figuras geométricas estén compuestas por numerosas unidades figurales elementales con valores diferentes (e.g., triángulos, cuadriláteros, puntos, etcétera).

Herramientas tecnológicas en el aula

En la actualidad es común encontrar imágenes, dibujos, gráficos y diagramas en textos matemáticos. También se les encuentra en programas informáticos enfocados en la enseñanza de las matemáticas. Diversos software, por ejemplo: Cabri-Geometry, Cinderella, Geometer's Sketchpad, C.a.R. (Compass and Ruler), Geogebra, entre otros, se denominan Software de Geometría Dinámica (SGD). Estos tipos de software permiten construir objetos geométricos. Una vez construidos, trasladarlos, girarlos, se puede estudiar, con estos objetos, conceptos como los de simetría, reflexión, homotecia, etc. Además, con ellos también es posible medir los lados de las figuras, representar las ecuaciones que les corresponden, comprobar sus propiedades geométricas y realizar cálculos vinculados con sus propiedades. El uso de algún SGD facilita la incorporación de la visualización en la enseñanza de conceptos geométricos, pues se cuenta con imágenes dinámicas e incluso con visualizaciones interactivas. Con las herramientas propias de los SGD se puede medir, o bien agregar trazos auxiliares o simplemente explorar la figura. Otra ventaja que tiene el uso de representaciones dinámicas es permitir la creación y manipulación de construcciones geométricas cuyo trazado o construcción es modificable en forma dinámica (si algún objeto B depende de otro A, al modificar A, B puede ajustarse y actualizarse y así mantener las relaciones correspondientes con A). Un atributo importante del SGD es su versatilidad de uso, el cual estimula el interés y la participación de los estudiantes cuando resuelven problemas geométricos. Haciomeroglu (2011) menciona que la visualización empleando modelos dinámicos permite a los estudiantes entender los conceptos o significados que pueden ser extraídos de las representaciones y por lo tanto juega un papel importante en el desarrollo de su pensamiento analítico, y que no sucede en ambiente de papel-y-lápiz.

Diseño y metodología

Se trata de un estudio de tipo cualitativo, cuyo marco conceptual está basado en la teoría de representaciones y en la visualización de objetos matemáticos con ayuda tecnológica. La recopilación de datos se realizó con un grupo de 12 alumnos (de 15 a 16 años de edad) de quinto año de bachillerato (tercer semestre), a través del registro escrito de las Actividades y de videograbaciones. Los alumnos trabajaron en parejas; se formaron seis equipos con dos alumnos cada uno. Las Actividades implementadas fueron diseñadas o adaptadas de otros estudios de forma que los alumnos requirieran para su análisis, formulación y resolución, el descubrimiento de invariantes, tareas de construcción, establecimiento de conjeturas, así como descripción y explicación de los objetos matemáticos visualizados, considerando los ambientes papel-y-lápiz y tecnológico. En la investigación, se consideraron los siguientes puntos para el diseño de las Actividades: (a) Nivel académico. El propósito fue diseñar o adaptar tareas significativas, accesibles e interesantes y que no resultaran triviales ni imposibles de resolver. (b) Uso de la herramienta tecnológica. Se buscó que las Actividades pudieran ser llevadas a cabo en el ambiente tecnológico, con el fin de que el alumno, utilizando SGD y mediante sus herramientas propias del software, visualizara los objetos matemáticos en estudio. (c) Contenidos matemáticos. Cada Actividad se relacionó con los contenidos temáticos abordados en cursos previos de geometría euclidiana.

Experimentación

En este artículo reportamos los resultados surgidos de la implementación de dos actividades; en ellas se busca analizar la influencia de la visualización de figuras geométricas tanto estáticas como dinámicas en los ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico. Una de las Actividades fue tomada del articulo "*A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics*" (Duval, 2006, p.117). En ésta el autor propone a los estudiantes que a partir del esbozo de la gráfica (véase Figura 1) hallen la longitud del segmento $\overline{ED}$, tomando como datos fijos la longitud de los segmentos $\overline{AB} = \overline{DC} = 4$ cm y $\overline{BC} = 7\,cm$.

