XIV CIAEM 2015
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Interamerican Conference on Mathematics Education
3-7 mayo
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México

Interpretación de fenómenos de crecimiento. Sus representaciones y el uso de herramientas digitales.

Carolina **Guerrero-Ortiz**
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
c_cguerrero@yahoo.com.mx
Hugo **Mejía** Velasco
Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN
México
hmejia@cinvestav.mx
Matías **Camacho-Machín**
Universidad de la Laguna,
España
mcamacho@ull.es

Resumen

Presentamos algunos resultados de la puesta en escena de una secuencia de enseñanza, cuyo objetivo se centró en el desarrollo de habilidades en los estudiantes para interpretar fenómenos que pueden ser descritos por medio de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Los resultados muestran cómo a través del estudio de la representación matemática de algunos fenómenos es posible que los estudiantes desarrollen diferentes estrategias de análisis, las cuales les ayudan a comprender el comportamiento del fenómeno y las conexiones entre las representaciones asociadas. Se observó una amplia presencia de los registros de representación como medio de interpretación y establecimiento de conexiones entre el modelo matemático, dado por la ecuación diferencial ordinaria y el contexto correspondiente.

Palabras clave: Interpretación, representaciones, ecuaciones diferenciales ordinarias, herramientas digitales.

Introducción

Diferentes investigaciones señalan la problemática existente relacionada con el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales (Arslan, 2010a; 2010b; Rasmussen, 2002; Guerrero, et. al., 2010; Hernández, 1995), en ellas se hace referencia a los obstáculos en el aprendizaje, generados por el privilegio de la enseñanza de estrategias algorítmicas sobre el desarrollo de estrategias de razonamiento conceptual. De manera que, el aprendizaje y las habilidades adquiridas por los estudiantes se determinan por la naturaleza de la actividad matemática en el aula de clase.

Considerando lo anterior, en esta investigación estructuramos un conjunto de actividades de enseñanza dirigidas al desarrollo de habilidades en los estudiantes para interpretar los elementos contenidos en la expresión algebraica de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO), en especial nos centramos en ecuaciones que modelan el crecimiento poblacional. En este contexto, nos preguntamos *¿Cómo asocian los estudiantes el contexto de un fenómeno de crecimiento con las representaciones que emergen en la construcción y exploración de modelos matemáticos asociados a él?*

Mostraremos algunas estrategias utilizadas por los estudiantes cuando construyen y exploran modelos matemáticos originados en el estudio de fenómenos de crecimiento, donde destaca la presencia de diferentes representaciones del modelo de la situación como un medio de análisis y desarrollo de significados respecto a los elementos que constituyen una EDO.

Marco conceptual

El estudio de las ecuaciones diferenciales (ED) puede ser abordado desde diferentes perspectivas que inexorablemente traen a la luz la presencia de distintas representaciones, tanto de la ecuación como de sus soluciones. Al estudiar el comportamiento de algunos fenómenos, la representación algebraica se hace presente en la expresión de la ecuación como un modelo matemático y en las funciones algebraicas como soluciones. La representación gráfica adquiere importancia al representar a la ED a través del campo de direcciones y al analizar la gráfica de las soluciones, ya sean éstas obtenidas algebraicamente o bosquejadas cualitativamente en el campo de direcciones. Y la representación numérica es de gran importancia, en cuanto que sólo una pequeña cantidad de ecuaciones diferenciales puede ser resuelta utilizando métodos algebraicos. Así, la naturaleza del estudio de las Ecuaciones Diferenciales y los Sistemas de Ecuaciones sugiere la conveniencia de analizar el papel que juegan las diferentes representaciones en la conceptualización de los estudiantes cuando se inician en el estudio de estos temas.

Tal como Duval (1993) menciona, los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, lo cual genera la necesidad de contar con diferentes representantes del objeto; siendo así, los tratamientos realizados dependerán del registro de representación utilizado. Una propiedad de las representaciones semióticas es la transformabilidad de una representación en otra, la cual puede representar completamente el contenido de la representación inicial o sólo una parte. Cuando la transformación tiene lugar dentro del mismo registro Duval lo llama tratamiento, al cambiar de registro se refiere a conversión. Para representar un objeto en un registro de representación es necesaria la selección de las características que constituyen lo que se quiere representar. Duval señala, que la aprehensión de los objetos matemáticos es conceptual y que sólo por medio de las representaciones en posible realizar alguna acción sobre los objetos.

Duval (1993, 1995), considera que las representaciones semióticas no sólo son un medio de exteriorización, sino que también juegan un papel importante en el desarrollo o modificación de las representaciones mentales. En otras palabras, el desarrollo de las representaciones mentales depende de la interiorización de las representaciones del objeto. Duval no pone atención en las representaciones mentales como prioritarias, sino en la construcción de conceptos por medio de la manipulación de las representaciones semióticas y los procesos de conversión entre éstas.

