

La mirada profesional al razonamiento proporcional y algebraico en la práctica estadística

María Magdalena Gea Serrano (mmgea@ugr.es)
Luis A. Hernández Solís (lhernandez@uned.ac.cr)

18 de mayo de 2024

Proyecto PID2022-139748NB-I00 financiado por:



MINISTERIO
DE CIENCIA, INNOVACIÓN
Y UNIVERSIDADES



Cofinanciado por
la Unión Europea



AGENCIA
ESTATAL DE
INVESTIGACIÓN

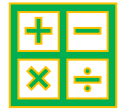


UNIVERSIDAD
DE GRANADA

UNED
UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA
Costa Rica



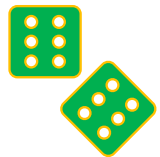
El conocimiento y la competencia didáctico-matemática del profesor



Niveles de razonamiento algebraico y su adaptación en la enseñanza



Razonamiento proporcional y algebraico en tablas estadísticas



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

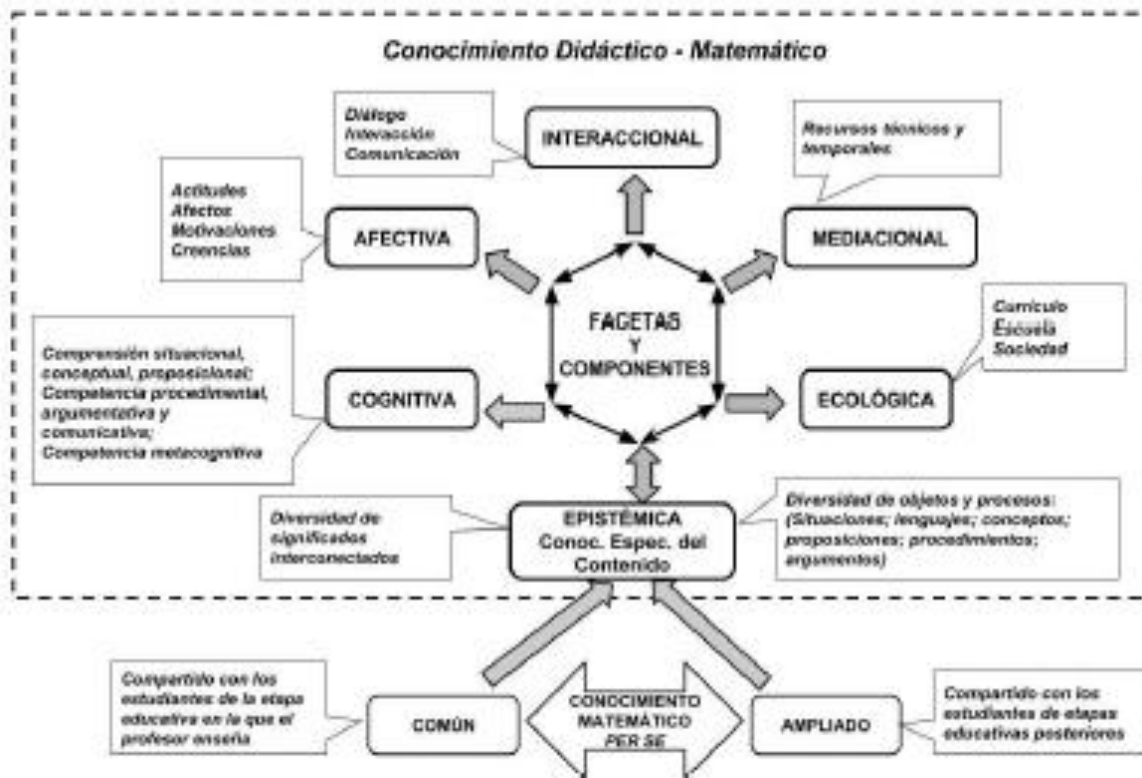


Reflexiones finales



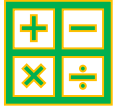
El conocimiento y la competencia didáctico-matemática del profesor

