



## Instrumentalización de la elipse utilizando Geogebra

José Carlos **León** Ríos<sup>1</sup>

Pontificia Universidad Católica del Perú  
Perú

a19801146@pucp.edu.pe

Jesús V. **Flores** Salazar<sup>2</sup>

Pontificia Universidad Católica del Perú/IREM-PUCP/grupo DIMAT  
Perú

jvflores@pucp.pe

### Resumen

Este artículo forma parte de la tesis del primer autor, acerca de los procesos de instrumentalización de la elipse haciendo uso del Geogebra. La experiencia estuvo dirigida a los alumnos del primer ciclo del curso de Matemática I de una universidad privada de la ciudad de Lima. El proceso de instrumentalización se basó fundamentalmente en el enriquecimiento de las propiedades de la elipse durante una secuencia de actividades, las cuales permitieron correlativamente el surgimiento de la elipse como instrumento. Como referencial teórico, usamos el enfoque instrumental de Rabardel, con el que logramos analizar las acciones de los alumnos, mediante la identificación de esquemas pre existentes y otros posibles esquemas de utilización que los alumnos construyeron o movilizaron cuando interactuaron con la elipse, como la condición geométrica de la elipse, la relación entre sus parámetros, la excentricidad, la ubicación de los vértices, focos, vinculando, la representación gráfica a la expresión algebraica correspondiente.

*Palabras clave:* Geogebra, enfoque instrumentalización, instrumentación, génesis instrumental, esquemas de uso, esquema de acción instrumentada

### Introducción

---

<sup>1</sup> Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Profesor Estudios Generales de la Universidad de Lima. Lima, Perú.

<sup>2</sup> Pos doctorado en el Programa de Estudios Pos-graduados en Educación Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo. Bolsista PDJ-CNPq /Brasil.

Nuestro trabajo de investigación es una propuesta paralela al proceso de enseñanza y aprendizaje de la elipse y que incluye construcciones y representaciones geométricas, que como tal, puede ser integrado al enfoque tradicional de la geometría analítica.

En ese sentido, algunas investigaciones como la de Fernández (2011), reconoce distintas categorías de problematización, como la tendencia a marginar curricularmente las cónicas del contenido geométrico, la omisión de las construcciones geométricas y la escasez de estudios sobre lugares geométricos. En dicha investigación el autor sugirió la necesidad de fomentar las construcciones geométricas de dichas curvas e intégralas al enfoque analítico actual. De igual forma, el trabajo de Santa (2011), la cual busca una complementariedad de la enseñanza tradicional de la geometría analítica, ya que analiza la comprensión de la elipse como lugar geométrico a través de un objeto concreto, el doblado del papel. Además, con el objetivo de obtener la condición geométrica de la elipse, la investigadora realizó construcciones previas de los lugares geométricos de las mediatrices y circunferencias.

A partir de nuestra experiencia como docentes, hemos detectado que dicho problema también es percibido en los alumnos de la escuela de Arquitectura donde realizamos el estudio. Es así que hemos observado, una desatención en las construcciones y lugares geométricos en los programas curriculares, lo cual ocasiona la restricción del uso de las construcciones geométricas que los alumnos traen consigo, como el trazo de la mediatriz, la determinación del punto medio de un segmento, que en otro caso, permitirían el reforzamiento y la reutilización de estos constructos geométricos. Pensamos también que la permanente vinculación entre las secciones cónicas y el sistema de coordenadas cartesiano, contribuye a que el alumno considere a la elipse como una curva dependiente de dicho sistema, y que en otros contextos de referencia, o incluso prescindiendo de éstos, el alumno no considere las propiedades de dicha curva como propiedades invariantes Finalmente, debido a la permanente predominancia algebraica en los primeros contactos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la elipse, reconocemos la necesidad de promover el fomento de las construcciones geométricas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Es necesario mencionar el uso del Geogebra, como ambiente de la geometría dinámica (AGD), el cual tuvo un rol protagónico en nuestra investigación, por tratarse de una fuente de apoyo en la enseñanza y aprendizaje de la elipse. En relación al uso paulatino de dicho AGD, Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strasser (2006) señalan que en las últimas décadas, se observa involucrada a toda la comunidad educativa y en la que estamos inmersos los docentes como protagonistas del cambio. Precisamente, los autores indican, que existe una carencia de representaciones gráficas vinculadas a sus significados geométricos y que dichos problemas con los que la enseñanza se ha enfrentado en las pasadas décadas, está ligada a la dualidad de los procesos axiomáticos deductivos y el de las representaciones gráficas – geométricas, empíricas. En ese sentido, dichos investigadores, mencionan que algunos intentos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría han llevado a otros investigadores a centrarse en el rol que juegan las representaciones gráficas proporcionadas por los ambientes de geometría dinámica.

