Un Enfoque Transdisciplinario de Cálculo Potenciado por Tecnología

H. E. **Bosch**
hbosch@funprecit.org.ar
M. S. **Bergero**
msbergero@gmail.com
M. A. **Di Blasi** Regner
mario.diblasi@gmail.com
M- C. **Rampazzi**
mcrampazzi@gmail.com

Resumen

Se presenta un enfoque sobre cómo enseñar Cálculo considerando que la matemática debe integrarse en un tejido transdisciplinario de ciencias, tecnologías y aplicaciones a diversos aspectos de la vida. Ello implica que la enseñanza de matemática, particularmente de Cálculo, debe ligarse con aspectos de la vida real, intercambiando conceptos de otras ciencias y utilizando las tecnologías actuales en forma combinada. Se propone encuadrar la enseñanza de Cálculo en un marco conceptual de in-tegración de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemática (STEM por sus nombres en inglés).Ello implica también que la obtención de datos experimentales sobre fenómenos de la vida real sea importante, tanto para la formulación de modelos como para la formación de los estudiantes.

Como ejemplo de unidad didáctica se muestra la descripción matemática y física del movimiento uniformemente acelerado de un carro que se mueve sobre un riel inclinado. Se utiliza un sistema de registro, procesamiento y representación de datos como tecnología básica, aparte de programas de procesamiento y representación gráfica computacional.

Se interrelaciona el concepto de derivada de una función con las definiciones de velocidad y aceleración instantánea del movimiento del carro. Se refiere la operación inversa a la derivación con la obtención del modelo que predice el desplazamiento del carro sobre un riel inclinado. Para que este enfoque pueda ser conducido por docentes de matemática, es necesario que éstos adquieran los conocimientos y

prácticas necesarios en Workshops organizados por los investigadores que desarrollan este tipo de unidades didácticas.

Introducción

Los libros y cursos clásicos de Cálculo enfocan su enseñanza desde un único punto de vista matemático proponiendo ejercicios generalmente abstractos, desligados de la vida real, resolviendo ecuaciones sin plantear los problemas que las generan.

La clave consiste en considerar que la educación en ciencias matemáticas tiene que ser parte de la ciencia de interés público. Se debe aprender ciencias matemáticas para resolver problemas, que es la demanda de la Sociedad. Resolver ecuaciones aisladas de contexto no significa una solución. Las soluciones son útiles cuando demuestran ser respuestas a problemas prácticos, con validación experimental, de ser posible.

La tecnología debería ser una componente integral de los métodos de enseñanza y no ser tratada, como es habitual, como una herramienta independiente de las aplicaciones educativas. La tecnología debe ser usada para ayudar al estudiante a interactuar con los contenidos de las ciencias y de matemática en una forma de promover un mayor entendimiento de ideas complejas, facilitar la solución de problemas complejos y crear nuevas oportunidades de educación.

Es necesario dar vuelta la página y plantear la enseñanza de Cálculo sobre la base de un nuevo enfoque transdisciplinario, usando la tecnología computacional y presentando problemas de la vida real. Existe actualmente una evidencia hacia un enfoque interdisciplinario del aprendizaje de las ciencias naturales y ciencias matemáticas. Esta tendencia es congruente con el concepto de educación STEM (Sciences,, Technology, Engineerng and Mathematics) ampliamente difundida en instituciones educativas del mundo. Se ha demostrado que los problemas de la vida real son esencialmente interdisciplinarios, de tal modo que las soluciones deben ser también enfocadas de la misma forma. Por otra parte, la educación STEM propugna un entrelazamiento equitativo entre sus componentes, lo cual implica que la tecnología debe ser integrada con las ciencias, la matemática y la ingeniería.

Se muestra en el presente trabajo un ejemplo de cómo debe introducirse la trans disciplinariedad y las tecnologías para enseñar conceptos básicos de Cálculo.