<https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/>



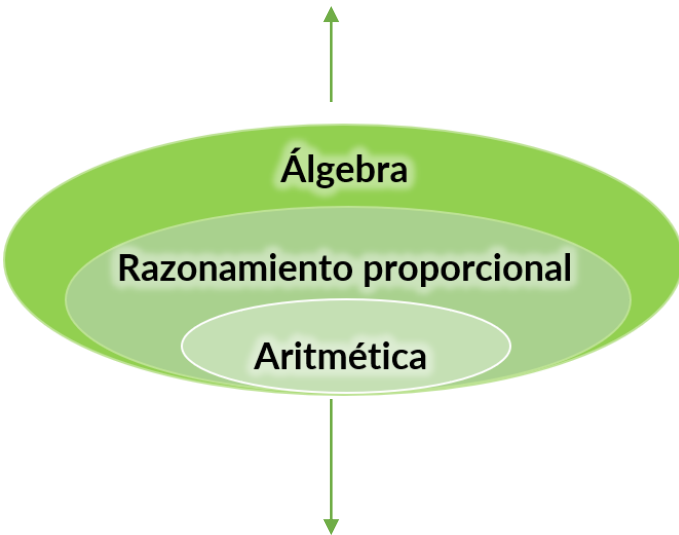
Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>

Godino, J. D., Batanero, C., Burgos, M. y Gea, M. M. (2021). Una perspectiva ontosemiótica de los problemas y métodos de investigación en Educación Matemática. *Revemop*, e202107, 1-30. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202107>



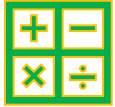
Niveles de razonamiento algebraico y su adaptación en la enseñanza

