Base de un espacio vectorial de $\Re^n$ y tecnología

José **Guzmán** Hernández
Cinvestav-IPN
México
jguzman@cinvestav.mx
José **Zambrano** Ayala
Cinvestav-IPN
México
jzambrano@cinvestav.mx

Resumen

En este artículo reportamos una investigación, cuyo propósito es mostrar cómo el uso de papel-y-lápiz y tecnología (e.g., Geogebra), contribuyen en el aprendizaje de conceptos relacionados con el de Base de un espacio vectorial. En el estudio participaron 13 estudiantes de nivel superior (de 20 a 28 años de edad). La investigación se apoyó en dos teorías: Cambio de atención de Mason (2008) y Representaciones de Duval (1999, 2003, 2006)[1]. La metodología consistió en el diseño de Actividades[2] que los estudiantes llevaron a cabo por equipos usando Geogebra, papel-y-lápiz, mediante entrevista. Nuestros resultados indican que el uso de la tecnología favorece el aprendizaje de conceptos relacionados con el de base de espacios vectoriales; en particular $\Re^2$ y $\Re^3$.

Palabras clave: Geogebra, Vector, Espacio vectorial, Base.

Introducción

Investigadores como Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000), Sierpinska (2000), entre otros, mostraron que los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje de conceptos de Álgebra lineal. Los autores antes mencionados detectaron que tales dificultades están relacionadas con el *obstáculo del formalismo*, el cual está íntimamente vinculado con el aprendizaje de conceptos de Álgebra lineal, en ambiente de papel-y-lápiz.

En la actualidad, el uso de la tecnología en los salones de clase ha promovido la idea de que

[1] Para una descripción breve de estas dos teorías y cómo las usamos en el análisis de los datos de esta investigación, véase Guzmán y Zambrano (2014).
[2] La Actividad o Actividades (con mayúscula) en este artículo, se refiere a aquellas que llevó a cabo el estudiante para que lo conduzca al concepto o conceptos de Álgebra lineal, mientras que la Tarea o las Tareas (con mayúsculas), se refiere al trabajo específico que efectuaron los estudiantes en las Actividades.

por medio de ésta es posible sobrepasar el *obstáculo del formalismo*. Esta afirmación está basada en diversos artículos de investigación publicados en revistas especializadas y en memorias de congresos internacionales. Por ejemplo, Gol y Sinclair (2010) reportan los resultados de un estudiante que ya había cursado Álgebra lineal, con quien discutieron los conceptos de *Valores* y *Vectores propios* asociados con una matriz de entradas reales. Los resultados de estas investigadoras sugieren que el ambiente dinámico, en el que se desarrolló la investigación, favoreció el aprendizaje de esos conceptos abstractos. Por su parte, Soto y Romero (2011) usaron ambientes dinámicos para analizar la problemática relacionada con el aprendizaje del concepto de *Transformaciones lineales*, y cuya población fue seleccionada de una facultad de ingeniería. Sus resultados indican que el ambiente dinámico, en el que se efectuó la investigación, ayuda en el aprendizaje de propiedades y características de las *Transformaciones lineales* al transitar de un registro a otro.

En este artículo estudiamos cómo el *obstáculo del formalismo* puede ser "sobrepasado" utilizando software dinámico (e.g., Geogebra) en el aprendizaje de conceptos relacionados con el de base de un espacio vectorial (e.g., Conjunto generador de vectores y Dependencia e independencia lineal de vectores). En esta investigación incluimos dos ambientes: el tecnológico y el de papel-y-lápiz. La pregunta que guió la presente investigación es: ¿Cómo influyen las representaciones gráficas de conceptos de Álgebra lineal que minimizan las dificultades de su aprendizaje, haciendo uso de software dinámico? Por limitaciones de espacio, en este artículo, sólo son discutidos los datos provenientes de un equipo (tres estudiantes), correspondiente a cuatro Actividades.

Marco conceptual

El trabajo de investigación está respaldado por dos teorías cognitivas: la de *Cambio de atención* (Mason, 2008) y la de *Representaciones* (Duval, 1999, 2003, 2006). La primera teoría está basada en tres conceptos básicos: *Atención*, como medio en el cual se efectúa la observación –del estudiante–, ésta permite *sustentar*, *discernir*, *relacionar*, *percibir* y *razonar* los objetos matemáticos en estudio, y sin ella es imposible dar sentido a lo que el estudiante aprende; *Estar consciente de…*, consiste en verificar si el estudiante le da sentido a lo que quiere conocer, y precisa los sentidos sobre lo que el estudiante ya conoce, y la *Actitud*, como medio de disposición del estudiante de querer aprender. La segunda teoría está basada en dos conceptos: *Semiosis*, como aprehensión o producción de una representación semiótica (medio que usa el individuo para exteriorizar sus representaciones mentales –imágenes sobre un objeto– construidas por el uso de signos: lenguaje natural, fórmulas algebraicas, figuras geométricas, entre otros), y *Noesis*, actos cognitivos como el aprendizaje de un objeto.

Analizamos los datos tomando en cuenta los puntos donde confluyen las dos teorías, estos son: (1) *Asociación de objetos*, el cual contempla el hecho de que el aprendizaje de conceptos (en matemáticas) puede ser mostrado en varias representaciones; (2) *Posición cognitiva*, el cambio de conciencia *implícita* a *explícita* (Mason, 2008) ocurre cuando el estudiante puede "ver" (Duval, 2003) y manejar conscientemente los objetos de estudio como un todo; (3) *El estudiante le da sentido a lo que quiere conocer*, se presenta cuando un estudiante muestra dominio de los conceptos *Atención*, *Estar consciente de…* y *Actitud* (Mason, 2008), y puede evidenciar –con relativa facilidad– el paso de un registro semiótico a otro (Duval, 2003), del objeto matemático en estudio.