Marco conceptual y Metodología

Se adopta el marco conceptual de educación STEM , o sea la educación integrada de ciencias naturales y ciencias matemáticas potenciada por el uso de tecnologías electrónica e informática y sistemas computacionales de cálculo y representación gráfica. El marco conceptual también incluye el desarrollo de experiencias para proveer datos y elaborar un modelo que describa y prediga el comportamiento del sistema en observación. La modelización implica concebir algoritmos a partir de los resultados experimentales. Luego se resuelve matemáticamente el algoritmo, generalmente a partir de una ecuación diferencial con condiciones de contorno o iniciales dadas por la experiencia. El objetivo final es obtener una ecuación o sistema de ecuaciones que prediga o predigan el comportamiento del sistema.

En resumen, la metodología de diseño de recursos didácticos STEM debe estar basada sobre las siguientes características:

→ Resolución de problemas

→ Generar experimentos y estructurar modelos

→ Procurar trabajo en equipo
→ Procurar que alumnos aprendan a expresar sus conceptos y comunicar sus resultados.

Las experiencias de laboratorio proveen oportunidades para los alumnos de interactuar con el mundo real, usando herramientas, técnicas de colección de datos, modelos y teorías científicas. La estructuración de modelos sobre el comportamiento de fenómenos observados constituye una sólida base para el aprendizaje.

El interés de todo recurso didáctico con contenidos de las ciencias es que los estudiantes tengan una oportunidad de ejercitar su pensamiento más que su memoria, aprender a resolver problemas científicos en general y mejorar su experiencia y actitudes hacia el aprendizaje de las ciencias. En particular, los estudiantes deben aspirar a poseer ciertas cualidades básicas de todo estudioso de las ciencias, tales como:

- Cultivar una comunicación efectiva oral y escrita de las ideas científicas;
- Lograr un entendimiento básico del manejo de datos y los métodos estadísticos para tratarlos;
- Aprender a encarar modelos de la vida real utilizando métodos computacionales;
- Desarrollar el razonamiento científico;
- Entender la complejidad y la ambigüedad del trabajo empírico;
- Desarrollar habilidades prácticas;
- Desarrollar habilidades de trabajo en equipo.

Si bien este es un *desideratum,* la mayoría de estudiantes que han seguido cursos de ciencias durante los últimos 50 años no han ganado un entendimiento genuino de conceptos, prácticas y hábitos usados sobre disciplinas científicas. Lecciones dadas por el profesor, libros, ejercicios y problemas se han mantenido intactos durante el último medio siglo.

En el presente, la educación superior debe preparar graduados para la arena internacional, lo cual obliga a aprender nuevos conceptos, entender sistemas complejos, manejar grandes cantidades de datos , pensar en forma creativa y crítica, comunicar y colaborar.Este marco conceptual y metodología pueden aplicarse en los cursos básicos de matemática como una innovación en la concepción de la enseñanza de las ciencias matemáticas para la sociedad contemporánea, abandonando la concepción que han mostrado los libros clásicos de matemática hasta el presente.

Como lo demuestra la experiencia, los problemas de ingeniería poseen una componente importante de las ciencias naturales y las ciencias matemáticas. Muchos de los problemas de las ciencias y de la ingeniería se plantean mediante una modelización matemática algorítmica, cuya solución requiere del uso de tecnología computacional. Por consiguiente, la metodología de diseño de recursos didácticos en el ámbito de ingeniería ciencias y matemática debe estar centrada en la actividad del alumno realizando experimentos con sus manos (*hands-on, la main à la pâte*).

Con el objeto de adoptar el paradigma STEM es necesario cambiar los procedimientos de enseñanza y pedagogías que están presentes desde hace 50 años, cambiar el aula clásica y la disposición de los estudiantes para que trabajen en grupo con sus computadoras, paquetes de software, de tal manera que puedan encarar nuevas áreas tales como cálculo, visualización, análisis de datos y graficación instantánea, de fluido uso.