Objetos algebraicos

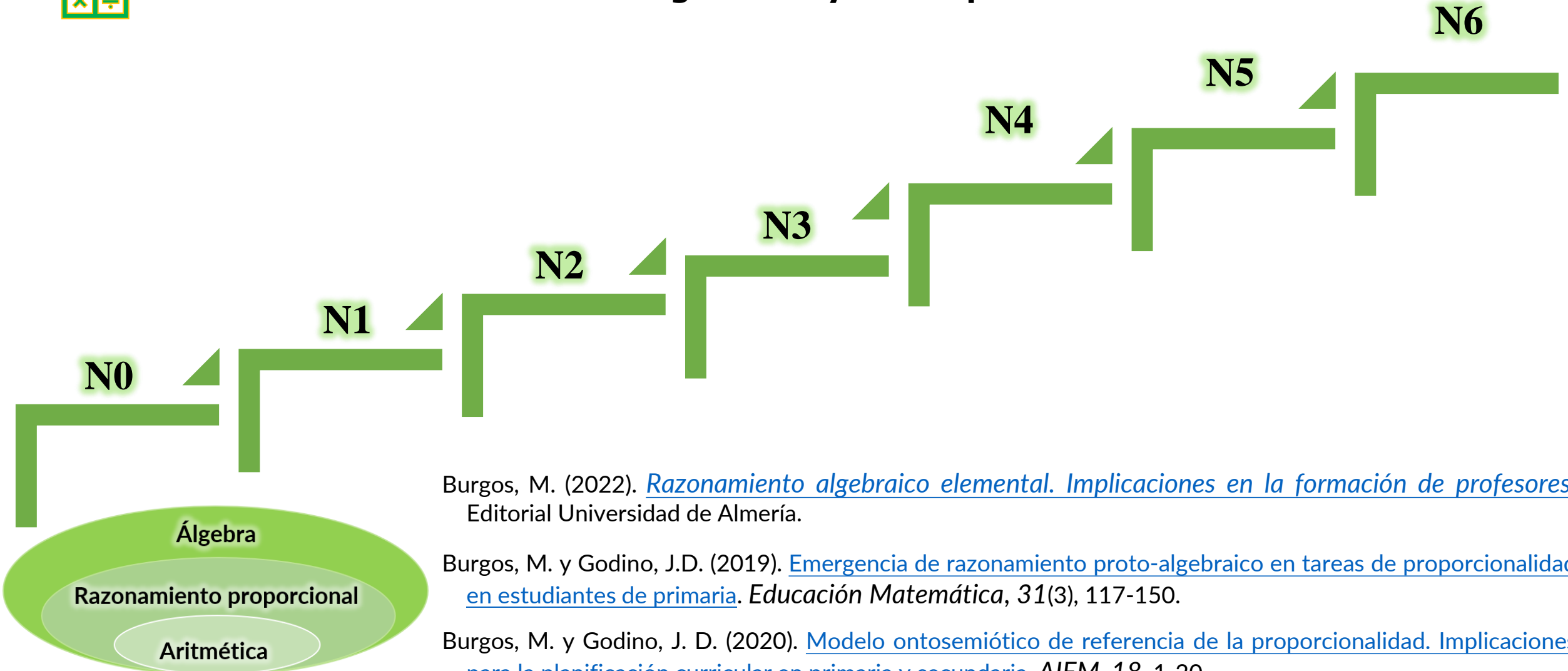


Procesos algebraicos

- **Relaciones** de equivalencia o de orden utilizadas en y con definiciones.
 - **Operaciones y propiedades** sobre elementos de diversos conjuntos de objetos (números, transformaciones geométricas, etc.).
 - **Funciones**
 - **Estructuras algebraicas**
-
- **Generalización**, al determinar o inferir una clase o regla general.
 - **Unitarización**, al reconocer la regla que determina una clase (que pasa a ser algo nuevo) para particularizar o proponer un ejemplo.
 - **Representación** (simbólico-literal, tabular, gráfica, diagramática, ...).
 - **Cálculo analítico y transformaciones para obtener nuevos objetos matemáticos.**



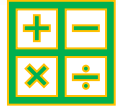
Niveles de razonamiento algebraico y su adaptación en la enseñanza



Burgos, M. (2022). [Razonamiento algebraico elemental. Implicaciones en la formación de profesores](#). Editorial Universidad de Almería.

Burgos, M. y Godino, J.D. (2019). [Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria](#). *Educación Matemática*, 31(3), 117-150.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). [Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria](#). *AIEM*, 18, 1-20.



Niveles de razonamiento algebraico y su adaptación en la enseñanza

- Números naturales.
- Significado operacional de la igualdad.

- Conjuntos - clases - tipos de números.
- Operaciones y propiedades.
- Significado relacional de la igualdad.
- Variable en contexto.

Variable como incógnita - función - generalización en patrones.

Cálculo analítico con variables - forma canónica -

N6

N5

N4

N3

N2

N1

N0

$Ax + B = C$
No se opera con la variable

$Ax + B = Cx + D$
se opera con la variable

Álgebra

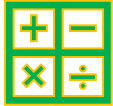
Razonamiento proporcional

Aritmética

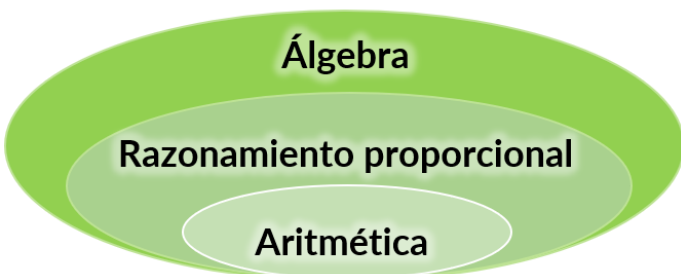
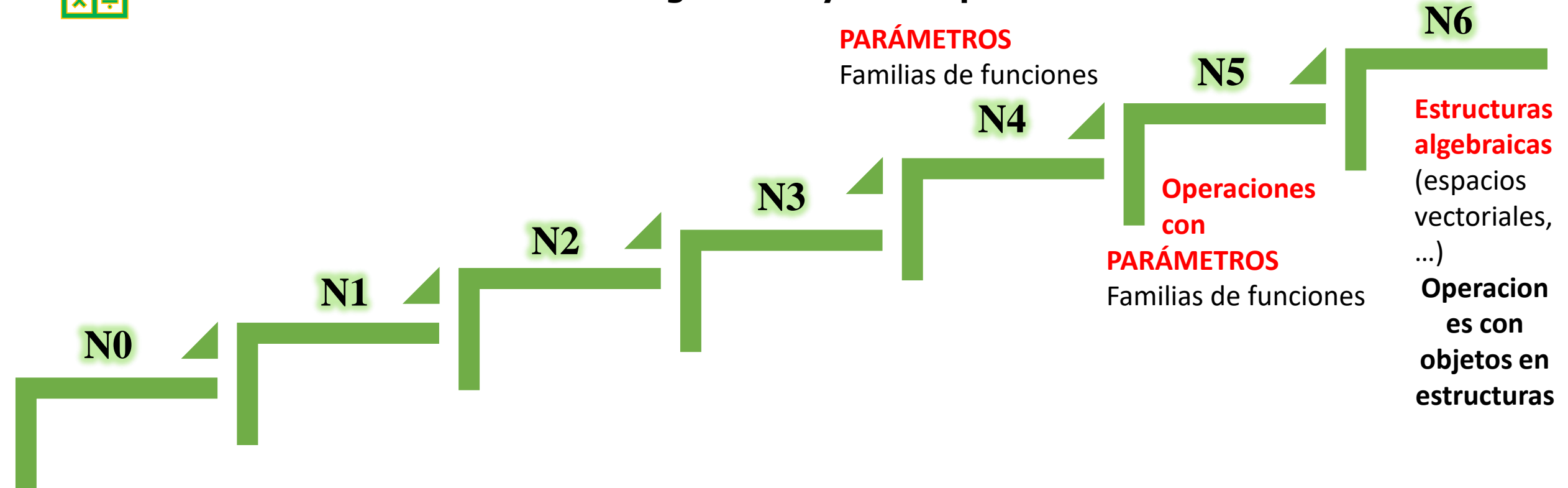
Burgos, M. (2022). [Razonamiento algebraico elemental. Implicaciones en la formación de profesores.](#) Editorial Universidad de Almería.