Metodología

Participantes

Los estudiantes que intervinieron en la investigación fueron elegidos por el profesor con quien habían estudiado Álgebra lineal. El criterio usado por el profesor para seleccionar a estos estudiantes se basó en el buen desempeño y disposición (*Actitud*) que ellos habían tenido en su curso de Álgebra lineal, en ambiente de papel-y-lápiz, en un instituto tecnológico de la ciudad de México. El trabajo se implementó con 13 estudiantes de nivel superior distribuidos en cinco equipos; cada uno de dos o tres integrantes. Ninguno de ellos había tenido experiencia previa con el uso de Geogebra para resolver Tareas de Álgebra lineal; por lo que se les dio entrenamiento en el uso del software, antes de iniciar la toma de datos.

Diseño e implementación de los instrumentos usados en el acopio de datos

Como parte de la metodología adoptada fueron diseñados: un *Pre-test*, cuatro Actividades y un *Post-test*. Las cuatro Actividades fueron abordadas por los estudiantes mediante entrevistas, no así el *Pre* y *Post-test*, que fueron contestados por ellos en forma individual. Previo al entrenamiento del software, a los estudiantes se les aplicó un *Pre-test*, con la finalidad de indagar el nivel de conocimientos que tenían respecto a los conceptos relacionados con el de Base de un espacio vectorial. Después de la aplicación del *Pre-test*, abordaron las Actividades mediante entrevistas y, al término de éstas se les aplicó un *Post-test.* El contenido temático de las cuatro Actividades son: Actividad I Conjunto generador de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$, Actividad II Combinación lineal de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$, Actividad III Dependencia e independencia lineal de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$ y Actividad IV Base de un espacio vectorial. La implementación de las Actividades se efectuó en el salón de clases de los estudiantes. Las sesiones de trabajo tuvieron una duración aproximada de entre tres y cuatro horas, las cuales fueron video-grabadas.

Las Actividades

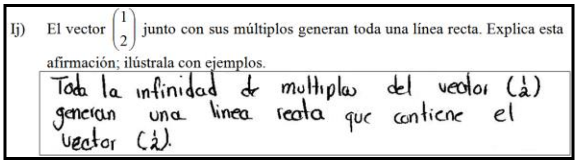
El diseño de las Actividades estuvo a cargo por los autores del presente artículo, y fueron implementadas por el Investigador-Entrevistador (en adelante Inv-Ent) mediante entrevistas a los estudiantes. En esas entrevistas se propiciaba el análisis y la reflexión de sus afirmaciones mediante discusiones tendientes al aprendizaje de conceptos. Se permitió que preguntaran dudas respecto a la comprensión de los ítems de la Tarea. Los estudiantes escribían las definiciones de los conceptos tal y como ellos las entendían, en los espacios que aparecen en las Actividades diseñados con esa finalidad. Al término de cada sesión de trabajo, y al inicio de la próxima, se analizaba y discutía con ellos su trabajo previo.

Análisis de datos y discusión de resultados

En este artículo discutimos sólo los datos surgidos del trabajo de un equipo de estudiantes (Equipo 3). En adelante, los integrantes del equipo se denominan como E1, E2 y E3.

Análisis y discusión de resultados: Actividad I Conjunto generador de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$

La Actividad inició con la discusión del concepto Múltiplo de un vector. Los estudiantes no tuvieron dificultades al multiplicar un escalar por un vector y determinar así un vector múltiplo del primero. De una lista de vectores en $\Re^2$, el Inv-Ent les preguntó qué vectores, de esa lista, eran múltiplos entre ellos. He aquí la respuesta de E2:


Ij) El vector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ junto con sus múltiplos generan toda una línea recta. Explica esta afirmación; ilústrala con ejemplos.

Toda la infinidad de multiplos del vector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ generan una linea recta que contiene el vector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Figura 1. Solución de la Tarea Ij) dada por el Equipo 3.

1 E2: $(1,2)$ y $(-2,-4)$.

2 E3: Pero, ¡No son múltiplos! [*E3 no justifica su respuesta*.]

3 Inv-Ent: ¿Por qué dice que sí son múltiplos? [*Dirigiéndose a E2*.]

4 E2: Porque se multiplica el primer vector por –2 y nos da el segundo vector [*E3 con un movimiento de cabeza, da razón a E2*.]

5 Inv-Ent: La Tarea Ij) (Figura 1) dice que “El vector $(1,2)$ junto con sus múltiplos generan toda una línea recta”, ¿cuál línea recta?

6 E3: La recta que contiene al vector [contestación que surgió una vez que observaron los estudiantes la recta que contiene un vector en la pantalla de la computadora.]

7 Inv-Ent “A partir de un vector, se puede ‘generar’ otro vector que se encuentra sobre la recta que lo contiene”. ¿Es verdadera esta afirmación?

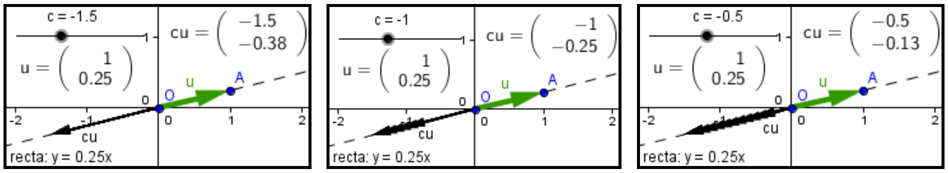
8 E3: ¡Yo creo que no! [*Interrumpe E2*.]