Resultados

Como resultado de la exposición metodológica y marco conceptual se han realizado diseños de recursos didácticos integrando la matemática con las ciencias naturales y la experimentación. Se plantea a continuación una propuesta de cómo puede enseñarse el concepto de derivación e integración relacionado con el estudio experimental de un simple problema de la vida real: estudiar el movimiento uniformemente variado de un carro que se mueve en un riel inclinado.

Se estudia el movimiento de un carro sobre una guía rectilínea en posición inclinada, acoplado a un sistema de registro automático de datos constituido por una persiana, una foto compuerta y un programa incorporado a una computadora. En la pantalla de ésta aparecen los resultados en tablas numéricas y gráficos. En la Fig. 1 se muestra el arreglo experimental. Se ubica el carro en el extremo superior del carril, se lo suelta y se mueve hacia abajo. Cuando ha pasado la persiana completa por la foto compuerta, se cierra la experiencia y aparece en la pantalla una tabla con los respectivos valores de los intervalos de tiempo que tarda cada intervalo de bandas en pasar por la compuerta.

*Figura 1.*Arreglo experimental para estudiar el movimiento del carro.

El programa calcula las relaciones de incrementos $\frac{\Delta x}{\Delta t_i}$ para cada intervalo de tiempo t_i , $t_i + \Delta t_i$, las cuales definen el parámetro llamado **velocidad media del carro** para cada intervalo
t_i , $t_i + \Delta t_i$

$$v_{m_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t_i} \qquad (1)$$

Como los intervalos de tiempo Δt_i **disminuyen** en el transcurso del tiempo, las velocidades medias v_{m_i}, **aumentan.** Se calculan los incrementos de velocidades medias

$$\Delta v_{mi} = v_{mi+1} - v_{mi} > 0$$

y se los divide a cada uno por los respectivos intervalos de tiempo Δt_i.

Se trata ahora de un nuevo cociente incremental llamado **aceleración media,** para cada intervalo de tiempo t_i , $t_i + \Delta t_i$

$$a_{m_i} = \frac{\Delta vmi}{\Delta t_i} \qquad (2)$$

Si se analizan estos cocientes, resultando todos iguales, dentro de los errores experimentales. Por lo tanto, se deduce que las aceleraciones medas son todas iguales a una misma constante.

La Fig. 2 muestra la gráfica de las velocidades medias en función del tiempo.

Si se utiliza otra persiana con distancias entre bandas negras $(\Delta x)_1$ más pequeñas, los intervalos de tiempo correspondientes t_i, $t_i + (\Delta t_i)_1$ también serán más pequeños. Con esta nueva persiana quedan definidas nuevas velocidades medias para cada intervalo t_i, $t_i + (\Delta t_i)_1$. En particular, al mismo tiempo t_i que se eligió anteriormente, le corresponde la velocidad media $(v_{mi})_1$ definida para el intervalo t_i, $t_i + (\Delta t_i)_1$

$$(v_{mj})_1 = \frac{\Delta x1}{\Delta ti1}$$

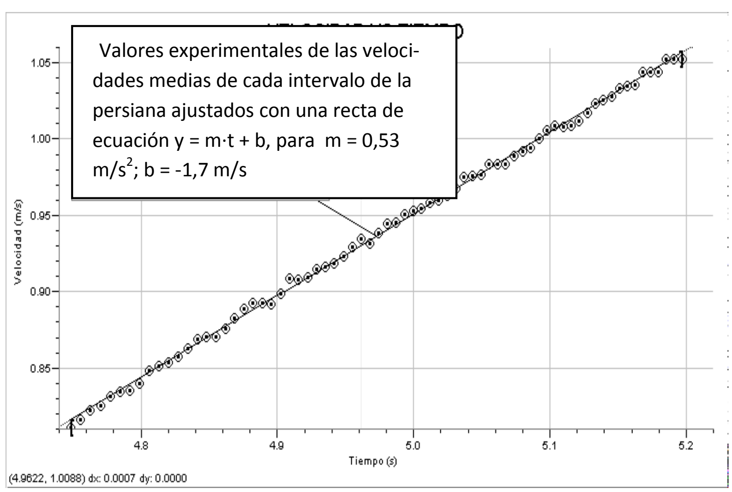

Figura 2. Representación de los valores de las velocidades medias correspondientes a cada intervalo de tiempo t_i, $t_i + \Delta t_i$, ajustados con una recta de pendiente positiva, según el movimiento experimentado por el carro. La ecuación de la recta de ajuste está indicada en el borde superior, donde m = 0,53 es la pendiente, b = -1,73 es la ordenada al origen.