Como ya se ha puesto de manifiesto en diferentes investigaciones (Moreno-Armella & Sriraman, 2005; Sacristán et. al., 2010), el trabajo de los estudiantes se modifica dependiendo de las herramientas utilizadas. Un ejemplo frecuentemente recurrido es la actividad matemática con herramientas de lápiz y papel en comparación con el trabajo desarrollado con la mediación de herramientas digitales. En el primer caso, la acción del individuo sobre el objeto matemático tiene un carácter estático, mientras que en el segundo caso el individuo actúa de manera dinámica sobre el objeto matemático y sobre las representaciones de él. En otras palabras, las herramientas digitales amplifican las acciones que podemos realizar sobre un objeto matemático. Moreno-Armella & Sriraman (2005), ejemplifican lo anterior para el acto de trazar la gráfica de una función. Con herramientas de lápiz y papel el individuo tiene que manipular algebraicamente la expresión matemática que la define, poniendo en juego sus habilidades algebraicas. Con la mediación de las herramientas digitales, la acción del individuo se dirige hacia la interpretación de la gráfica, poniendo en juego el desarrollo de la comprensión de las relaciones de la gráfica con la expresión algebraica. La actividad cognitiva es diferente en cada contexto. Moreno-Armella & Santos-trigo (2014) subrayan lo anterior:

> "…no artifact is epistemologically neutral and consecuently, there is a disruption in the taken for granted aspects of what it means to think mathematically in the digital context. In this view, an instrument, that is, the internalized artifact is a template for action (pp. 35). "

Las representaciones de las Ecuaciones Diferenciales y las herramientas digitales son aspectos que constituyen la base de nuestra investigación.

Metodología

Los participantes

Participaron 9 estudiantes de una Maestría en Matemática Educativa, todos ellos procedentes de diferentes instituciones y distintas carreras universitarias, entre estas, ingeniería, informática y licenciatura en matemáticas. Todos los participantes habían sido profesores de bachillerato. Al momento de la investigación, cursaban una asignatura orientada a la programación y una asignatura relacionada con tópicos de análisis matemático, donde el dominio de diferentes herramientas digitales era necesario, por lo cual eran hábiles en el manejo algunos ambientes de cómputo. En este documento sólo mostraremos el trabajo más representativo de dos parejas participantes: Alice – Homer y Lander – Athan. Alice había estudiado matemáticas, Homer y Lander ingeniería, y Athan informática.

Material utilizado e Instrumentos de recogida de información

El material que se utilizó esta constituido por el planteamiento de once situaciones diferentes que los estudiantes resolvieron con el apoyo de algunas herramientas digitales. Estas tareas o situaciones fueron agrupadas y presentadas en un orden gradual de profundidad según el análisis requerido.

Clasificación de las tareas.

Primer Grupo: las tareas requieren analizar y resolver numéricamente diversas situaciones. A partir del estudio de valores concretos se obtiene una EDO del tipo $\frac{dU(t)}{dt} = kU(t)$ que describe la evolución de una población en condiciones ideales. Cuatro tareas más pertenecen a este grupo.

Segundo Grupo: constituido por tareas donde los estudiantes tenían que identificar cómo se integran a la ecuación diferencial anterior algunos factores que condicionan el crecimiento de una población, dando lugar a la construcción de una EDO como $\frac{dN}{dt} = aN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{C}\right) - P$; y

Tercer Grupo: se propusieron tareas relacionadas con la interpretación de fenómenos que se describen mediante sistemas de ecuaciones diferenciales (SED). Las tareas correspondientes a este grupo no se abordan en este documento.

Para responder a las tareas, los estudiantes tuvieron a su disposición software como: Excel, Derive, Wolfram-Alpha y Geogebra. En particular, para el estudio del campo de direcciones se utilizó el ambiente computacional GeomED, diseñado ad- hoc para esta investigación. Este ambiente permite introducir una ecuación diferencial con parámetros arbitrarios y modificar estos parámetros usando barras de desplazamiento para visualizar en tiempo real los efectos que la variación de los parámetros produce sobre el campo de direcciones. También muestra las soluciones numéricas de la EDO para una condición inicial dada.

Se utilizaron tres *instrumentos para recoger la información*: 1) Registros escritos de las tareas propuestas. (Anexo). 2) Grabaciones del trabajo en el ordenador. Para ello se utilizó CamStudio que es un software de captura de imágenes. Se video-grabó el trabajo que realizaron los estudiantes en: GeomED, Excel, Derive, Wolfram-Alpha y Geogebra. 3) Grabaciones del audio de las discusiones sostenidas por los equipos de trabajo y videograbaciones de la discusión grupal. Las grabaciones de audio y el video fueron transcritas para analizar el trabajo de los estudiantes.