9 E2 ¡Yo creo que sí! Porque se está multiplicando por una constante y nos está dando otro vector que está en la misma recta, entonces hay un escalar que multiplicado por el vector inicial nos da el vector final [*con un movimiento afirmativo de cabeza, E3 acepta la respuesta de E2*.]

10 Inv-Ent: Si se localizan puntos en la recta que se “generan” a partir del vector inicial, ¿existen múltiplos del vector $(1,2)$ que “generen” a estos “nuevos vectores”? [*Los estudiantes interrumpen y contestan con un categórico ¡Sí!*] Ahora, si el punto se encuentra en la recta, pero fuera de la pantalla, y dado que “no se ve”, ¿significa que no exista un vector múltiplo de ese vector?

11 E3: Aunque “no se vea” el múltiplo existe [el estudiante está discerniendo (Mason, 2008) y visualizando (Duval, 2003) el comportamiento del objeto matemático en estudio]. Porque la n es infinita [E2 hace un gesto de aceptación. en estos momentos los estudiantes han evidenciado la relación (Mason, 2008) de “infinito” entre “n” y “c”.]

A continuación, el Inv-Ent solicitó a los estudiantes activar el comando *Animación* de Geogebra para ser aplicado en los múltiplos del vector $(1,2)$. Esta acción permitió que los estudiantes visualizaran (Duval, 2003) el significado de Conjunto generador de vectores de $\Re^2$. La Figura 2 presenta tres imágenes de vectores múltiplos del vector $u = (1,0.25)$ para los valores $c = -1.5$, $c = -1$ y $c = -0.5$; los estudiantes observaron que en la medida en que varía el escalar c, los vectores múltiplos cubrían la recta $y = 0.25x$.



$c = -1.5$ $\quad$ $c = -1$ $\quad$ $c = -0.5$

Figura 2. Vectores múltiplos de $u = (1{,}1.25)$ y la recta que genera, dados por el Equipo 3.

Al continuar con la entrevista, el Inv-Ent motivó a los estudiantes con la idea de que extrapolaran el concepto de Conjunto generador de vectores, para espacios vectoriales distintos de $\Re^2$. El siguiente extracto de la entrevista evidencia lo ocurrido en esta parte del episodio:

12 Inv-Ent: Si tomas en cuenta un vector de $\Re^3$, y determinas sus múltiplos, ¿qué "generan" esos vectores?

13 E3: También una recta.

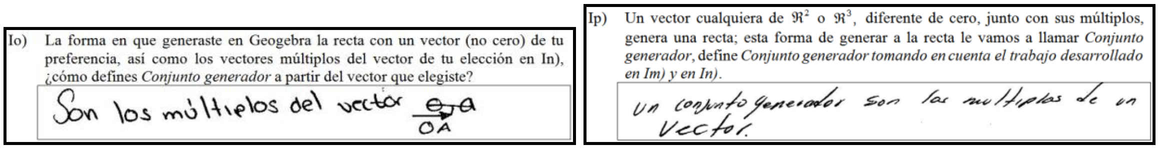
14 Inv-Ent: Pero en $\Re^3$ también se puede trazar una recta a partir de un vector en este *Espacio vectorial*, ¿qué pasa si se trata de un vector de $\Re^4$? Porque un vector de $\Re^4$, ya no se puede trazar, ¿significa que ese vector de $\Re^4$ no "genera" una recta?

15 E3: ¡Yo creo que sí! Aunque no se tenga una percepción [*representación*] con una gráfica, no quiere decir que no exista. Se supone que con la forma algebraica si se puede. [*La respuesta de E3 evidencia claridad en la percepción –posición cognitiva (Mason, 2008; Duval, 2003)– de lo que sucede en espacios vectoriales euclidianos $\Re^n$, con $n \geq 4$, en cuanto al sub-espacio generado por los múltiplos de un vector en ese espacio, cuya gráfica no existe.*]

Durante la entrevista, los tres estudiantes mostraban diferentes *Actitudes* (Mason, 2008): E3 era activo, pero sus afirmaciones carecían de contundencia; E2, acertado en sus comentarios, pero no mostraba autoridad para que sus compañeros aprendieran el concepto en discusión, y E1 estaba callado y parecía confundido por las opiniones de sus compañeros.

El consenso entre los integrantes del equipo –respecto del conocimiento aceptable del concepto Múltiplo de un vector– se dio cuando observaron en la pantalla de la computadora el movimiento dinámico del vector múltiplo cu de la Figura 2 trazado en Geogebra, a partir del vector $u = (1, 0.25)$. Los estudiantes observaron cómo cambió (de magnitud y dirección) el vector cu, cada vez que el escalar c lo hacía.

La visualización de vectores y sus múltiplos, en la pantalla de la computadora (como se describió en el párrafo precedente) y sus distintas *representaciones dinámicas, promovió* en los integrantes del Equipo 3 un *Cambio de atención* (Mason, 2008) de la forma en cómo entendían el concepto Múltiplo de un vector, ya que éste, no era sólo aquel generado por los números enteros, como ellos –los estudiantes– lo pensaban inicialmente, sino que observaron que se trataba de una *infinidad* de múltiplos de ese vector. Esta acción (mediada por el software) los llevó a definir el concepto de Conjunto generador de vectores, a partir de los múltiplos de un vector (véase las Tareas Io) y Ip) de la Figura 3). Acción con la que concluyó la Actividad I.


Io) La forma en que generaste en Geogebra la recta con un vector (no cero) de tu preferencia, así como los vectores múltiplos del vector de tu elección en In), ¿cómo defines *Conjunto generador* a partir del vector que elegiste?