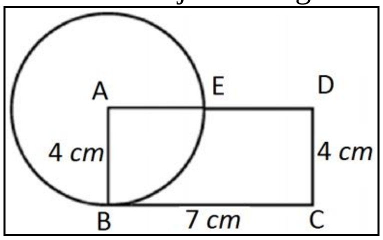

Figura 1. Primera actividad. Los alumnos visualizan la figura geométrica y de acuerdo con sus propiedades calculan la longitud $\overline{ED}$.

La segunda Actividad propuesta a los alumnos participantes en este estudio fue con la intención de analizar la forma en que ellos exteriorizan la idea de una representación relacionada con los triángulos acutángulos (Santos, 1996). La Actividad consistió en que los alumnos formaran diferentes triángulos, conectando un punto cualquiera en el interior de un cuadrado dado, con los vértices de la base del cuadrado y, posteriormente, remarcaran los puntos donde los triángulos formados en el interior del cuadrado fueran acutángulos (véase Figura 2). Una vez identificados diferentes triángulos acutángulos en el interior del cuadrado, se les pidió que sombrearan la región dentro del cuadrado donde los triángulos formados con el punto cualquiera y la base del cuadrado fueran acutángulos. Posteriormente, con apoyo de Geogebra y con las condiciones de la actividad, se pidió a los estudiantes que identificaran si existía alguna figura geométrica que permitiera determinar en qué parte de la región –del interior al cuadrado– se cumple la condición dada.

Forma diferentes triángulos que conecten un punto P cualquiera (como el mostrado en la figura) en el interior del cuadrado con los vértices de la base del cuadrado (puntos A y B). Remarca con color, los puntos P donde los triángulos formados en el interior del cuadrado sean acutángulos.

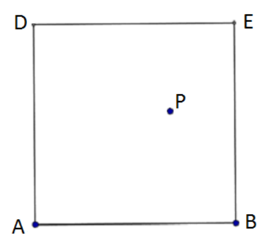

Figura 2. Segunda actividad. Los alumnos forman diferentes triángulos que conecten un punto cualquiera en el interior de un cuadrado dado, con los vértices (A y B) de la base del cuadrado.

La figura geométrica de la primera Actividad es estática, ya que de acuerdo con las condiciones de su composición no presenta ninguna variación (su estructura no cambia). La segunda Actividad involucraba la exteriorización de la idea de triángulo acutángulo, con la variante de que a partir de un punto que podía colocarse en cualquier parte, en el interior de un cuadrado (punto dinámico, ya que podía variar) se formaran triángulos acutángulos. Una vez identificados estos tipos de triángulos, se pedía al estudiante que infiriera la zona o región dentro del cuadrado donde el punto cumplía dicha condición. En las Actividades propuestas se les solicitó a los estudiantes que validaran sus resultados, contrastándolos en el ambiente de tecnológico (Geogebra) respecto al ambiente de papel-y-lápiz.