Análisis de la información

Tal como se mencionó en líneas anteriores las tareas de enseñanza se dividen en tres grupos. Analizamos el trabajo de los estudiantes al resolver una tarea perteneciente al primer y segundo grupo, centrando la atención en la presencia de las diferentes representaciones y el uso que hacen de estas representaciones como medio de exploración, interpretación y presentación de resultados, así como en el papel del software como mediador en el desarrollo de estrategias de solución.

Para el análisis de la información hemos establecido los siguientes elementos de identificación, los cuales se enfocan en la observación y análisis de las herramientas que utilizan los estudiantes para resolver las tareas que se les plantean: **ID1**- Estrategias utilizadas al pasar de un registro de representación a otro, **ID2-** Significado asociado a los elementos en la EDO en relación con la situación planteada, **ID3-** Elementos gráficos significativos para establecer nexos entre el contexto de un problema y su representación analítica, **ID4-** Uso del software para establecer relaciones entre una situación y un modelo matemático.

El análisis de información se realizó en tres pasos, primero se localizaron los identificadores, en el trabajo escrito de los estudiantes. Después se buscó localizar los identificadores mediante análisis de la videograbación en el trabajo con las herramientas digitales. Y finalmente se establecieron algunas relaciones de correspondencia entre los resultados obtenidos en el primer y segundo paso. En cada paso los resultados localizados fueron verificados con la opinión de un investigador externo.

Análisis y discusión de resultados

El análisis se presenta en dos etapas: en la primera discutimos la presencia de diferentes representaciones que emergen en un proceso de modelización. En la segunda etapa se comenta la interpretación que realizan los estudiantes derivada del estudio del fenómeno por medio de sus representantes.

PRIMERA ETAPA - La tarea que se analiza en esta etapa es la situación 1, correspondiente al primer grupo de tareas (ver Anexo). En esta tarea el estudiante deberá mostrar algunas estrategias de solución para determinar la cantidad y variación de la sustancia conforme pasa el tiempo, un aspecto importante es la identificación de las variables presentes y las condiciones que relacionan estas variables, entre ellas la cantidad de sustancia en el organismo, la tasa de cambio y el tiempo. Los estudiantes deberán construir algunos modelos matemáticos (expresiones, gráficas, tablas) para determinar la cantidad de nicotina, su variación y el comportamiento a lo largo del tiempo.Presentamos a continuación, el proceso de solución mostrado por dos de los equipos participantes y las estrategias relacionadas con los identificadores descritos en la metodología.

CASO ALICE-HOMER

Enfocándose en la representación algebraica. En el trabajo de Alice y Homer destaca el uso de la representación numérica y la consideración de casos discretos. El esquema siguiente muestra la trayectoria de solución que siguieron, donde se observa que el proceso desarrollado para concluir la actividad tiene lugar a partir de la representación en forma discreta de la cantidad de nicotina:

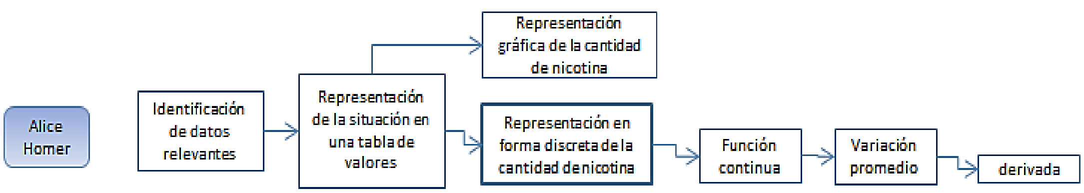


Figura 1. Trayectoria de solución desarrollada por Alice y Homer

Alice y Homer utilizan dos representaciones (gráfica y numérica) de la cantidad de nicotina, sin embargo no se observa que hayan extraído algún tipo de información de estas representaciones. Es decir, las conclusiones que obtuvieron se derivan del estudio cualitativo de la función obtenida para la cantidad de nicotina (ID2) y no de la representación gráfica o numérica (ID1). La representación numérica fue utilizada para determinar un patrón de comportamiento con el cual encontraron una expresión (discreta) para la cantidad de nicotina en el tiempo N, esto es $0.9\left(\frac{2}{3}\right)^{N}$ y tomando como base esta expresión determinaron $f(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^{t}(0.9)$ para representar la cantidad de nicotina en todo tiempo. Los participantes, no dan evidencia que demuestre si en la función, el tiempo t es entendido como continuo. En este sentido, el discurso que desarrollan en el trabajo escrito no demuestra la comprensión de las diferencias entre el uso de la representación discreta y la representación continua para la cantidad de nicotina (ID1).