Son los múltiplos del vector $\overline{OA}$

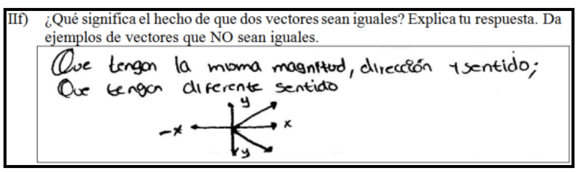
Ip) Un vector cualquiera de $\Re^2$ o $\Re^3$, diferente de cero, junto con sus múltiplos, genera una recta; esta forma de generar a la recta le vamos a llamar *Conjunto generador*, define *Conjunto generador tomando en cuenta el trabajo desarrollado en Im) y en In).*

Un conjunto generador son los multiplos de un Vector.

Figura 3. Solución de los estudiantes del Equipo 3, a las Tareas Io) y Ip).

Análisis y discusión de resultados: Actividad II Combinación lineal de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$

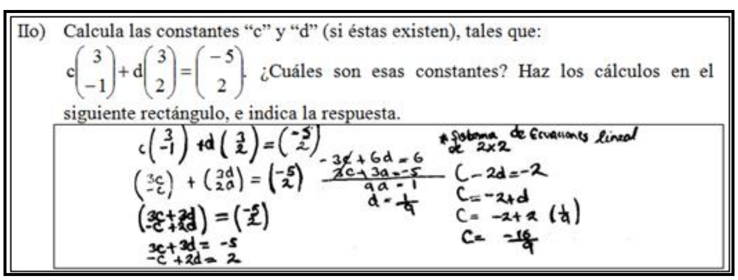
En la Actividad II, los estudiantes trabajaron en las Tareas que los conducirían a definir el concepto de Combinación lineal de vectores. Para lograr este propósito, se necesitó que los estudiantes contaran con un aprendizaje eficiente del concepto Conjunto generador de vectores, que ellos trabajaron en la Actividad I. Los estudiantes iniciaron la Actividad concerniente a las Tareas de la Actividad II. El Inv-Ent les pidió que identificaran en la ventana de gráficos de Geogebra, las características que presentan dos vectores iguales. La Figura 4 muestra cómo interpretan los estudiantes el concepto de igualdad de vectores.


IIf) ¿Qué significa el hecho de que dos vectores sean iguales? Explica tu respuesta. Da ejemplos de vectores que NO sean iguales.

Que tengan la misma magnitud, dirección y sentido;
Que tengan diferente sentido

Figura 4. Solución de los estudiantes del Equipo 3, a las Tareas IIf).

En la siguiente Tarea, a los estudiantes se les preguntó si la operación $2(3,-1)-(3,2)$ es el vector $(-5,2)$. Al hacer las operaciones, respondieron "no son iguales", y se les propuso que calcularan las constantes c y d, tales que $c(3,\text{-}1)+d(3,2)=(-5,2)$, Tarea que quedó resuelta como se muestra en la Figura 5.


IIo) Calcula las constantes "c" y "d" (si éstas existen), tales que:

$c\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$. ¿Cuáles son esas constantes? Haz los cálculos en el siguiente rectángulo, e indica la respuesta.

$c\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3c\\-c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3d\\2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3c+3d\\-c+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$

$3c+3d=-5$
$-c+2d=2$

$-3\cancel{c}+6d=6$
$\cancel{3c}+3d=-5$
$9d=1$
$d=\frac{1}{9}$

* Sistema de Ecuaciones lineal de 2x2

$c-2d=-2$
$c=-2+d$
$c=-2+2\left(\frac{1}{9}\right)$
$c=-\frac{16}{9}$

Figura 5. Cálculo de las constantes c y d que satisfacen la igualdad $c(3,\text{-}1)+d(3,2)=(-5,2)$.

Cuando los estudiantes manipularon en Geogebra los múltiplos de los vectores $u=(3,-1)$ y $v=(3,2)$, observaron[3] que $-1.78(3,\text{-}1)+0.11(3,2)=(-5,2)$ (véase Figura 6), así comprobaron el cálculo de la Figura 5, y se dieron cuenta de que al manipular la suma de múltiplos (vector denotado como cumdv –notación en Geogebra– en la Figura 6) podía "alcanzar" cualquier punto en el plano y, por tanto, el correspondiente vector de posición. De esta forma, se vio favorecido el aprendizaje del concepto suma de múltiplos de vectores de los estudiantes. En esas acciones, ellos usaron dos representaciones: la algebraica y la geométrica (Duval, 1999, 2003, 2006).

[3] El software aproxima las constantes $c=-\frac{16}{9}$ y $d=\frac{1}{9}$, calculado por los estudiantes en la Tarea IIo), respectivamente como $c=-1.78$ y $d=0.11$.

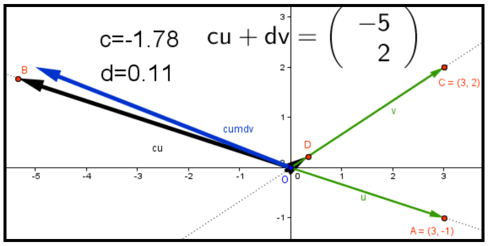


Figura 6. Cálculo las constantes c y d que satisfacen $c(3,-1)+d(3,2)=(-5,2)$.

La duda de los estudiantes era si la suma de múltiplos de los vectores u y v, como los indicados en la Figura 6, "alcanzan" vectores que no se muestran en la pantalla. El siguiente extracto de la entrevista evidencia lo sucedido en esta parte del trabajo.

16 Inv-Ent: ¿El vector $cu+dv$ [*en la Figura 6*] puede ser cualquier punto final de un vector del plano, aun cuando "no se vea" en pantalla?