Análisis de datos y resultados

El análisis de los datos recabados se basó en la interpretación y en el número de incidencias comunes, por parte de los alumnos, de sus soluciones en ambos ambientes, tomando en cuenta video-grabaciones –de las discusiones (alumno-alumno y alumno-profesor) durante la experimentación– y los registros escritos, una vez solucionado el problema. Los resultados muestran que los estudiantes (a través del SGD) lograron identificar las dificultades provocadas al realizar Actividades de visualización empleando el ambiente de papel-y-lápiz; de manera que descubrían si la visualización realizada en una primera instancia era correcta o parcialmente correcta. De la primera Actividad, los resultados obtenidos –durante el trabajo en ambiente de papel-y-lápiz– son los siguientes: cinco equipos percibieron que el valor del segmento $\overline{ED}$ es 3.5 *cm* y sólo un equipo consideró las propiedades de la circunferencia, al darse cuenta de que el valor real del segmento $\overline{ED}$ es de 3 *cm*. Algunas observaciones realizadas durante la visualización de la primera Actividad muestran que la dificultad de interpretar correctamente la representación geométrica radica en la manera de articular la información implícita y explícitamente dada. Los resultados obtenidos en esta Actividad confirman que la aprehensión visual es inmediata (Duval, 2003), lo cual permitió a los estudiantes identificar elementos existentes en la figura. Además, durante la visualización de esta figura la mayoría de los alumnos no realizó una adecuada visualización introspectiva e interpretativa (Phillips et al., 2010), las cuales permiten dar significado al alumno y reflexionar sobre el objeto matemático (e.g., figura geométrica). En consecuencia, la visualización realizada, por parte de los alumnos a esta figura geométrica, tiende a adquirir la forma de mayor simpleza (Duval, 1999); ésta provoca que los alumnos perciban los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{ED}$ iguales; la manera de *ver* la figura, por parte de los alumnos, generó una primera impresión a simple vista, al identificar que el punto E (intersección de la circunferencia con la segmento $\overline{AB}$) se localizaba en el punto medio del segmento $\overline{AB}$. La forma de *ver* la figura impidió a los alumnos lograr la visualización correcta del objeto matemático, ya que la mayoría optó por la percepción y la aprehensión simultanea descrita por Duval (1999). Se observa en los datos –surgidos en ambiente de papel-y-lápiz– que la mayoría de los equipos se inclinó por una percepción visual de la figura y no consideraron sus propiedades. Un ejemplo es la visualización reportada por los estudiantes del Equipo 2 (Alumnos 2A y 2B), quienes afirmaron que "el punto E es la mitad del segmento $\overline{AD}$ y éste a su vez es igual que la base $\overline{BC}$ que mide 7 *cm*; como la mitad es 3.5 *cm*, por lo tanto, este es el valor del segmento". La Figura 3 muestra la visualización del Equipo 1 (Alumnos 1A y 1B)), quienes optaron por la percepción de la figura.

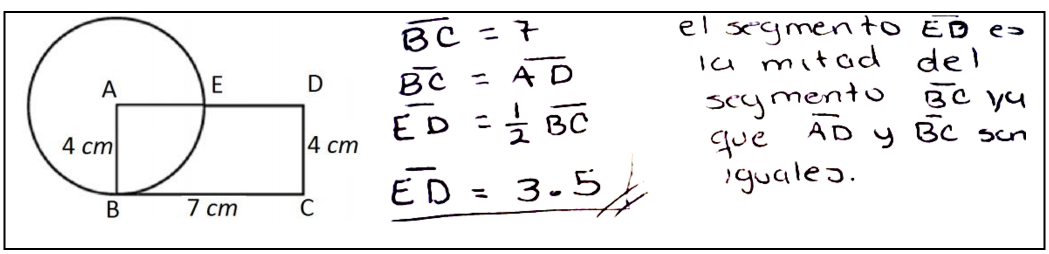

Figura 3. Primera actividad ambiente de papel-y-lápiz. Ejemplo de cómo los alumnos se inclinaron por la percepción visual de la figura al calcular la longitud del segmento $\overline{ED}$.

Sólo un equipo notó las propiedades implícitas en la figura. En el registro escrito, el equipo 5 expone textualmente que "la distancia de $\overline{ED}$ es de 3 *cm*. El círculo con centro A tiene un radio de 4 *cm* (ubicaron el segmento $\overline{AB}$), por lo tanto, la circunferencia en cualquier punto tiene 4 *cm* de radio, restamos los segmentos $\overline{BC} - \overline{AB} = 3$ *cm*". Este equipo logró la transición de la Figura 1 al objeto geométrico; el equipo logró visualizar, a través de la representación las propiedades de dicho objeto matemático, sin importar su apariencia perceptiva. De acuerdo con Arcavi (2003) este equipo interpretó la figura a partir de la reflexión ejercida desde el ambiente de papel-y-lápiz hasta la construcción mental por parte de los alumnos, lo cual permitió la adecuada visualización del objeto matemático mostrado. En la segunda parte de esta Actividad, los alumnos reprodujeron la Figura 1, empleando Geogebra y mediante sus herramientas calcularon la longitud del segmento $\overline{ED}$. Además, compararon el resultado obtenido con el software respecto del obtenido con papel-y-lápiz. Al hacer uso del software Geogebra, el total de los equipos concluyó que la longitud del segmento $\overline{ED}$ es de 3 *cm* debido a que el punto E no se encuentra en el punto medio del segmento $\overline{AD}$ (véase Figura 4). El siguiente extracto corresponde a los argumentos del Equipo 4 (Alumnos 4A y 4B) cuando contrastaron los resultados obtenidos en papel-y-lápiz, con los surgidos del ambiente tecnológico:

Profesor:	De acuerdo con la figura ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{ED}$?
Alumno 4A:	El segmento $\overline{BC}$ y el segmento $\overline{AD}$ son iguales. Entonces, si éste [*punto E*] está al centro [*punto medio*] vale la mitad [3.5].
Profesor:	Usando el software ¿el resultado cambió o es el mismo?
Alumno 4A:	Me doy cuenta de que el radio de la circunferencia es 4 y el radio en todas las partes de la circunferencia siempre es el mismo, entonces mide 4 aunque [*visualmente en la figura en papel-y-lápiz*] sea la mitad de $\overline{AD}$.
Profesor:	Finalmente, ¿cuál sería el valor [*la longitud*] de $\overline{ED}$?
Alumno 4A:	Tres, ya que la distancia de $\overline{AE}$ es 4 y el segmento $\overline{AD}$ es 7.
Profesor:	¿De qué forma les ayudó el software en la visualización de la figura?
Alumno 4A:	A la vista se ve como si fuera la mitad [*ambiente de papel-y-lápiz*] y al ponerlo en la computadora [Geogebra] se ven bien definidas las unidades de la figura [*se dan cuenta de las propiedades del objeto matemático*].
Profesor:	¿Que pueden decir de la figura impresa [*papel-y-lápiz*]?
Alumno 4A:	Se tiene una figura que no es proporcional [*según sus características*].

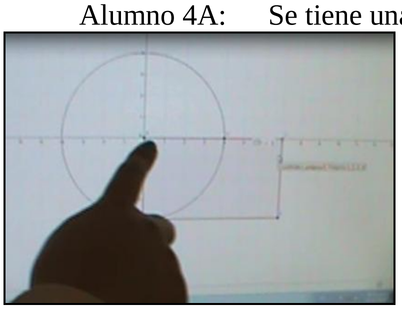

Figura 4. Primera Actividad en ambiente tecnológico. Los alumnos se dan cuenta de que el punto E no se encuentra en el punto medio del segmento $\overline{AD}$.

Acerca de la pregunta, expuesta en la Actividad, ¿cómo influye la forma de calcular la longitud del segmento $\overline{ED}$ con el software comparado con papel-y-lápiz? Los integrantes del Equipo 6 (Alumnos 6A y 6B) indicaron que “en lápiz y papel da la percepción que la circunferencia pasa por la mitad [del segmento] $\overline{AD}$ y en el software comprobamos que no [el punto E no está a la mitad del segmento $\overline{AD}$]”. Todos los equipos coincidieron en que al emplear el software pueden observar la medida de los segmentos, de esta manera, logran visualizar las propiedades de la figura; ya que en el ambiente de papel-y-lápiz se inclinaron por elegir la primera impresión (percepción visual) de la figura. Los resultados obtenidos muestran que al trabajar en ambiente de papel-y-lápiz, los alumnos, en su mayoría, visualizaron la figura de acuerdo con su percepción sin hacer uso de las propiedades o descomposición de la figura en partes más simples de ella (Duval, 1999). Además, aunque las representaciones deberían comunicar ideas de manera inequívoca, los alumnos interpretaron que no necesariamente coincide con las propiedades y características de la figura. Al hacer uso de la tecnología, el total de los equipos notó que la representación gráfica en ambiente de papel-y-lápiz no cumplía con las características y propiedades que debería presentar la figura, lo cual provocó una inadecuada visualización de esta representación.

La segunda Actividad consistió en analizar cómo los estudiantes externaban propiedades de figuras geométricas explorando la condición del problema. Tal condición está relacionada con el hecho de conectar un punto P (cualquiera) en el interior del cuadrado, con los vértices de la base del cuadrado; ésta debe satisfacerse para que sea posible relacionarla con los triángulos acutángulos. Los estudiantes debían identificar la zona o región donde los triángulos formados con el punto P son acutángulos (segunda condición). En el análisis de los datos surgidos de esta Actividad se consideran las similitudes de sus respuestas, de acuerdo con las regiones denominadas: *rectangular, triangular* y *especial* (véase Figura 5).