### **Aspectos metodológicos**

La metodología seleccionada para nuestra investigación fue la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), la cual nos permitió mostrar las conclusiones de nuestras actividades, y confrontar nuestros supuestos elaborados en la fase de concepción y análisis *a priori*, con los datos recolectados en la fase de experimentación, con lo cual pudimos elaborar un análisis *a*

*posteriori* y una validación interna. En esta investigación, realizamos un análisis preliminar en la que describimos: el desarrollo histórico de la elipse, los conocimientos previos requeridos por el alumno y los textos que la institución consigna para el desarrollo del curso.

Precisamente, en la aproximación histórica, consideramos a Boyer (1987) como referencial histórico, e incluimos las primeras manifestaciones griegas hasta sus aplicaciones en el campo de la astronomía, en el siglo XVII aproximadamente. En la parte cognitiva, elaboramos una prueba de diagnóstico en la que consideramos como conocimiento preexistente: el lugar geométrico de la circunferencia, parábola, mediatriz de un segmento y propiedades de un triángulo isósceles. Finalmente, en la secuencia didáctica, elaboramos una revisión a los textos referidos al capítulo de elipse, los cuales mostraron cómo se continúa privilegiando el enfoque tradicional de la geometría analítica.

### **Marco teórico**

Con el fin de analizar en este artículo, el enriquecimiento de la condición geométrica de la elipse por parte de los alumnos, hemos considerado presentar el enfoque instrumental de Rabardel (1995). En ese sentido, describimos algunos términos que hicimos uso en el presente artículo, y que consideramos nos permitirán analizar cómo los alumnos interactúan con la elipse.

Señala Rabardel (1995), indica que toda situación de actividad o de utilización de artefactos, instrumentos, existe siempre una tríada de elementos relacionados de manera explícita o implícita, formada por el sujeto, el instrumento y el objeto, siendo el instrumento un intermediario entre el sujeto y el objeto.

El sujeto, indica el autor, puede entenderse como un usuario, alumno, operario, trabajador, agente, individuo, grupo de individuos o estudiantes que desarrollan una determinada acción con un instrumento. El instrumento puede ser una herramienta, máquina, incluso una propiedad, que sirve como mediador entre el sujeto y el objeto a donde va dirigida la acción con ayuda del instrumento. El artefacto en cambio, no especifica un tipo de relación particular con el objeto al cual se dirige. El autor señala que el artefacto es elaborado para inscribirse en actividades intencionales, siendo la intencionalidad la causa de su existencia. Es decir, que el artefacto, material o no, puede transformar a los objetos y concreta una solución a un problema o a una clase de problemas sociales. Entonces, el artefacto solamente pasará al estado de instrumento, cuando el sujeto le asigne los esquemas de utilización correspondientes, es decir esquemas relacionados con la utilización de un artefacto. Por lo tanto dichos esquemas tendrán una relación dual: por un lado, se relaciona con los artefactos pues los convierten en medios; y por otra parte, con los objetos sobre los cuales estos artefactos permiten actuar. Por lo tanto, el instrumento no existe en sí, es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, cuya característica principal sea la de adaptarse al sujeto y al objeto. El autor, señala que el término instrumento designa el artefacto en situación, inscrito en su uso, en una relación instrumental entre dos entidades que son el sujeto, y el objeto sobre el cual se actúa.