17 E3: ¡Sí!, porque haciendo un *zoom* ya podemos ver el punto que deseamos y entonces localizamos el vector $cu+dv$ que llega a ese punto.

Con el comentario de E3, el Equipo 3 había determinado que cualquier vector en $\Re^2$ de la forma (a,b) se podía escribir como la suma de los múltiplos de los vectores $u=(3,-1)$ y $v=(3,2)$. En seguida, el Inv-Ent les preguntó sobre qué características tienen los vectores para que un par de estos "alcance" cualquier punto del plano; E2 contestó:

18 E2 Puede ser que sea porque los vectores no son múltiplos. [E2 había visualizado (Duval, 2003) que la suma de los múltiplos de los vectores dados, podía alcanzar cualquier punto en el plano.]

Con el comentario de E2 en la línea 20, el Equipo 3 había determinado que cualquier vector en $\Re^2$ de la forma (a,b) se podía escribir como la suma de los múltiplos de los vectores $u=(3,-1)$ y $v=(3,2)$; especificación que los estudiantes lograron generalizar para cualquier otro par de vectores [no múltiplos entre ellos] en el plano.

A continuación, se siguió con un procedimiento similar –como cuando calcularon las constantes c y d que satisfacen $cu+dv=w$, donde w es un vector cualquiera de $\Re^2$ –. Los estudiantes trabajaron con papel-y-lápiz para calcular constates c, d y e que satisfacen $c(3,-1)+d(3,2)+e(-5,2)=(0,0)$; Tarea que también hicieron con un archivo de Geogebra –que ellos diseñaron– y que al manejarlo, pudieron *percibir* (Mason, 2008) que había una infinidad de constantes c, d y e que satisfacen $cu+dv+ew=o$, donde u, v y w son vectores de $\Re^2$.

Al proseguir con la entrevista, los estudiantes E2 y E3 se equivocaron al responder las preguntas: ¿Cuántos escalares distintos de cero satisfacen $c_1u_1+c_2u_2+dv=w$, donde los vectores u_1 y u_2 son múltiplos? ¿Cuántos escalares distintos de cero satisfacen $c_1u_1+c_2u_2+d_1v_1+d_2v_2=w$ donde u_1 y u_2, v_1 y v_2 son múltiplos entre ellos? No obstante, los estudiantes corrigieron sus respuestas cuando se les facilitó un archivo de Geogebra que les permitió la interpretación correcta de las respuestas de estas preguntas. La entrevista se reanudó, y tras la precedente reflexión de los estudiantes, ellos contestaron los cuestionamientos del investigador y trabajaron en el siguiente ejemplo:

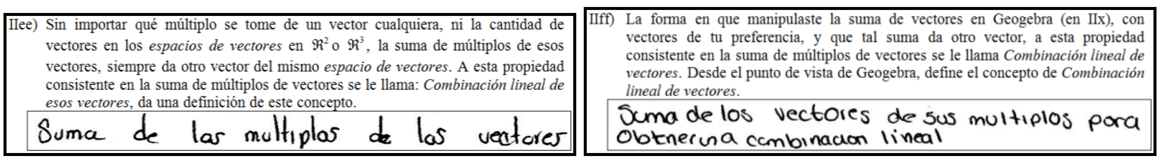
19 Inv-Ent: ¿Cuántos escalares distintos de cero satisfacen $\mathrm{cu} + \mathrm{dv} + \mathrm{ew} = 0$? Donde los vectores u, v y w no son múltiplos entre ellos. [*En el pizarrón fueron trazados los vectores* u, v *y* w *no múltiplos entre sí.*]

20 E2 y E3: ¡Infinidad! [*Respuesta categórica.*].

21 Inv-Ent: ¿Cuántos vectores de $\Re^2$ como mínimo se necesitan para que sólo exista un par de escalares c y d que satisfagan $\mathrm{w} = \mathrm{c}_1\mathrm{u}_1 + +\mathrm{c}_2\mathrm{u}_2 + \ldots + \mathrm{d}_1\mathrm{v}_1 + \mathrm{d}_2\mathrm{v}_2 \ldots$?

22 E3: ¡Dos! [Respuesta categórica, que E2 acepta con un movimiento de cabeza; posición de los estudiantes que se puede interpretar que ellos estaban percibiendo propiedades (Mason, 2008) de suma de vectores.]

La contundencia de las respuestas de los estudiantes E2 y E3: líneas 20 y 21, es consecuencia de haber efectuado las Tareas con papel-y-lápiz y con Geogebra.


IIee) Sin importar qué múltiplo se tome de un vector cualquiera, ni la cantidad de vectores en los *espacios de vectores* en $\Re^2$ o $\Re^3$, la suma de múltiplos de esos vectores, siempre da otro vector del mismo *espacio de vectores*. A esta propiedad consistente en la suma de múltiplos de vectores se le llama: *Combinación lineal de esos vectores*, da una definición de este concepto.

Suma de las multiplos de los vectores

IIff) La forma en que manipulaste la suma de vectores en Geogebra (en IIx), con vectores de tu preferencia, y que tal suma da otro vector, a esta propiedad consistente en la suma de múltiplos de vectores se le llama *Combinación lineal de vectores*. Desde el punto de vista de Geogebra, define el concepto de *Combinación lineal de vectores*.

Suma de los vectores de sus multiplos para Obtener una combinacion lineal

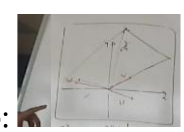
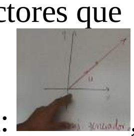
Figura 7. Definición del concepto Combinación lineal de vectores.