Destaca una relativa facilidad en el tránsito del contexto a una representación matemática (numérica) y posteriormente un tratamiento en la representación numérica que da paso a la obtención de una expresión algebraica. Se observa que la información obtenida de la representación numérica y gráfica no constituye una fuente de evidencia para los estudiantes, debido a que se enfocan en el estudio de la expresión algebraica.

CASO LANDER-ATHAN

Enfocándose en la representación gráfica. Lander y Athan, recurrieron en todo momento al apoyo de las herramientas computacionales. Construyeron una tabla de valores en una hoja de cálculo para representar el comportamiento de la situación y utilizaron estos valores para obtener una gráfica que describe la cantidad de nicotina presente en el organismo y otra gráfica para la cantidad que se elimina conforme pasa el tiempo. Posteriormente, encontraron por medio de un ajuste de curvas una función $y = 1.35\, e^{-0.40x}$ para la cantidad de nicotina y derivaron esta función usando Geogebra y wolfram, de donde obtuvieron $y' = -0.54e^{-0.4x}$ para representar la variación. Finalmente graficaron en Geogebra la curva para la tasa instantánea de variación. Esto se muestra en el siguiente esquema (Fig.2).

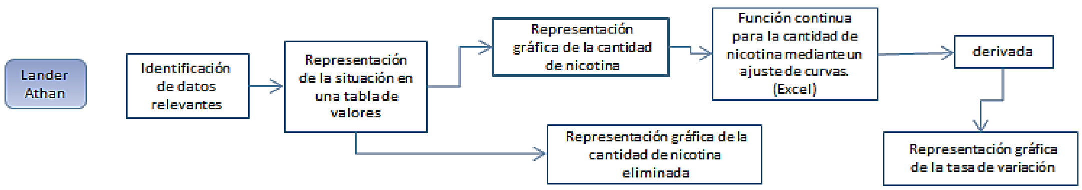


Figura 2. Trayectoria de solución desarrollada por Lander y Athan

La discusión de esta pareja evidencia cómo el proceso de comprensión de la situación y la organización de la información en una tabla de valores esta fuertemente relacionado (ID1), similarmente a lo evidenciado en el trabajo de Alice y Homer. La facilidad que ofrece la hoja de cálculo en el manejo de la información les permitió observar la importancia y las implicaciones de las condiciones iniciales del problema (ID3). Al contrastar la tabla de valores con la gráfica correspondiente, las condiciones iniciales adquieren sentido para los estudiantes cuando buscan establecer un criterio de congruencia entre las dos representaciones (ID3), es decir las condiciones iniciales constituyen una unidad significativa (Duval, 1995) al contrastar dos representaciones. En el caso de estos participantes, el uso de la herramienta favorece el paso de manera inmediata a la representación algebraica de la cantidad de nicotina, promoviendo la aparición de conexiones robustas entre el planteamiento del modelo algebraico y su relación con el contexto que le da lugar (ID4). El trabajo de este equipo muestra que muchas de sus conclusiones surgieron a partir del trabajo con la representación gráfica y numérica de la cantidad de nicotina y de la derivada, dejando de lado el análisis del modelo algebraico (ID3).

Analizar el papel del profesor no fue un elemento constitutivo de nuestra investigación. A efecto de aclarar el desarrollo de la secuencia de enseñanza, mencionamos que al finalizar la resolución de esta tarea, se dio paso a una discusión colectiva sobre los aspectos que están involucrados en la construcción de un modelo matemático para describir un fenómeno, tales como idealización, simplificación, ecuación diferencial, condiciones iniciales, estabilidad, etc. En el sentido que con la tarea anterior no se llega a una EDO propiamente dicho, pero si da lugar a la discusión sobre lo que es una Ecuación Diferencial Ordinaria en una de sus formas más sencillas como una relación de proporcionalidad entre el cambio y la misma función $\frac{dN}{dt} = kN$ y su solución dada por la función de tipo exponencial cuya derivada es ella misma multiplicada por una constante $N = e^{kt}$.

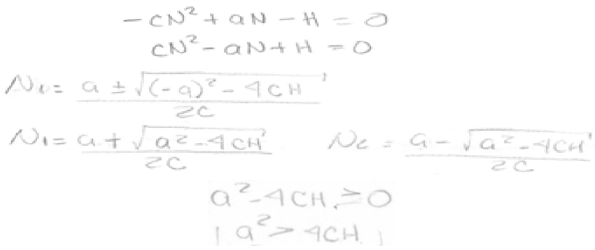
SEGUNDA ETAPA - En esta etapa analizamos el proceso de solución que siguieron nuestros participantes al resolver la situación 6 (ver anexo), correspondiente al segundo grupo de tareas.