Burgos, M. y Godino, J.D. (2019). [Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria.](#) *Educación Matemática*, 31(3), 117-150.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). [Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria.](#) *AIEM*, 18, 1-20.



Niveles de razonamiento algebraico y su adaptación en la enseñanza

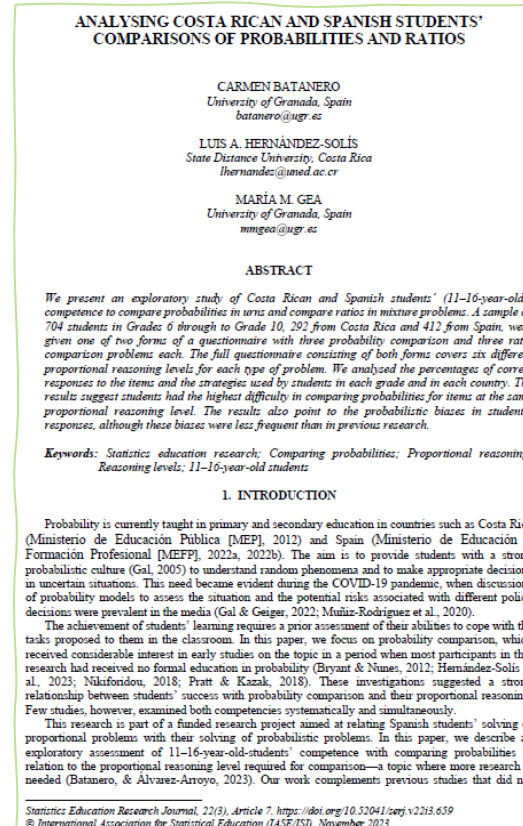
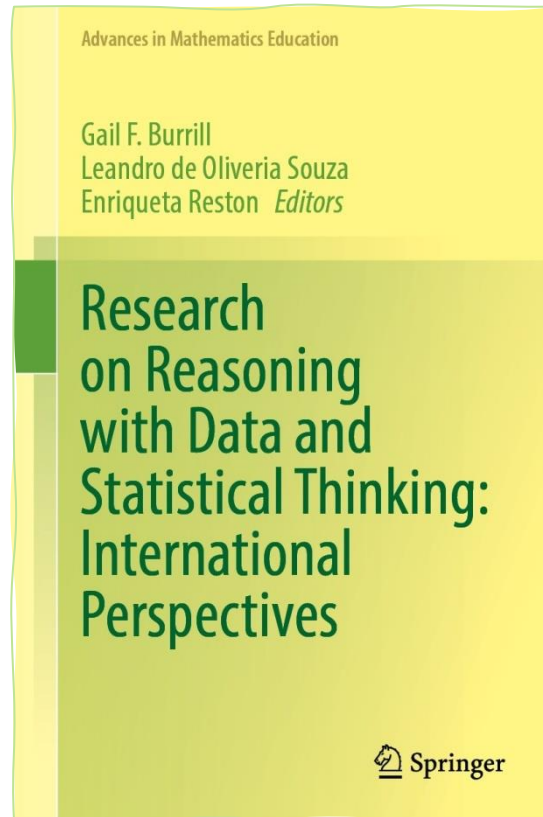


Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219. <http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965>

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105>



Razonamiento proporcional y algebraico en tablas estadísticas

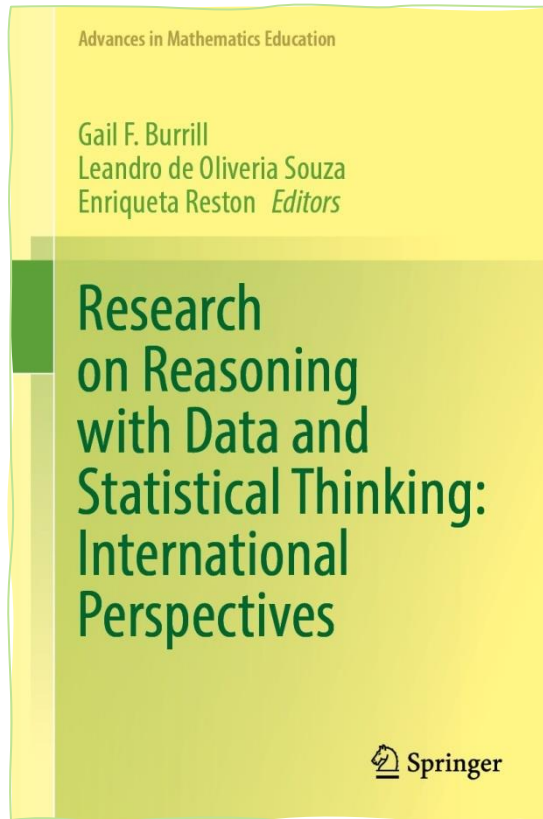


Pallauta, J.D., Gea, M. M., Batanero, C., & Arteaga, P. (2023). Algebraization Levels of Activities Linked to Statistical Tables in Spanish Secondary Textbooks. In G.F. Burrill, L.O. Souza, E. Reston (Eds) Research on Reasoning with Data and Statistical Thinking: International Perspectives (pp. 317-339). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29459-4_23

Batanero, C., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2023). Analysing Costarican and Spanish students' proportional reasoning and comparison of probabilities. Statistics Education Research Journal, 22(3), 1-23. <https://doi.org/10.52041/serj.v22i3.659>



Razonamiento proporcional y algebraico en tablas estadísticas



Significado de la tabla estadística en libros de texto españoles de educación secundaria

Meaning of the statistical table in Spanish secondary education textbooks

Jocelyn D. Pallauta*
ORCID ID 0000-0001-5508-4924

María Magdalena Gea**
ORCID ID 0000-0002-5229-0121

Carmen Batanero***
ORCID ID 0000-0002-4189-7139

Pedro Arteaga****
ORCID ID 0000-0002-8347-7669

Resumen

El objetivo del trabajo es describir el significado pretendido de la tabla estadística en una muestra de dieciocho libros de texto españoles de educación secundaria (12 a 15 años), analizando la configuración de objetos y procesos matemáticos en la actividad matemática que se plantea al estudiante. Utilizando el análisis de contenido, identificamos las situaciones problema planteadas, lenguaje utilizado, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que organizan el significado pragmático en torno a la tabla estadística. Los resultados muestran diferencias entre las editoriales seleccionadas en la actividad matemática planteada, tanto en número de tareas como tipo de situación, aspecto que puede pasar inadvertido para el profesor en su labor educativa. No se encuentran diferencias en conceptos, propiedades y argumentos, siendo el tratamiento del lenguaje similar en variedad y complejidad tanto por editorial como nivel educativo.

Palabras clave: Tabla estadística. Libros de texto españoles. Educación secundaria. Análisis semiótico.