Para los estudiantes no resultó sencillo definir el concepto de Combinación lineal de vectores; así lo muestra la solución de la Tarea IIee) en la Figura 7; sin embargo, en la Tarea IIff), el Equipo 3 definió este concepto, a partir del trabajo efectuado en Geogebra, durante la resolución de la Actividad II. En su trabajo, los estudiantes mostraron un acercamiento favorable en la definición del concepto, comparado con la solución de la Tarea IIee).

Con la terminación de las Tareas de la Actividad II, aunado al estudio llevado a cabo en la Actividad I, los estudiantes estaban preparados para trabajar el concepto de Dependencia e independencia lineal de vectores.

Análisis y discusión de resultados: Actividad III Dependencia e independencia lineal de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$

En un contexto similar que en las Actividades I y II precedentes, en la Actividad III el estudiante trabajó en Tareas que lo condujeron a la definición de los conceptos Conjunto de vectores linealmente dependientes y Conjunto de vectores linealmente independientes en $\Re^2$ y $\Re^3$. La entrevista inició cuando el investigador preguntó: ¿Cuántas *combinaciones lineales* determinan dos vectores no múltiplos de $\Re^2$? La respuesta de E3 fue la siguiente:

23 E3: Es única, porque los vectores decíamos que en este ejemplo:  [*señala con el dedo de su mano izquierda el dibujo trazado en el pizarrón*], son dos vectores que no son múltiplos [*se refiere a los vectoes* v *y* w], si fueran múltiplos sería en esta forma: , y generarían una recta; pero como no son múltiplos, se encuentra una constante multiplicada por v y otra multiplicada por w, esas constantes son únicas que generarían otro vector [*de* $\Re^2$.]

24 Inv-Ent: En la Actividad II vimos que la Combinación lineal: $\text{c}(1,2)+\text{d}(3,\text{-}1)=(0,0)$ es única; es decir, $\text{c}=0$ y $\text{d}=0$; pero en $\text{c}(1,4,3)+\text{d}(\text{-}2,\text{-}3,3)+$ $+\,\text{e}(\text{-}4,10,1)=(0,0,0)$, ¿la terna $\text{c}=0$, $\text{d}=0$ y $\text{e}=0$ es única, o habrá otras ternas que resuelvan [satisfagan] esta ecuación vectorial?

25 E3 ¡Sí hay más ternas! [*No convencido.*]

26 Inv-Ent: ¿Cómo podrían argumentar que no exista otra alternativa además de la terna $\text{c}=0$, $\text{d}=0$ y $\text{e}=0$?

Una vez que el Equipo 3 construyó los vectores, usando Geogebra (véase Figura 8), el investigador les preguntó si los vectores u, v y w son múltiplos uno del otro. He aquí sus respuestas:

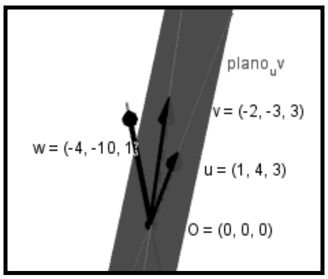


Figura 8. Vectores u, v y w de $\Re^3$ no múltiplos entre ellos.

27 E2: ¡No! Ningún vector se encuentra en el Espacio generado de [por] los otros dos. Los vectores no son múltiplos.

28 Inv-Ent: Entonces, ¿cuál es su respuesta? [*Se refiere a la pregunta hecha en la línea 26.*]

El investigador se dio cuenta de que a los alumnos se les dificultaba contestar la pregunta de la línea 26 (con tres vectores no múltiplos entre sí de $\Re^3$), por lo que decidió trabajar con ellos, usando vectores de $\Re^2$. El investigador solicitó a los estudiantes que abrieran el archivo de Geogebra donde aparecen los vectores u, v y w de manera que manipularan sus múltiplos cu, dv y ew, con la intención de que la Combinación lineal $\text{cu}+\text{dv}+\text{ew}$ fuera el vector cero de $\Re^2$ (véase Figura 9); después, les preguntó: ¿cómo identificas geométricamente que dicha Combinación lineal es el vector cero? E3 contestó:

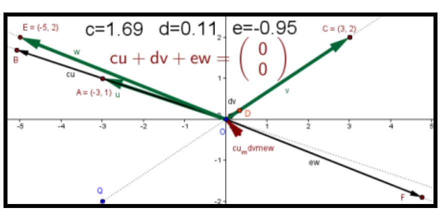
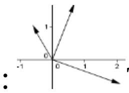


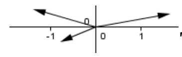
Figura 9. Manipulación de los múltiplos de los vectores u, v y w de $\Re^2$.

29 E3: Su resultante [*se refiere al vector* $\text{cu}_\text{m}\text{dvmew}$ –notación en Geogebra– *de la Figura 9*] disminuye hasta el punto $(0,0)$ [e*l estudiante hace un gesto, uniendo los dedos de su mano*: .]

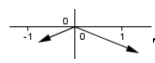
El investigador continuó con la entrevista; con la intención de que los estudiantes profundizaran la idea en torno a que tres vectores no múltiplos de $\Re^2$ tienen una infinidad de combinaciones lineales, que dan como resultado el vector cero; además, que dos vectores no múltiplos de $\Re^2$ tienen sólo una Combinación lineal que da como resultado el vector cero. En seguida, se muestra un extracto de la entrevista sobre lo antes comentado:

30 Inv-Ent: ¿Cuántas combinaciones lineales existen en este ejemplo:  ?

31 E1: ¡Una infinidad!

32 Inv-Ent: Y, ¿en este ejemplo:  ?

33 E1, E2 y E3: ¡Una infinidad!

34 Inv-Ent: Y, ¿en este ejemplo:  ?

35 E2 y E3: ¡Una combinación!

El Equipo 3 hizo un comparativo (desde el punto de vista geométrico), de cómo es el número de combinaciones lineales, de tres vectores no múltiplos de $\Re^2$, respecto de dos vectores no múltiplos de $\Re^2$; dejando ver en el primero que existe una infinidad de combinaciones lineales iguales al vector cero, y en el segundo que, sólo hay una Combinación lineal, cuyo resultado es el vector cero (véase el trabajo en Geogebra y la conclusión de los estudiantes en la Tarea IIIj) de la Figura 10).