Si se utiliza otra tercera persiana con distancias entre bandas negras $(\Delta x)_2$ más pequeñas, los intervalos de tiempo correspondientes t_i, $t_i + (\Delta t_i)_2$ también resultan más pequeños. Con esta nueva persiana quedan definidas las nuevas velocidades medias para cada intervalo t_i, $t_i + (\Delta t_i)_2$. En particular, al mismo tiempo t_i que se eligió anteriormente, le corresponde la velocidad media $(v_{mj})_2$ definida para el intervalo t_i, $t_i + (\Delta t_i)_2$

$$(v_{mj})_2 = \frac{\Delta x2}{\Delta ti2}.$$

Teniendo en cuenta la sucesión de velocidades medias obtenidas con diferentes persianas, para el mismo tiempo t_i

$$\frac{\Delta x}{\Delta t_i}, \frac{\Delta x1}{\Delta ti1}, \frac{\Delta x2}{\Delta ti2},$$

Se observa que dicha sucesión tiende a un valor finito único para cuando el intervalo de tiempo Δt es cada vez más pequeño. Ese valor se define como velocidad escalar instantánea v_i del carro al tiempo t_i

- ***Velocidad escalar instantánea*** $$v(t_i) = \lim_{\Delta t_j \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t_i}\right). \qquad (3)$$

Esta definición es la definición matemática de la derivada de la función x(t) respecto del tiempo, para el instante t_i

Velocidad escalar instantánea: $$v(t_i) = \frac{dx}{dt} \qquad (4)$$

La Fig. 3 esquematiza el límite al cual tiende las velocidades medias al tiempo t_i, cuando los sucesivos incrementos Δt_i disminuyen, que es el valor $v(t_i)$ de la función velocidad al instante t_i.

Para la descripción de un *movimiento uniformemente acelerado* se tiene en cuenta la aceleración media escalar en un intervalo de tiempo t_i, $t_i+\Delta t_i$, definida por

$$a_{mi} = \frac{\Delta vi}{\Delta t_i}\ . \qquad (5)$$

Siguiendo un procedimiento similar al de la definición de velocidad instantánea, se define la aceleración instantánea como límite del cociente incremental (5) para el instante t_i

Aceleración escalar instantánea al tiempo t_i:

$$a_i = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\Delta vi}{\Delta t_i} = \frac{dv}{dt}. \qquad (6)$$

La característica del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de un cuerpo es que su aceleración es constante y positiva.

La derivada de esta función, que es la aceleración contante, tiene el valor $a = 0.53$, que a su vez, es el valor de la pendiente de la recta de ajuste de los valores experimentales de las velocidades medias de ka Fiig. 2. Por lo tanto, se concluye que la velocidad del carro varía linealmente con el tiempo (con pendiente positiva igual a la aceleración *a*).

$$v = 0.53\ t - 1.7. \qquad (7)$$

Conocido el valor de la aceleración, obtenido experimentalmente, se plantea determinar la ecuación de movimiento del carro, o sea conocer la posición del cuerpo en cada instante mediante la función desplazamiento x(t) . Para ello se parte de la ecuación (6)