Abstract

The aim of this paper is to describe the intended meaning of statistical tables, in a sample of 18 Spanish secondary school textbooks (12 to 15 years old), by analyzing the configuration of mathematical objects and processes in the mathematical activity posed to the student. Through content analysis, we identified the type of problems situations posed, language used, concepts, properties, procedures, and arguments, which organize the pragmatic meaning about the statistical table. The results show differences between the selected publishers in the mathematical activity proposed to the student, both in number of tasks and type of situation and these aspects may go unnoticed by the

* Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Estudiante de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada (UGR), Granada, España. E-mail: ocelyndiaz@correo.ugr.es.
** Doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Profesora del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (UGR), Granada, España. E-mail: mmgea@ugr.es.
*** Doctora en Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Catedrática colaboradora del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (UGR), Granada, España. E-mail: batanero@ugr.es.
**** Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (UGR), Granada, España. E-mail: parteaga@ugr.es.

Bolema, Rio Claro (SP), v. 35, n. 71, p. 1803-1824, dez. 2021 1803

Significado de referencia de la tabla estadística

Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C., y Arteaga, P. (2021). Significado de la tabla estadística en libros de texto españoles de educación secundaria. *Bolema*, 35(71), 1803-1824.
<https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a26>

Pallauta, J.D., Gea, M. M., Batanero, C., & Arteaga, P. (2023). Algebraization Levels of Activities Linked to Statistical Tables in Spanish Secondary Textbooks. In G.F. Burrill, L.O. Souza, E. Reston (Eds) *Research on Reasoning with Data and Statistical Thinking: International Perspectives* (pp. 317-339). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-29459-4_23



Razonamiento proporcional y algebraico en tablas estadísticas

Significado de la tabla estadística en libros de texto españoles de educación secundaria

Meaning of the statistical table in Spanish secondary education textbooks

Jocelyn D. Pallauta*

ORCID ID 0000-0001-5508-4924

María Magdalena Gea**

ORCID ID 0000-0002-5229-0121

Carmen Batanero***

ORCID ID 0000-0002-4189-7136

Pedro Arteaga****

ORCID ID 0000-0002-8347-7669

Resumen

El objetivo del trabajo es describir el significado pretendido de la tabla estadística en una muestra de dieciocho libros de texto españoles de educación secundaria (12 a 15 años), analizando la configuración de objetos y procesos matemáticos en la actividad matemática que se plantea al estudiante. Utilizando el análisis de contenido, identificamos las situaciones problema planteadas, lenguaje utilizado, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que organizan el significado pragmático en torno a la tabla estadística. Los resultados muestran diferencias entre las editoriales seleccionadas en la actividad matemática planteada, tanto en número de tareas como tipo de situación, aspecto que puede pasar inadvertido para el profesor en su labor educativa. No se encuentran diferencias en conceptos, propiedades y argumentos, siendo el tratamiento del lenguaje similar en variedad y complejidad tanto por editorial como nivel educativo.

Palabras clave: Tabla estadística. Libros de texto españoles. Educación secundaria. Análisis semiótico.

Abstract

The aim of this paper is to describe the intended meaning of statistical tables, in a sample of 18 Spanish secondary school textbooks (12 to 15 years old), by analyzing the configuration of mathematical objects and processes in the mathematical activity posed to the student. Through content analysis, we identified the type of problems situations posed, language used, concepts, properties, procedures, and arguments, which organize the pragmatic meaning about the statistical table. The results show differences between the selected publishers in the mathematical activity proposed to the student, both in number of tasks and type of situation and these aspects may go unnoticed by the

* Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Estudiante de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada (UGR), Granada, España. E-mail: jcpallauta@correo.ugr.es.

** Doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Profesora del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (UGR), Granada, España. E-mail: mmgea@ugr.es.

*** Doctora en Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Catedrática colaboradora del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (UGR), Granada, España. E-mail: batanero@ugr.es.

**** Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (UGR), Granada, España. E-mail: parteaga@ugr.es.

Bolema, Rio Claro (SP), v. 35, n. 71, p. 1803-1824, dez. 2021

1803

- **Tabla de datos.** Primera organización de un conjunto de datos (contiene valores de una o varias variables para cada individuo de la muestra).

- **Tabla de distribución de una variable.** Se asocia a cada modalidad de la variable el número de individuos de la muestra (frecuencia) y representa su distribución.