- *Región rectangular*: dos de los equipos identificaron la región solución del problema como una región de forma rectangular. Se observa en los datos recabados que los alumnos dividen el cuadrado en dos partes iguales (rectángulos horizontales), y consideran que en el interior del rectángulo superior se forman triángulos acutángulos.
- *Región triangular*: tres de los equipos identificaron la región solución del problema en forma triangular; ésta es una aproximación cercana de la solución correcta. Los alumnos no consideraron regiones cercanas de la base del cuadrado, pues en ellas se perciben triángulos acutángulos por debajo de la mitad del cuadrado.
- *Región especial*: sólo un equipo identificó una región cercana de la semicircunferencia; fuera de la cual, a su criterio, cumple la condición relacionada con los triángulos acutángulos.

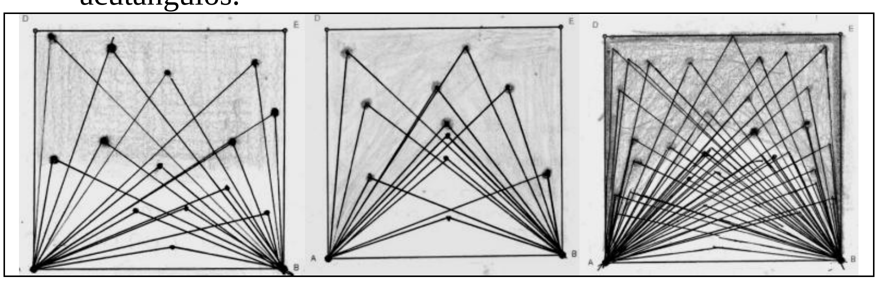

Figura 5. Segunda Actividad en ambiente de papel-y-lápiz. Regiones identificadas por los alumnos; denominadas: rectangular, triangular y especial, respectivamente.

En geometría euclidiana cuando se trata de representar el cambio de una figura (manteniendo sus características geométricas), por ejemplo, al cambiar el punto P, se generan nuevas representaciones relacionadas con un triángulo de base igual a la del cuadrado. En este proceso de transformación se busca comprender la idea de generar el movimiento mediante imágenes mentales del registro figural. Cuando los alumnos exteriorizaron las representaciones mentales existió una falta de dependencia con lo que se deseaba representar y con la misma forma de representarlo. Este hecho coincide con lo afirmado por Duval (1999), acerca de la gran diferencia entre las representaciones mentales de los alumnos y las representaciones semióticas que producen para expresar sus representaciones mentales (debido a la independencia de las funciones). Estas imágenes mentales corresponden a la visualización introspectiva expuesta por Phillips et al., 2010, sin embargo, para representar la idea de movimiento se debe generar más de una modificación en la imagen mental del registro figural. El tratamiento de figuras es un proceso demostrativo, que requiere control tanto cognitivo como semiótico; representado por la imagen mental en movimiento (Duval, 1999). En la segunda parte de esta Actividad, los alumnos formaron un cuadrado empleando Geogebra. Mediante sus herramientas ubicaron un punto cualquiera dentro del cuadrado y unieron dicho punto con los vértices de la base del cuadrado. En seguida, utilizaron la herramienta de medida de ángulo para obtener los valores de los ángulos interiores del triángulo. A través de la herramienta de Geogebra “Elige y Mueve”, los alumnos manipulaban el punto ubicado en el interior del cuadrado, y generaron una gran cantidad de representaciones y conservaron las características del objeto matemático. El total de los equipos logró determinar, con ayuda del software, la región que cumple la condición del problema, y que ésta [la región] presenta una relación en su forma con la de una semicircunferencia. En el interior de esta región es identificable un triángulo formado con el punto P y los extremos del diámetro de la semicircunferencia. Con esta información, ellos infirieron que la región que cumple la condición del problema es aquella que se encuentra dentro del cuadrado, pero fuera de la semicircunferencia (véase Figura 6D). El siguiente extracto evidencia el trabajo logrado por los miembros del Equipo 5 (alumnos 5A y 5B) en la segunda Actividad:

Profesor: De acuerdo con su análisis [en papel-y-lápiz] ¿creen que si colocamos el punto P fuera del triángulo que observan [*región triangular*] (véase Figura 6A), se cumple la condición de que los triángulos formados [triángulos APB] son acutángulos?
Alumno 5A: Al parecer no [*dudan de su respuesta*].
Profesor: Usando el software, ¿qué sucede si colocan el punto P próximo al triangulo [*región triangular*] pero fuera de él?, ¿los triángulos son acutángulos o no?
Alumno 5A: ¡Vamos a ver! Si, colocamos el punto por aquí (véase Figura 6B). ¡Tampoco se cumple!
Alumno 5B: Muévelo [*refiriéndose al punto P*] más a la derecha.
Alumno 5A: ¡Ahí! [*en ese lugar*], ¡ya no se cumple!
Alumno 5B: Hace rato habíamos visto lo que pasaba a este punto de aquí [*se refiere al punto P señalado con la pluma en la Figura 6C*] y por lo tanto no puede ser un triángulo. Creo que se va formando la mitad de un círculo, ya que si movemos el punto por aquí [*con la pluma, el alumno índica un movimiento semicircular en el monitor a partir del punto A*] se va acercando a 90°.
Profesor: Mencionaste un círculo. Usando las herramientas del software ¿podrían verificar su propuesta [*conjetura*]? ¿Qué sucede si colocan una circunferencia con centro en el punto medio del segmento $\overline{AB}$?
Alumno 5B: Este es el círculo (véase Figura 6D), ahora muévelo [*le indica a su compañero que mueva el punto P*].
Alumno 5A: Cuando está [*refiriéndose al punto P*] adentro del círculo este ángulo siempre es mayor [mayor que 90°] y cuando está afuera el ángulo es menor que 90°. Entonces ¡sí es el círculo!
Profesor: ¿Qué sucede si el punto P está sobre la circunferencia? Es decir, sobre su perímetro.
Alumno 5A: ¡A ver! Es casi de 90°. Muévelo acá [*el alumno indica a su compañero que desplace el punto P a un lugar sobre la circunferencia*].
Alumno 5B: ¡Es de 90°! Es un ángulo recto.
Alumno 5A: Entonces, si el punto [punto P] está sobre el círculo, el ángulo es de 90°. Significa que es [la circunferencia] el límite donde la región cumple la condición.

Mediante el uso del software, los alumnos comprendieron la idea de movimiento (representación dinámica). Cuando los estudiantes arrastraron un objeto geométrico empleando el SGD lograron visualizar el paso de un objeto estático a uno dinámico, lo cual [el arrastre] les permitió verificar la conjetura propuesta por ellos. El uso del SGD permitió a los estudiantes conjeturar propiedades del objeto geométrico surgidas de la representación dinámica. Esta interacción, entre el alumno y el software, favoreció el paso de lo concreto a lo abstracto. Al hacer uso del SGD los alumnos notaron que sus conjeturas propuestas en el ambiente de papel-y-lápiz eran erróneas, y con ayuda del software hallaron la región que cumplía con la condición del problema. Los alumnos lograron generalizar el comportamiento de los triángulos formados por la base del cuadrado y el punto P, lo cual permitió inferir a los estudiantes que pueden resolver problemas a partir de diversas situaciones concretas, las cuales permiten generalizar la solución de dicha problemática. Los estudiantes lograron una visualización introspectiva e interpretativa adecuada del objeto matemático (Phillips et al., 2010). La representación gráfica de un objeto dinámico vuelve evidente los límites tradicionales de las representaciones típicas posibles de registros figurales. De esta manera, se reduce la distancia cognitiva entre la representación física y la representación de las imágenes mentales (Phillips et al., 2010).