Así, de acuerdo con Salazar (2009), con relación a la investigación de Rabardel, dichos esquemas comprenden diferentes variantes. La primera, referida a las acciones que se focalizan en las características, propiedades y actividades específicas del artefacto, llamadas esquemas de uso (EU) y la segunda, que son las acciones orientadas hacia el objeto de la actividad, hacia la tarea principal del sujeto, llamadas esquemas de acción instrumentada (EAI). Además, la investigadora indica que un mismo esquema puede, dependiendo de la situación, ser un esquema de uso y en otra circunstancia un esquema de acción instrumentada. En ese sentido, León (2014),

muestra un ejemplo en su investigación de la elipse, indica que si se desea hallar la longitud del lado recto en términos de sus semiejes, la condición geométrica de la elipse, podría ser un esquema de uso o podría tratarse también de un esquema de acción instrumentada para un alumno que inicia el estudio de la elipse.

De igual forma, Rabardel (1995) señala que es necesario considerar un esquema adicional a los mencionados, y describe al esquema de actividad colectiva instrumentada (EACI) que corresponde a la utilización de un instrumento en un contexto de actividades compartidas con otros usuarios, ya que como individuos no estamos solos, sociabilizamos constantemente, interactuando con otros individuos incluso con los creadores del artefacto los cuales implícitamente forman parte del surgimiento de nuestros esquemas.

En ese sentido, el investigador indica que las dos dimensiones que componen el instrumento, artefacto y esquema, están relacionadas pero mantienen independencia, es decir un esquema puede aplicarse a otros esquemas de la misma clase, clases vecinas o diferentes. Por ejemplo, según León (2014) los esquemas de utilización de una elipse pueden ser llevados también a un esquema de clase vecina como el de la hipérbola. De manera correlativa, un artefacto puede ser insertado en otros esquemas de utilización como la elipse insertada en la construcción de elipsoides.

Finalmente, Rabardel (1995) define la Génesis Instrumental como la elaboración o construcción de un instrumento, que permite la continuidad de las acciones en los distintos artefactos, materiales o simbólicos, por parte de los sujetos. Existen dos procesos que contribuyen de manera solidaria, según el autor, al surgimiento y a la evolución del instrumento, y los cuales se distinguen por la orientación de la actividad: las acciones que se dirigen a la componente artefactual o aquellas que se orientan hacia el sujeto mismo.

Acerca del proceso de instrumentación, compuesto por las funciones constitutivas del artefacto (definidas por el diseñador), las funciones constituidas (elaboradas por el usuario) y las nuevas funciones inscritas en una nueva clase de artefactos a partir de estas funciones constituidas por el usuario. El usuario elabora dichas funciones porque sus acciones están volcadas hacia la componente artefactual, de tal forma que surgen nuevas características, producen e instituyen funciones y le atribuyen propiedades al artefacto.

De manera similar, el proceso de instrumentación, se caracteriza cuando la actividad está orientada hacia el mismo sujeto. Corresponde a la emergencia y evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada. Se inicia cuando paralelamente al descubrimiento progresivo de las propiedades, nuevos esquemas se van constituyendo, los cuales se acomodan, se coordinan y se asimilan con otros esquemas ya constituidos, dichos esquemas evolucionan y luego son movilizados en otras situaciones. En este ciclo participan los modos operatorios (previstos por los diseñadores), los esquemas de utilización (elaboradas por los usuarios) y sus nuevos modos de operar, elaborados por los esquemas que movilizaron o elaboraron los usuarios.

### **Análisis de la experiencia desarrollada**

La experiencia que presentamos en este artículo, trata de la condición geométrica de la elipse y fue desarrollada en las dos primeras actividades de nuestro experimento. En esta experiencia participaron seis alumnos del curso de Matemática I, los cuales conformaron tres

equipos integrados por dos alumnos. Hicimos un análisis *a priori* y *a posteriori* de dos de los tres equipos.