Uno de los objetivos principales se dirigió a la observación del análisis que los estudiantes realizan de los parámetros (a,c,H) comprendidos en la EDO $\frac{dN}{dt}=aN(t)-cN^2(t)-H$. De tal forma que, conociendo el comportamiento de una población, se examinen los valores que los parámetros deben tomar para que la EDO represente la variación de dicha población[1]. La importancia de la actividad radica en el análisis de los valores que los parámetros deben tomar y las relaciones entre ellos para que la EDO resultante describa el comportamiento de una población como la que se describe en el pie de página (relacionado con ID2, ID4), donde c, a y H representan el factor de sobrepoblación, la tasa de natalidad y la pesca. Esta situación se puede estudiar de manera cualitativa, analizando el comportamiento del campo de direcciones y los signos de la EDO, o con el uso de herramientas algebraicas analizando el signo del discriminante $\sqrt{a^2-4cH}$, y la relación dada por $a^2>4cH$.

Los estudiantes en general, utilizaron aproximaciones algebraicas y gráficas para resolver el problema. Aunque el trabajo con el registro gráfico fue más enriquecedor y favoreció la discusión en el aula, resulta que ambas aproximaciones se complementaron. Todos los equipos siguieron un procedimiento más o menos similar para determinar las soluciones de equilibrio: exploraron con el software el campo de direcciones para diferentes valores de los parámetros, identificaron gráficamente las soluciones de equilibrio de la EDO lo cual les condujo a plantear la igualdad a cero, así propusieron una ecuación de segundo grado que resolvieron para hallar los valores de las soluciones constantes. Algunos equipos intentaron resolver la EDO. En seguida se comenta el trabajo desarrollado por las parejas elegidas.

Enfocándose en la representación algebraica. Alice y Homer iniciaron determinando las soluciones de equilibrio, para ello igualaron el lado derecho de la EDO $\frac{dN}{dt}=aN(t)-cN^2(t)-H$ con cero y encontraron las soluciones, de ahí intentaron obtener algunas conclusiones (Fig. 3.a). Al no obtener más información, resolvieron la EDO apoyándose en derive para realizar operaciones algebraicas (ID4), donde encontraron una expresión parecida la que se muestra en la figura 6. Pero, al encontrarse con una expresión donde la presencia de parámetros desconocidos predomina, no continuaron por esta ruta de solución y decidieron explorar la EDO utilizando la herramienta (GeomED) para graficar campos de direcciones. Así, obtuvieron como conclusión que la EDO describiría el comportamiento de una población con las características señaladas (pie de página previo) para valores de los parámetros en los intervalos que se muestran en la imagen (Fig. 3.b), es decir resolvieron para algunos casos particulares

[1] Se trata de un modelo de crecimiento de población, en donde se consideran dos límites de crecimiento uno inferior L1 y otro superior L2. Para una población inferior a L1, la población total se extingue, para poblaciones entre L1 y L2 la población crece teniendo como límite de crecimiento L2 y para poblaciones superiores a L2 la población total decrece por los límites impuestos de manera natural: espacio y competencia por el alimento.



Las raíces deben ser positivas y reales…

La raíz N_1 es positiva siempre puesto que el discriminante es positivo. Para asegurar que N_2 sea positiva, el discriminante deberá ser mayor que cero, pero menor que a.

Figura 3.a. Alice y Homer plantean una ecuación y explican que las raíces deben ser positivas

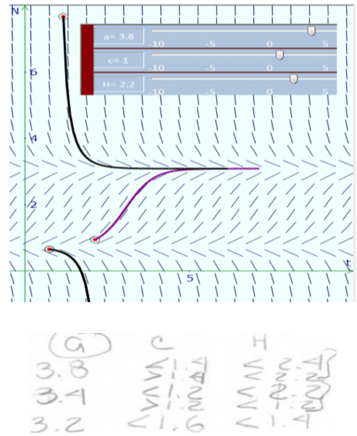


Figura 3.b . Alice y Homer resuelven para casos particulares

La trayectoria de solución de este equipo, muestra cómo al no encontrar más información con el dominio que tienen de las herramientas algebraicas, recurren a la representación gráfica. Destacamos aquí cómo la herramienta digital favorece la búsqueda de estrategias alternativas de solución y exploración de la situación (ID4), permitiendo así que los estudiantes avancen en el proceso de solución de acuerdo a sus capacidades. Aunque no logran resolver la situación general, creemos que lo importante aquí es el proceso de exploración que desarrollan. Por otra parte, este trabajo representa un ejemplo de cómo la representación de las soluciones constantes de una EDO adquiere un carácter dinámico al establecer relaciones entre dos de sus representaciones.