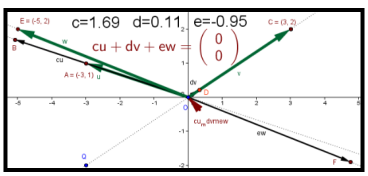
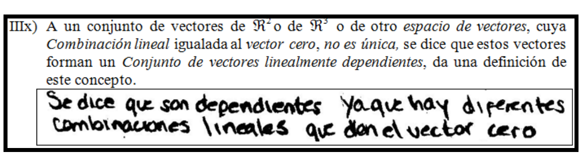
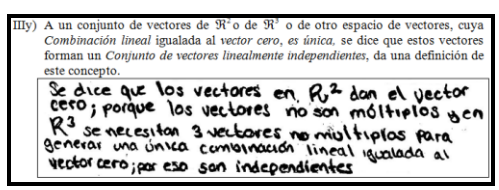


Figura 10. Combinación lineal única.

Un procedimiento similar al precedente, pero ahora analizando conjunto de vectores de $\Re^3$, condujo a los estudiantes a conclusiones semejantes; es decir, ellos –los estudiantes– lograron "descubrir" que tres es el número máximo de vectores no múltiplos de $\Re^3$ (de forma que uno de ellos no se encuentra en el plano que contiene a los otros dos) tales que estos vectores cuentan con sólo una Combinación lineal igual al vector cero. Al final de esta parte de la entrevista, los estudiantes definieron los conceptos: Conjunto de vectores linealmente dependientes, así como el concepto de Conjunto de vectores linealmente independientes, en términos del número de combinaciones lineales de los vectores que den el vector cero en espacios vectoriales euclidianos de cualquier dimensión. Al respecto, los estudiantes escribieron en la Tarea IIIx) y en IIIy) (véase Figura 11), la forma como aprendieron estos conceptos.


IIIx) A un conjunto de vectores de $\Re^2$ o de $\Re^3$ o de otro *espacio de vectores*, cuya *Combinación lineal* igualada al *vector cero*, *no es única,* se dice que estos vectores forman un *Conjunto de vectores linealmente dependientes*, da una definición de este concepto.

Se dice que son dependientes ya que hay diferentes combinaciones lineales que dan el vector cero


IIIy) A un conjunto de vectores de $\Re^2$ o de $\Re^3$ o de otro espacio de vectores, cuya *Combinación lineal* igualada al *vector cero*, *es única,* se dice que estos vectores forman un *Conjunto de vectores linealmente independientes*, da una definición de este concepto.

Se dice que los vectores en R^2 dan el vector cero; porque los vectores no son múltiplos y en R^3 se necesitan 3 vectores no múltiplos para generar una única combinación lineal igualada al vector cero; por eso son independientes

Figura 11. Definición de Conjunto de vectores linealmente dependientes (Tarea IIIx) y

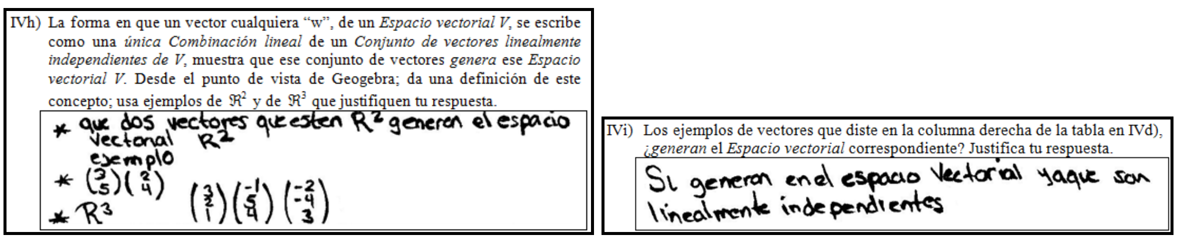
Conjunto de vectores linealmente independientes (Tarea IIIy).

En los comentarios de los estudiantes correspondientes a las Tareas IIIx) y IIIy) de la Figura 11, podemos observar que no son precisos al definir Conjunto de vectores linealmente dependientes y Conjunto de vectores linealmente independientes; sin embargo, en estas declaraciones, los estudiantes dejan ver un acercamiento a la definición de los conceptos antes mencionados.

Análisis y discusión de resultados de la Actividad IV: Base de un espacio vectorial

El propósito de esta Actividad es que los estudiantes logren el aprendizaje del concepto de Base de un espacio vectorial. A partir de los datos disponibles, podemos afirmar que los estudiantes lograron llegar a la definición del concepto de Espacio vectorial, aunque ésta no es del todo formal –para cualquier Espacio vectorial– tal como es dada en la mayoría de los libros de Álgebra lineal utilizados con frecuencia como textos de enseñanza de tales conceptos.

Es pertinente aclarar que en esta Actividad IV, por problemas técnicos no fue posible rescatar las evidencias de audio de la entrevista (por parte del investigador), sin embargo, a continuación mostramos las evidencias escritas de cómo los estudiantes resolvieron las Tareas de esta Actividad. Antes de dar la definición del concepto de Base de un espacio vectorial, los estudiantes definieron el concepto de Espacio generado de un Espacio vectorial. En la Tarea IVh) se observa que los alumnos tuvieron dificultades para describir el concepto de Conjunto generador de vectores de un Espacio vectorial, pero acertaron en los ejemplos (véase Figura 12).