: $a = \dfrac{dv}{dt}$ con la condición inicial para t =0 es v = b = - 1.7 m/s

Mediante la realización de la operación inversa de la derivación, que es la integración

$$v + 1.7 = \int_0^t a\cdot dt = a\cdot t$$

se obtiene

$$V(t) = a\, t - 1.7.$$

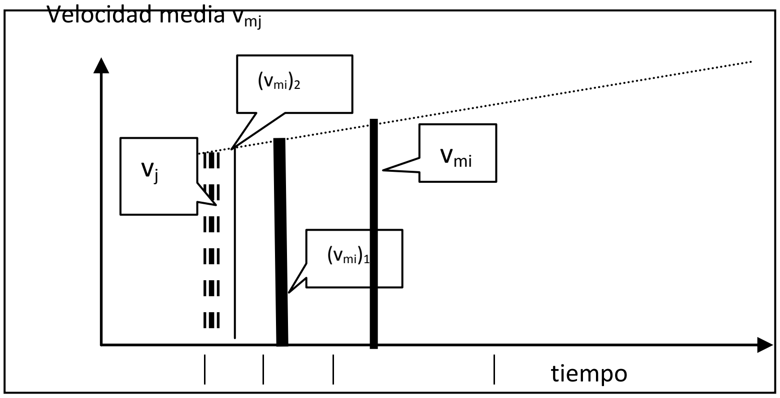

Figura 3. Valores de las velocidades medias v_{mj} para diferentes intervalos de tiempo, a partir del tiempo t_i. Se parte del intervalo más grande (Δt_i), el valor de v_{mi} se representa en la abscisa correspondiente al punto medio del intervalo. Sucesivamente para intervalos de tiempo más pequeños. Los correspondientes valores de v_{mi} tienden a un valor f*inito único v_i.*

Como, a su vez, la velocidad es la función derivada del desplazamiento según la relación (4), para determinar la función desplazamiento se debe realizar la operación inversa de la derivación, que es la integración:

Si $v = \dfrac{dx}{dt}$ con la condición inicial para t = 0 es $v_0 = -1.7$, $z = x_0$ resulta

$$x - x_0 = \int_0^t v \cdot dt = \int_0^t (0.53\, t - 1.7) \cdot dt = 0.53\, (½\, t^2) - 1.7\, t$$

$$x = 0.265\, t^2 - 1.7\, t + x_0 \qquad (8)$$

El desplazamiento del carro varía cuadráticamente con el tiempo. El coeficiente del término cuadrático es igual a la mitad del valor de la aceleración *a*. El coeficiente x_0 se determina experimentalmente. El sistema automático de registro de movimiento del cuerpo provee un gráfico de los desplazamientos de las diferentes porciones Δx de la persiana respecto del inicio de la persiana, según se muestra en la Fig. 4. Estos valores son ajustados por una función cuadrática con los mismos valores de los dos primeros coeficientes, proveyendo el valor del tercer coeficiente.

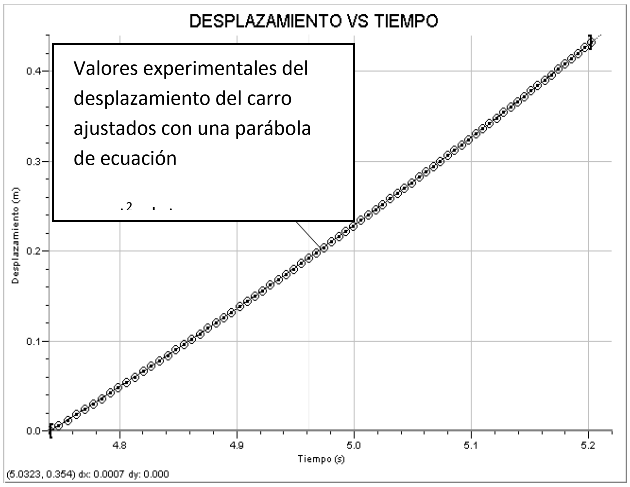

Figura 3. Representación gráfica de los valores experimentales de los desplazamientos D_i de las bandas negras respecto de la banda inicial, para cada tiempo t_i, correspondiente a un movimiento uniformemente acelerado. Se observa un arco de parábola con concavidad hacia arriba.