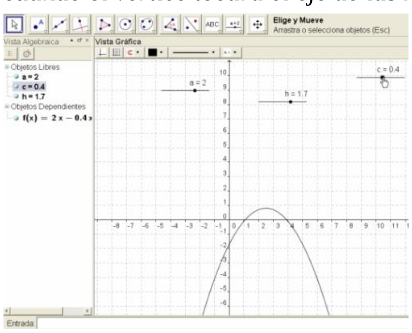
Por otro lado, como se puede observar en el trabajo de Alice y Homer, la determinación de las soluciones constantes y su asociación con los segmentos de pendiente igual a cero en el campo de tangentes se transforma en una herramienta “pivote”, para la obtención de información respecto a los valores de los parámetros y comportamiento del fenómeno. Estos elementos de ambas representaciones se convierten en una herramienta de anclaje para el trabajo de nuestros participantes en ambos registros de representación, este es un aspecto que también destaca en el trabajo de Lander y Athan.

Enfocándose en la representación gráfica. Lander y Athan probaron con diferentes valores para los parámetros a manera de visualizar las variaciones en el campo de direcciones hasta encontrar un comportamiento similar a la evolución de las situaciones de población que se revisaron en las sesiones previas (comportamiento similar al descrito en el pie de página 2). Comenzaron analizando casos particulares, por ejemplo cuando sólo existe natalidad y pesca. Después de introducir diferentes valores concluyeron que el límite de crecimiento de población esta asociado con la sobrepoblación. La exploración con el software les permitió ir estableciendo conclusiones parciales (ID4) y plantear conjeturas sobre el comportamiento de la población de acuerdo a diferentes valores de los parámetros. Para ello consideraron como referencia a los segmentos de línea que tienen pendiente cero.

Las transcripciones muestran, que en un inicio Lander y Athan utilizaron el software como un medio para explorar el efecto que produce la modificación de los parámetros de la EDO sobre el campo de direcciones (ID4), centrando la atención en el desplazamiento de las soluciones de equilibrio. Al parecer tenían presente la existencia de un límite de crecimiento, así al hacer variar los parámetros lograron asociar ese límite con los términos relacionados a la sobrepoblación y la pesca (H y c) (ID3). Después de explorar el comportamiento del campo de direcciones con diferentes valores, finalmente notaron la existencia de una infinidad de valores para los parámetros con los cuáles podrían obtener un comportamiento de crecimiento de población como el que se pedía. Y asociaron esos límites (asíntotas como ellos los llaman) con las raíces de $kN(t)-cN^2(t)-H=0$. Como podemos ver el trabajo de esta pareja está fuertemente vinculado al uso del software.

Articulando representaciones. Ante la pregunta del profesor sobre las relaciones existentes entre los parámetros, los estudiantes hicieron varias conjeturas que con la visualización y discusión grupal se irían apoyando o desechando. Lander y Athan explicaron ante sus compañeros, la estrategia desarrollada para obtener conclusiones sobre los valores de los parámetros. Iniciaron con la presentación de un caso particular que habían estudiado previamente $\frac{dN}{dt}=7N-3N^2-2$ y lo trasladaron al caso general, que es el que nos ocupa en esta discusión. La transcripción y figuras siguientes ilustran el trabajo de Lander y Athan.

> Athan- *más o menos, está sería la parábola para el caso de* $7N-3N^2-2$,
> Inv*: qué estás graficando, el lado derecho de la ecuación?*
> Athan*: sí, aquí la solución uno está en 1/3 y la solución dos está en 2 y esto corresponde a las asíntotas… entonces nosotros al jugar con los deslizadores siempre podemos tener los 3 casos, el caso en el que no tocan el eje de las x, o sea el caso donde no hubiera solución real, el caso donde hubiera una solución real cuando el vértice tocara el eje de las x, y el caso donde habría dos soluciones reales cuando se intersectan.*



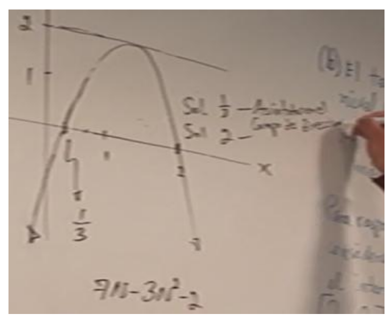


Figura 4. Athan relaciona la información representada en la gráfica de $7N-3N^2-2$ y las soluciones de equilibrio en el campo de direcciones

Lander y Athan analizaron el signo de la EDO graficando el lado derecho de la ecuación y generalizando a través de la variación de los parámetros. Esta es una ventaja que ofrece la construcción en Geogebra, al mismo tiempo que modifican los valores de los parámetros pueden observar la influencia que éstos tienen sobre las raíces de la función cuadrática, lo cual se puede trasladar como ellos lo hicieron al estudio de la EDO centrando la atención en las soluciones de equilibrio y regiones de crecimiento y decrecimiento. Además, el hecho de poder asignar valores arbitrarios a los parámetros, motivó la discusión sobre los valores que éstos deberían tomar y su impacto sobre la situación que se estaba analizando, por ejemplo para el caso en que *H* toma valores negativos.