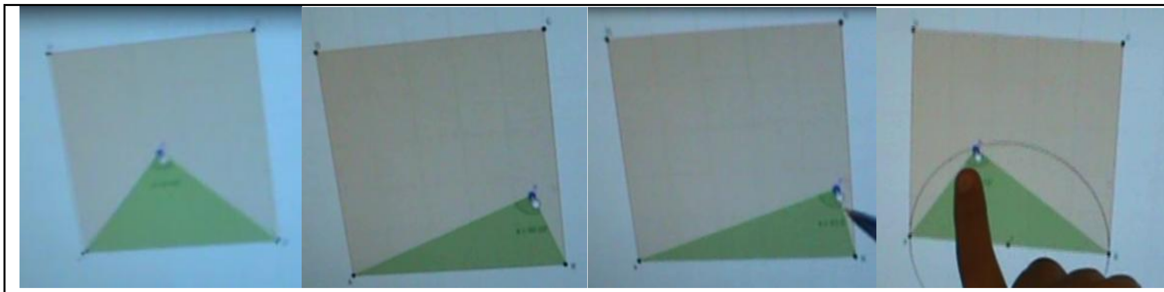

Figura 6(A,B, C y D, respectivamente). Segunda Actividad en ambiente tecnológico. Secuencia realizada por el Equipo 5 para hallar la región que satisface la condición del problema.

Al finalizar la Actividad se les preguntó a los estudiantes: el software ¿simplificó o dificultó la realización de la Actividad? En relación con esta pregunta, todos los alumnos respondieron que el uso del software simplificó la Actividad. Los integrantes de dos equipos dijeron que la manipulación del punto P, empleando el software, les permitió hacer visible diversos casos (particulares) que no lograron en la primera parte de la Actividad (ambiente de papel-y-lápiz). De acuerdo con los resultados obtenidos en el ambiente de tecnológico podemos afirmar que el uso de la tecnología permite establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas que pueden ayudar a los estudiantes en la visualización de relaciones matemáticas. Con el uso de las herramientas tecnológicas los estudiantes tienen la oportunidad de mover partes de configuraciones geométricas y observar cambios o invariantes de ellas (Santos, 2007).

Conclusiones

Con el reconocimiento de propiedades vinculadas con las representaciones, los estudiantes pudieron inferir conjeturas que, finalmente, les dieron pautas para definir conceptos ligados con la representación visual. Para dar respuesta a la pregunta ¿de qué forma la visualización promueve la construcción de significados matemáticos apoyados por el uso de los ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico?, se parte de que la interpretación por parte del alumno de la representación de un objeto geométrico, ya sea en el ambiente de papel-y-lápiz o en el tecnológico, depende de sus conocimientos previos y del contexto, así como de la interpretación misma del objeto. Cuando se emplean representaciones geométricas, su visualización involucra siempre dos operaciones visuales que tienden a asimilarse dentro de un mismo acto por parte del sujeto: por una parte, distinguir varias formas dentro de una figura; por otra, identificar estas formas o su configuración representada, usando información previa plenamente reconocida por quien lleva a cabo el proceso de visualización. Como lo plantea Duval (2003), “ver” en matemáticas es una actividad cognitiva del sujeto; que puede ser más compleja o más diversificada de lo requerido fuera de esta disciplina. De acuerdo con los resultados obtenidos en esta investigación, podemos afirmar que las figuras geométricas como cuadrados, rectángulos o triángulos no fueron percibidas por ellos como configuraciones de tres o cuatro unidades figurales 1D (tres o cuatro segmentos), sino como unidades figurales simples 2D que de cierta manera no pueden descomponerse en unidades 1D. La dificultad de identificación de la representación de objetos matemáticos no solamente es imputable a los alumnos, sino a los factores internos del proceso de identificación y del tratamiento visual de las formas 2D. Tomando en cuenta estas dificultades, podemos afirmar que el manejo del registro visual no es fácil ni natural.