IVh) La forma en que un vector cualquiera “w”, de un *Espacio vectorial V*, se escribe como una *única Combinación lineal* de un *Conjunto de vectores linealmente independientes de V*, muestra que ese conjunto de vectores *genera* ese *Espacio vectorial V*. Desde el punto de vista de Geogebra; da una definición de este concepto; usa ejemplos de $\Re^2$ y de $\Re^3$ que justifiquen tu respuesta.

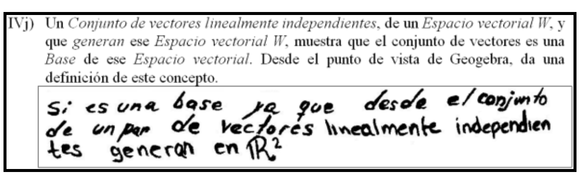
* que dos vectores que esten R^2 generen el espacio vectorial R^2
ejemplo
* $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$
* R^3 $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\end{pmatrix}$

IVi) Los ejemplos de vectores que diste en la columna derecha de la tabla en IVd), ¿*generan* el *Espacio vectorial* correspondiente? Justifica tu respuesta.

Si generan en el espacio vectorial yaque son linealmente independientes

Figura 12. Definición de Espacio generador proporcionada por los estudiantes.

Una vez que los estudiantes llevaron a cabo las Tareas IVh) y IVi) (véase Figura 12), se esperaba que estuvieran preparados para definir el concepto de Base de un espacio vectorial. En la Tarea IVj), los estudiantes pudieron “asimilar” esta idea, y a su manera entender el concepto. En la Figura 13 ellos dan la definición del concepto antes mencionado, apoyados en Geogebra, aunque su definición está restringida al Espacio vectorial $\Re^2$.


IVj) Un *Conjunto de vectores linealmente independientes*, de un *Espacio vectorial W*, y que *generan* ese *Espacio vectorial W*, muestra que el conjunto de vectores es una *Base* de ese *Espacio vectorial*. Desde el punto de vista de Geogebra, da una definición de este concepto.

Si es una base ya que desde el conjunto de un par de vectores linealmente independientes generan en $\mathbb{R}^2$

Figura 13. Definición del concepto Base de un espacio vectorial dado por el Equipo 3.

Conclusiones

Los datos disponibles, junto con su análisis, nos permiten dar respuesta parcial a la pregunta: ¿Cómo influyen las representaciones gráficas de conceptos de Álgebra lineal, que minimizan las dificultades de su aprendizaje, haciendo uso de software dinámico, y de papel-y-lápiz? Aunque en este artículo documentamos el trabajo de un solo equipo de estudiantes, es evidente que ellos lograron mejorar su aprendizaje [volver a aprender de forma reflexiva] cuando hicieron uso de Geogebra para abordar las Tareas propuestas. Fue evidente que la forma dinámica de las representaciones gráficas de vectores, y de sus combinaciones lineales produjo en ellos reflexiones en torno al aprendizaje de conceptos (previamente adquiridos en ambiente de papel-y-lápiz). Aun cuando carecían de un buen manejo sintáctico que les permitiera resolver los sistemas de ecuaciones asociados con esas Combinaciones lineales de vectores, ellos fueron capaces de conjeturar el significado de los conceptos en discusión apoyados en las representaciones de los vectores usando Geogebra. Sin embargo, los estudiantes tuvieron dificultades para *extrapolar* las definiciones de conceptos asociados con el de Base de un especio vectorial cualquiera [y el de Base mismo] para espacios vectoriales euclidianos, cuya dimensión es mayor o igual que 4. En ambiente tecnológico puede servir de *puente* para que los alumnos logren aprender conceptos abstractos de álgebra lineal, siempre que no sea olvidado el de papel-y-lápiz.

Referencias y bibliografía

Dorier, J-L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 85-124). Holanda: Kluwer Academic Publishers. ISBN: 978-0-7923-6539-6

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* [Trad. Vega, M., del Francés al Español]. Cali, Colombia: Universidad del Valle. ISBN: 9-5880-3023-4

Duval, R. (2003). «Voir» en mathématiques. En E. Filloy (Coord.), *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Fondo de Cultura Económica. ISBN: 9681670280

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Gol, T. S. & Sinclair, N. (2010). Shifts of attention in DGE to learn eigen theory. En M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 33-40). Belo Horizonte, Brazil: PME. ISSN: 0771-100X

Guzmán & Zambrano (2014). Influencia de dos ambientes: el tecnológico y el de papel-y-lápiz en el aprendizaje de conceptos de álgebra lineal. *VI Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática*, Memoria del SNTCEAM, 2012, Capítulo 22 libro electrónico "Tecnología Computacional en la Enseñanza de las Matemáticas" ISNB: 978-607-27-0301-8, Monterrey, N.L.

Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners: attention, awareness and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers and learners. En T. Wood & B. Jaworski (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Vol. 4. The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 31–56). Rotterdam, Holanda: Sense Publisher. ISBN: 978-90-8790-550-7

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra in question* (pp. 209-246). Holanda: Kluwer Academic Publisher. ISBN: 978-0-7923-6539-6

Soto, J. L. & Romero, F. C. (2011). El concepto de transformación lineal: una aproximación basada en la conversión gráfico-algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt & C. Cortés (Eds.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 38-49). Canadá: Loze-Dion. ISBN: 978-2-9235-6554-5