La aproximación que realizaron los estudiantes al análisis cualitativo de la EDO favoreció la comprensión de la expresión algebraica de las soluciones de equilibrio $N_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4cH}}{2c}$, así como de la relación $a^2>4CH$ (ID3). La facilidad que otorga el software para graficar campos de direcciones y modificar los parámetros en tiempo real, permitió que, al no poder encontrar rápidamente los valores de los parámetros buscados, los estudiantes introdujeran el estudio cualitativo del crecimiento o decrecimiento de la población a través del análisis de la función cuadrática $f(N) = kN(t) - cN^2(t) - H$, el software toma aquí el papel de mediador para la generalización de conocimiento.

Por otro lado, se observó que para algunos estudiantes no era claro por qué se analizaba función *f(N)*, así fue necesaria la intervención del profesor para discutir y aclarar dudas. Con apoyo del software se comentaron algunos casos particulares, por ejemplo la relación entre los ceros de la EDO y las soluciones de equilibrio, y la relación de los intervalos donde la función de segundo grado es positiva o negativa con las regiones del campo de direcciones donde las soluciones son crecientes o decrecientes, esto se muestra en la siguiente imagen.

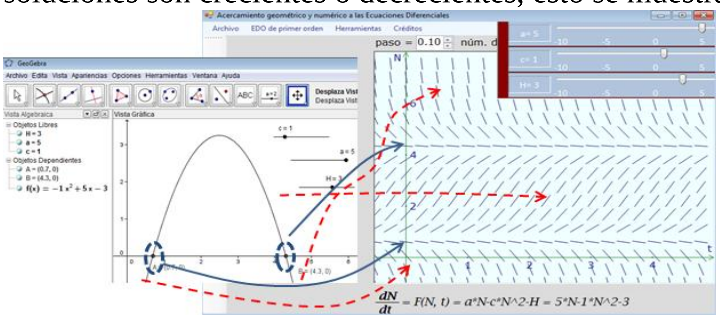


Figura 5. Se analiza la variación de la población mediante el estudio del cambio de signo de $f(N)$ en $\frac{dN}{dt} = f(N)$

Es claro que la relación mostrada en la figura anterior es rica en la cantidad de información que puede ofrecer, sin embargo encierra también una complejidad asociada a la comprensión conceptual, en tanto que la información sobre la evolución de un fenómeno representado algebraicamente mediante una EDO, ha de ser interpretado por medio de dos representaciones gráficas una situada en el plano cartesiano y la otra en el campo de direcciones. Notamos que las soluciones de equilibrio (estable e inestable) continúan siendo unidades significativas para la coordinación parcial de estas dos representaciones y obtención de información. Tal como evidenciamos, el dominio de las herramientas digitales mostrada por Lander y Athan abrió las puertas para el empleo de manera conjunta de diferentes representaciones para el estudio del comportamiento del fenómeno representado por la EDO. Su trabajo mostró cómo las relaciones entre el contexto del problema y su representación mediante un modelo matemático, ya sea éste gráfico o algebraico adquieren un carácter dinámico, tanto en la conexión de las unidades significativas de cada representación (soluciones de equilibrio), como en la interpretación de la evolución del fenómeno dada por la lectura de los gráficos utilizados.

Por otra parte, se encontró que algunos participantes no lograron obtener la solución algebraica de la EDO, los errores se debieron principalmente a una manipulación algebraica descuidada. Así, fue necesario explicar el método algebraico de separación de variables, para ello se utilizó Derive como una herramienta auxiliar en las operaciones algebraicas, llegando con ello a la solución general de la ecuación dada por la función que se muestra abajo. Se determinó también el comportamiento al infinito el cual corresponde a las soluciones de equilibrio.

$$n = \frac{e^{k\cdot\sqrt{(a^2-4\cdot c\cdot h)}/c}\cdot(\sqrt{(a^2-4\cdot c\cdot h)}-a)+e^{-t\cdot\sqrt{(a^2-4\cdot c\cdot h)}/c}\cdot(\sqrt{(a^2-4\cdot c\cdot h)}+a)}{2\cdot c\cdot e^{-t\cdot\sqrt{(a^2-4\cdot c\cdot h)}/c}-2\cdot c\cdot e^{k\cdot\sqrt{(a^2-4\cdot c\cdot h)}/c}}$$

Figura 6. Solución de $\frac{dN}{dt}=kN(t)-cN^2(t)-H$ obtenida con Derive

Si bien el contenido abordado en la tarea, es sólo una parte muy pequeña de lo que se puede profundizar en el estudio de la situación, consideramos que las estrategias de solución que se presentaron favorecieron la reflexión sobre las relaciones entre los parámetros en una EDO, su representación gráfica y el vínculo con el contexto (ID2, ID3, ID4).