Durante las Actividades visuales no se puede dejar sobreentendido que los estudiantes requieran instrucción explícita sobre el uso e interpretación de objetos matemáticos, ya sean estáticos o dinámicos. Tomando como cierta esta aseveración, podemos afirmar que quienes usan tecnología como herramienta de enseñanza pueden ser demasiado optimistas, y creer que los estudiantes aprenden a visualizar de forma profesional simplemente mediante su uso. La visualización de figuras provenientes de ambientes dinámicos potencia el entendimiento de ideas matemáticas abstractas. Sin embargo, la visualización puede ser confusa para los estudiantes, ya que los objetos, accesibles a nuestros sentidos no son fiables y, por lo tanto, la visualización o percepción podría ser engañosa. El dilema se centra en lo que se busca obtener: la visualización es una simplificación de las matemáticas, o bien, una falsificación de ellas. La visualización de representaciones de objetos matemáticos requiere reflexión tanto de los profesores como de los estudiantes. Durante este estudio se destaca la reacción de los estudiantes sobre lo que es visual, utilizando instintivamente la percepción e interpretación de los objetos matemáticos de acuerdo con lo que la representación gráfica permite evocar en ellos. Los resultados concuerdan con lo expuesto por Duval (2003), quien afirma que las personas no especialistas en visualización, simplemente pasan por alto características de la representación, aunque también pueden inventar representaciones de contenidos con significado personal, aun si no se está convencido de la certeza de las ideas que se asimilan y que no se parecen en lo absoluto a las representaciones matemáticas convencionales.

Al emplear la tecnología (SGD) como herramienta de exploración y de reflexión de conceptos matemáticos, los estudiantes lograron vincular los objetos geométricos con sus propiedades, y generar conceptos del objeto geométrico. Cuando se trabaja con papel-y-lápiz, la representación geométrica le da al estudiante poca visión sobre el objeto, pues no lo puede manipular. En cambio, al utilizar algún software (SGD) el estudiante adquiere recursos de apoyo. Estos recursos permiten al estudiante establecer *puentes* entre la representación del objeto matemático y sus propiedades. La representación geométrica mostrada en el medio tecnológico, permite interaccionar con el objeto geométrico; además de poder manipularlo sin modificar sus propiedades estructurales. Al hacer uso de la herramienta tecnológica, los estudiantes notaron que durante el trabajo con papel-y-lápiz sólo les permitía percibir e interpretar el objeto geométrico, lo cual les impedía percibir aquellas propiedades con las que cuenta ese objeto. En el ambiente tecnológico, los estudiantes lograron, además conjeturar en torno a las propiedades y condiciones necesarias de una familia de figuras (como parte de la solución del segundo problema). Esta interacción favoreció el paso de lo concreto a lo abstracto. Tomando como verdadera esta aseveración, se puede inferir que los estudiantes luego de aplicar matemáticas para resolver problemas pueden conjeturar implicaciones para la situación concreta (problema). El SGD permite incorporar visualizaciones de figuras geométricas no sólo estáticas de dos dimensiones, sino también dinámicas con la finalidad de contribuir a una mejor comprensión de conceptos matemáticos partiendo desde operaciones concretas hasta lograr articular conceptos abstractos de esta disciplina. Como resultado de la interacción con el software los estudiantes descubrieron propiedades y lograron formular conjeturas de acuerdo con sus observaciones mediante la manipulación de las representaciones figurales de los objetos geométricos. Es cierto que el SGD potencia el aprendizaje de conceptos geométricos, pero no es sólo este ambiente que debemos tomar en cuenta como herramienta de enseñanza, sino que es crucial también el uso de papel-y-lápiz, pues ellos se complementan con la finalidad de lograr éxito (parcial) en la visualización de objetos matemáticos, además de que favorece el planteamiento de conjeturas de conceptos abstractos surgidos de tales representaciones.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in The Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics: Springer 52, 215–24.*

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática, Colombia.

Duval, R. (2003) "Voir" en Mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Fondo de Cultura Económica. ISBN: 968-16-7028-0

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 62, 103-131. doi: 10.1007/s1649-006-0400-z

Haciomeroglu, E. S. (2011). Visualization through dynamic GeoGebra illustrations. En L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 133-144). Rotterdam: Sense Publishers. ISBN: 978-94-6091-618-2

Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Revista de Educación Matemática*, 7(1), 63-75. ISSN: 0187-82988

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. ISBN: 90-77874-19-4

Phillips, L.M., Norris, S.P., & Macnab, J.S. (2010). *Visualization in mathematics, reading and science education.* New York: Springer. 5, 19-34. ISBN 978-90-481-8816-1

Santos, L. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* (pp. 190-194). México: Grupo Editorial Iberoamérica. ISBN: 978-97-065-154-1