Nuestro experimento fue canalizado en tres encuentros, cada uno de noventa minutos. El primer encuentro, el cual no fue foco de nuestra investigación, fue dirigida a explorarlas herramientas del Geogebra; en el segundo encuentro, los alumnos hicieron surgir la condición geométrica de la elipse y enriquecieron las propiedades de sus otras componentes, en el tercer encuentro, se vinculó la elipse a los ejes coordenados, se le identificó con una expresión algebraica y se elaboró una aplicación animada de la elipse para movilizarla como instrumento.

La condición geométrica de la elipse, razón de la experiencia de este artículo, indica que *dado un punto de la elipse, la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante, igual a la longitud del eje mayor*. Dicha componente artefactual, fue desarrollada en dos actividades y luego construida como un posible esquema de acción instrumentada (EAI), que evolucionó como instrumento para determinar la relación entre los parámetros de la elipse. Para constituir el EAI de la condición geométrica, los alumnos movilizaron sus esquemas de uso (EU): mediatriz de un segmento, circunferencia, triángulo, entre otros, los cuales fueron consignados en el análisis cognitivo como saberes previos al tema de la elipse.

Además verificamos que los alumnos estaban instrumentados en relación a la mediatriz de un segmento, pues movilizaron la propiedad que indica que *si un punto pertenece a una mediatriz de un segmento entonces equidista de los extremos del segmento*.

Respecto a la primera actividad, los alumnos que ya estaban instrumentados con la circunferencia como lugar geométrico, continuaron instrumentalizándola, debido a que la enriquecieron con una nueva propiedad, que fue construida movilizando esquemas de uso como la mediatriz de un segmento, circunferencia y triángulo isósceles. A continuación se detalla una breve descripción al respecto.

En la figura 1, se muestra una circunferencia con centro en  $C$ , que contiene al punto interior fijo  $Q$ . Se les pide determinar un punto  $A$  sobre el radio  $\overline{CP}$ , de tal forma que dicho punto equidiste de  $P$  y  $Q$ .

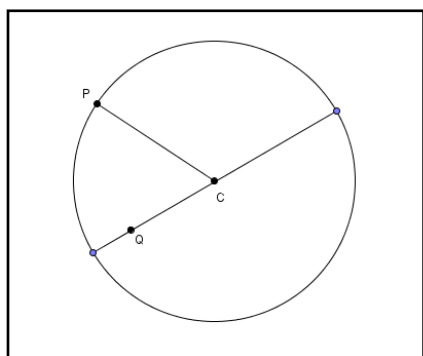


Figura 1. Actividad 1

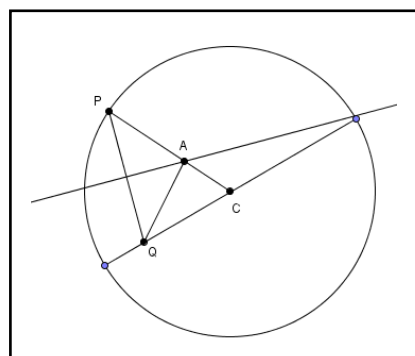


Figura 2. El punto A

Ambos equipos, no tuvieron dificultades en movilizar sus esquemas previos. De acuerdo al análisis *a priori*, movilizaron la propiedad de la mediatriz del segmento  $\overline{PQ}$ , como un *conjunto de puntos que equidistan de los extremos de dicho segmento*, la noción de segmento, el uso de

algunas herramientas del Geogebra, como la intersección de objetos, el trazo de segmentos, y de la recta mediatriz, de acuerdo a lo previsto en el análisis *a priori* de la Ingeniería Didáctica.

En la figura 2, los alumnos de ambos equipos determinaron el punto  $A$  correspondiente. Luego movilaron sus esquemas de uso pre existentes de triángulo y clasificaron al triángulo  $APQ$  como triángulo isósceles.