Discusión de resultados

A partir del estudio de un problema de la vida real como el movimiento de un carro sobre un riel inclinado, se ha desarrollado una metodología de diseño de recursos didáctico en la cual están embebidos conceptos físicos y matemáticos, aparte de recursos tecnológicos modernos y programas de cálculo y graficación.

Se parte del estudio experimental, obteniendo datos de velocidades medias y aceleraciones medias. Mediante el uso de persianas con intervalos entre bandas negras cada vez más pequeños se obtiene la sucesión de velocidades medias cuyo límite es la velocidad instantánea, según la definición general de derivada de una función, en este caso cuya variable independiente es tiempo.

Se plantea la operación inversa de derivación a partir de la constante característica del movimiento, que es la aceleración, obteniéndose un modelo que predice la expresión del desplazamiento del carro sobre el riel, cuyos coeficientes son datos experimentales.

Este ejemplo muestra un camino de cómo: enseñar los conceptos matemáticos relacionados con problemas reales que pueden experimentarse. Los datos numéricos no son arbitrarios, surgen de la experiencia.

Conclusiones

Los recursos didácticos que se proponen para integrar la enseñanza experimental de ciencias y matemática tienen por objeto posibilitar que el docente guíe al alumno en la aplicación del método científico de la manera que actualmente se desarrolla la ciencia con un enfoque transdisciplinario.

Como la mayoría de los textos de ciencias y matemática no contemplan experiencias, es preciso enfatizarlas, pues ellas permiten trabajar con conceptos, leyes, métodos y procesos, y los derivados de ellos, que son los contenidos. Cada ***unidad didáctica*** debe ser enmarcada con una motivación acorde con los intereses y saberes previos de la población a la cual va a ser aplicada. Debe existir un cierre de la actividad que contemple instancias de comunicación y aplicación, con el agregado de actividades de evaluación correspondientes al nivel y propósito. Es importante que a lo largo de todo el proceso, en todo momento, el docente fortalezca la integración teoría-experimentación-resolución de problemas.

La comunidad de educadores de matemática debe estar atenta a esta transformación. Se requieren cambios en la forma en que los docentes son educados en matemática. Es necesario prepararlos en una forma integrada de conocimientos en Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemática. Como imagen, esta comunidad debe ver a las ciencias matemáticas según un diagrama elaborado por la Academia de Ciencias de EE. UU., que se muestra a continuación.

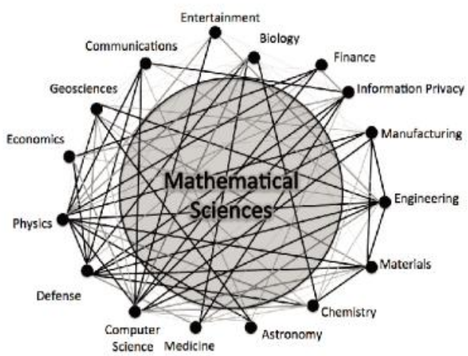

Figura 4. Esquema de la trans disciplinariedad de las ciencias matemáticas.

Bibliografía

National Science Foundation. www.nsf.org/ITEST (Fecha de consulta: permanente).

Remath. London Knowledge Lab. London WC1N 3QS. United Kingdom.

Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) Education Issues

and Legislative Options (2006). *CRS Report for Congress,* Order Code RL33434

Successful STEM Education: A Workshop Summary. www.nap.edu/catalog/id.13230

Workshop on Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) Enterprise: Measures for Innovation & Competiveness (2009), *George Washington University*, Washington,

STEM integration on K-12 Education-Prospects and Agenda for Research. (2014). *National Academy of Sciences.*

The Mathematical Sciences in 2025*",* (2014). *Report U. S. National Academies Press,*

A Framework for K-12 Science Education: Practices, Crosscutting Concepts, and Core Ideas (2012). *National Academies Press*).

European School Net Observatory (2014). www.eun.org

Desire Project (2014). http://desire.eun.org.