Conclusiones

Las estrategias de solución mostradas por los estudiantes les permitieron obtener información del comportamiento de la situación sin necesidad de resolver inicialmente la EDO, esto favoreció el desarrollo de significados contextuales asociados a los objetos matemáticos estudiados. En los procesos de solución se observa que surge, de manera casi natural, un estudio cualitativo de la representación gráfica asociada a la ecuación diferencial que con un poco más de profundidad, se podría llegar a concretar en la construcción y análisis de diagramas de bifurcación. Por otra parte, observamos que los estudiantes usan en el análisis del comportamiento de los fenómenos, al menos dos representaciones de la situación, lo que podría revelar algunos indicios de reflexión sobre el concepto de variación desde el estudio de las ecuaciones diferenciales, lo cual nos ofrece la oportunidad de reconsiderar en el diseño de estrategias de enseñanza las ideas que subyacen a una ED de manera que podamos apoyar a los estudiantes en la construcción de un conocimiento conceptual más robusto estructurado mediante una red de conocimientos relacionados con las Ecuaciones Diferenciales.

Con respecto al proceso de solución que muestran nuestros participantes, podemos concluir que el tipo de tarea favorece un determinado estilo de pensamiento, en el caso de la situación 1 se trata de un estilo de pensamiento orientado a lo numérico, aunque posteriormente Alice y Homer se enfocan en lo algebraico, mientras que Lander y Athan centran su atención en la representación gráfica y el análisis matemático se enriquece por los diferentes caminos que ofrece la hoja de cálculo para determinar el modelo matemático (ID4).

En el caso de la situación 6, al inicio el proceso de solución es diferente, Alice y Homer se enfocan en la representación algebraica, pero al tratarse de un modelo que demanda de muchas operaciones algebraicas recurren a la visualización del campo de direcciones. Mientras que Lander y Athan se concentran de inicio en la exploración de los parámetros con el campo de direcciones y posteriormente en la exploración del cambio de signo del diferencial con apoyo de Geogebra. Los procesos mostrados ofrecen indicios sobre cómo junto con el dominio de las herramientas digitales logran utilizar las representaciones gráfica y numérica de las EDO como una herramienta para la obtención de información. El dominio de las herramientas digitales no sólo introduce una nueva manera de estudiar las Ecuaciones Diferenciales, sino que es acompañado del desarrollo de habilidades para explorar y conjeturar el comportamiento de algunos fenómenos.

Referencias

Arslan, S. (2010a). Do students really understand what an ordinary differential equation is? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol.41 (7), pp.873- 888.

Arslan, S. (2010b). Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. Teaching Mathematics and Its Applications, Vol. 29, pp. 94-107.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels. Peter Lang, Suisse.

Hernández Ramírez A. (1995)."Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numérico, Gráfico y Algebraico en relación con las Ecuaciones Diferenciales". Cinvestav, México.

Guerrero, C., Camacho, M. & Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que modelan un problema. Enseñanza de las Ciencias, 28(3), pp.341–352.

Moreno-Armella, L. & Sriraman, B. (2005). The articulation of symbol and mediation in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37(6), pp. 476-486.

Moreno-Armella, L. & Santos-Trigo, M. (2014). The use of digital tools in Mathematical Practices: Reconciling Traditional and Emerging Approaches. In English, L. & Kirshner, D. (Eds.), Handbook of International Research in Mathematical Education (3ed.).

Rasmussen, C. (2002). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. Journal of Mathematical Behavior, 20, 55-87.

Sacristán, A., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., and Meissner, H. (2010). The influence and shaping of digital Technologies on the learning –and learning trajectories- of mathematical concepts, in Mathematics education and technologyrethinking the terrain. The 17th ICMI Study, C. Hoyles and J.-B. Lagrange, eds., Springer, New York, 2010, pp.179–226.

Anexo

Situación 1

Un cigarro americano contiene 11mg de nicotina. De esto, 0.9 mg son asimilados por un fumador promedio. Si un tercio de la nicotina presente en el cuerpo de un humano sano es eliminada del cuerpo en una hora.

¿Cómo podemos usar este hecho para predecir cuál será la cantidad de nicotina presente en el cuerpo a lo largo del tiempo, después de haber fumado un cigarrillo?
¿Cómo varía la cantidad de nicotina presente en el cuerpo a lo largo del tiempo?
Encuentra una función que determine la cantidad de nicotina en cualquier momento.
Determina el modelo matemático que describe cómo cambia la cantidad de nicotina en el cuerpo.
De acuerdo al modelo, ¿Qué sucede con la cantidad de nicotina conforme transcurre el tiempo?

Situación 6

Considera el caso general de una situación descrita por la ecuación $\frac{dN}{dt} = aN - cN^2 - H$, donde a, c y H son mayores de cero. Analiza para qué valores de los parámetros se obtiene una ecuación diferencial que modele una situación de población similar a la anterior.