En las figuras 3 y 4, los alumnos desplazaron el punto  $P$  sobre la circunferencia de tal forma que el triángulo  $APQ$  mantuvo sus características invariantes, es decir los lados  $\overline{AP}$  y  $\overline{AQ}$  permanecieron iguales, por lo que señalaron que resulta lo mismo sumar las medidas de los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{AP}$  que las medidas de los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{AQ}$ , siendo además esa suma una constante.

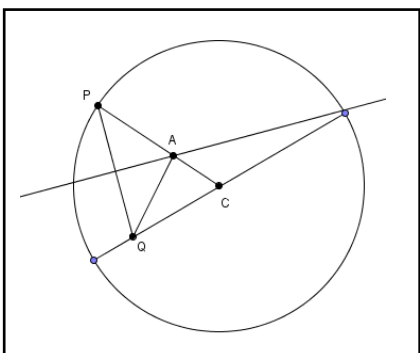


Figura 3. 1° Desplazamiento de

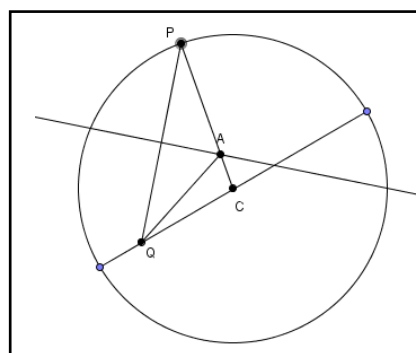


Figura 4. 2° Desplazamiento

De acuerdo al análisis *a priori*, ambos equipos construyeron un posible esquema de acción instrumentada, específicamente la existencia de un punto  $A$  perteneciente al radio  $CP$  de la circunferencia con centro en  $C$  y un punto interior  $Q$ , de tal forma que resulta lo mismo sumar la medida de los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{AP}$  que la medida de los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{AQ}$ .

La figura 5, representa la segunda actividad, en la que creemos hubo indicios para suponer que la circunferencia continuó instrumentalizándose porque vincularon el punto  $A$  a la trayectoria de una elipse haciendo uso de la herramienta rastro del Geogebra,,

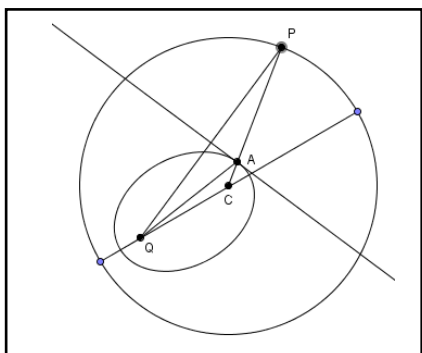


Figura 5. Trayectoria de la elipse

Pero además pensamos que el artefacto elipse dejó de ser un artefacto abstracto para los alumnos pues creemos que hay reconocimiento que *la suma de las distancias de los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{AQ}$  es una constante*, iniciando así la elipse el proceso de instrumentalización. Los esquemas que movilizaron fueron los de noción de circunferencia, de triángulo isósceles y mediatriz de un segmento. La herramienta “Activa Rastro” del Geogebra permitió la interacción con la elipse, de acuerdo al análisis *a priori*

Destacamos que los esquemas de acción colectiva instrumentada, fueron producto de la emergencia que detectamos del trabajo colectivo de los alumnos y que fueron ejemplificadas en muchos pasajes de nuestra secuencia de actividades cuando los integrantes de cada equipo intercambiaron esquemas de utilización y ejemplificaron en la redacción de sus textos.

Posteriormente, en la tercera actividad, los alumnos continuaron instrumentando la elipse, enriqueciéndola con las propiedades referidas al eje focal, eje mayor, eje normal y eje menor. De este modo, dicha condición geométrica de la elipse continuó instrumentándose, ya que la enriquecieron con otra característica, y los alumnos indicaron que *la suma de las medidas de los segmentos  $\overline{PF_1}$  y  $\overline{PF_2}$  corresponde a la longitud del eje mayor de la elipse*.

Habría que agregar, que este nuevo instrumento permitió expresar la condición geométrica de la elipse omitiendo el radio de la circunferencia. Además, la condición geométrica de la elipse evolucionó de EAI a EU, ya que permitió construir otro nuevo esquema en términos de los parámetros de una elipse, cuya *relación geométrica se expresa como  $a^2 = b^2 + c^2$* . Este descubrimiento progresivo de las propiedades de la elipse le va dando cierto significado al instrumento elipse.

### Reconocimiento

La presente investigación se realizó en el marco del proyecto internacional: *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos entre los grupos de investigación Didáctica de las Matemáticas- DIMAT/PUCP e Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática - PEAMAT/PUC-SP*.

### Conclusiones

Por medio de las acciones de los alumnos en las actividades que fueron orientadas a determinar la condición geométrica de la elipse, logramos identificar los posibles esquemas de utilización que construyeron o movilizaron cuando trabajaron dicha secuencia de aprendizaje. Por tal motivo, creímos conveniente hacer uso del Enfoque Instrumental como referente para la orientación de nuestra investigación.

Detallamos que en la actividad 1 los alumnos continuaron instrumentando la circunferencia al enriquecerla con una propiedad adicional, es decir *dada circunferencia con centro  $C$ , que contiene al punto interior fijo  $Q$ , es posible encontrar un punto  $A$  en el radio  $\overline{CP}$ , de tal forma que la suma de las medidas de los segmentos  $\overline{CA}$  y  $\overline{AQ}$  sea una constante*, movilizándolo para ello esquemas de uso pre existentes como la mediatriz de un segmento, circunferencia y triángulo isósceles.

En la actividad 2, dicha propiedad de la circunferencia evolucionó de esquema de acción instrumentada a esquema de uso ya que la movilización del punto  $A$  favoreció la identificación del lugar geométrico de la elipse, iniciándose así el proceso de instrumentalización de dicha curva.

Pensamos que el proceso de la Génesis Instrumental sucedió cuando la propiedad descrita en la actividad 1 se movilizó como instrumento para favorecer la identificación del lugar geométrico de la elipse. Este descubrimiento progresivo de las propiedades de la elipse le va dando cierto significado al instrumento elipse.

La elipse dejó de ser un artefacto abstracto porque los alumnos señalaron que *la suma de sus distancias desde un punto de la elipse, a otros dos puntos fijos en el interior de dicha curva, es una constante igual al radio de la circunferencia*. Debemos resaltar que la movilización de los esquemas por parte de los alumnos de cada equipo, fueron coordinadas y adaptadas como esquemas de acción colectiva instrumentada.

Mencionamos además que el Geogebra fue un programa integrador en la enseñanza y aprendizaje de la elipse. El conocimiento progresivo de las herramientas y comandos, en cuanto a sus potencialidades, permitieron que los alumnos interactuaran con la elipse. Por ejemplo, el rastro que traza un conjunto de puntos que cumplen determinada propiedad y que fue usada para marcar el lugar geométrico de los puntos que conformaron la elipse.

Finalmente, queremos acotar que aunque algunas de las funciones señaladas en la elipse, fueron conservadas de manera durable para cierta clase de acciones, dichas funciones deben ser observadas nuevamente en actividades posteriores para comprobar dicho nivel de instrumentalización.

### Referencias y bibliografía

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 38, 97-140. México, DF. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Boyer, C. (1987). *Historia de la matemática*. Versión española de Mariano Martínez Pérez. Alianza Editorial, Madrid, España
- Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus*, (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. and Strasser, R. (2006). *Teaching and Learning Geometry with Technology*. Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), 275–304, Sense Publishers. Recuperado de <https://www.sensepublishers.com/media/457-handbook-of-research-on-the-psychology-pdf>.
- León, José (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos*. (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.
- Rabardel (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.
- Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo das transformações geométricas no espaço*. (Tesis de doctorado en Educación Matemática). Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática. Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.



Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele*. (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad de Antioquía, Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada. Medellín, Colombia.