- **Tabla de doble entrada o de contingencia.** Representa datos mediante el cruce de dos variables estadísticas (correspondencia entre modalidades de fila y columna) junto a las frecuencias conjuntas de los mismos.

- Tablas de distribución de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales.
- Tablas de distribución de frecuencias acumuladas.
- Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia.

- Tablas de doble entrada de frecuencias ordinarias.
- Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalo.



Razonamiento proporcional y algebraico en tablas estadísticas

Temperatura durante la mañana						
Hora	7:00	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00
Temperatura (°C)	10	14	18	24	28	30

Tabla de datos

- Tablas de distribución de frecuencias ordinarias
- Tablas de distribución de frecuencias acumulada
- Tablas de distribución de frecuencias con variable en intervalo

Cantidad de hermanos de un grupo de estudiantes		
Cantidad de hermanos	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
0	3	3
1	9	12
2	6	18
3	18	36
4	3	39
5	2	41

Cuartil 1 (25%)	Cuartil 2 (50%)	Cuartil 3 (75%)
$0,25 \cdot 41 = 10,25$ $Q_1 = 1$	$0,5 \cdot 41 = 20,5$ $Q_2 = 3$	$0,75 \cdot 41 = 30,75$ $Q_3 = 3$

Estaturas de alumnos de 8.º básico de un colegio	
Estatura (m)	Frecuencia acumulada
[1,30; 1,38[2
[1,38; 1,46[6
[1,46; 1,54[15
[1,54; 1,62[26
[1,62; 1,70]	30

- Tablas de doble entrada de frecuencias ordinarias
- Tablas de doble entrada con distribución de frecuencias de al menos una variable en intervalo

Variable y valores de la variable (tipos, escala, clases de equivalencia)

Significado relacional de la igualdad

Clases en intervalos, extremos, intervalo modal o mediano

Frecuencia y tipos de frecuencia

Rango, máximo, mínimo



Razonamiento proporcional y algebraico en tablas estadísticas

■ Tabla de datos

- Tablas de distribución de frecuencias ordinarias
- Tablas de distribución de frecuencias acumulada
- Tablas de distribución de frecuencias con variable en intervalo

sexo \ taller	Taller de guitarra	Taller de flauta
mujer	15	24
hombre	15	21

- Tablas de doble entrada de frecuencias ordinarias
- Tablas de doble entrada con distribución de frecuencias de al menos una variable en intervalo

¿Cuál es tu tipo de comida favorita?				
Grupo de edad	Comida rápida	Italiana	Mexicana	China
Menores de 12 años	54	21	16	9
Entre 12 y 18 años	34	24	29	13
Mayor de 18 años	11	35	26	28

Dependencia e independencia
Parámetros; distribución condicionada
 Función (lineal y no lineal);
 proporcionalidad



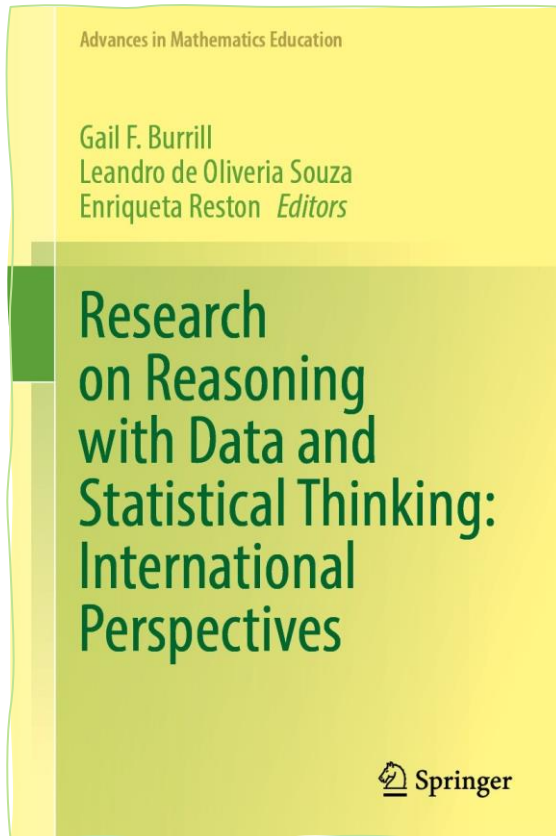
Razonamiento proporcional y algebraico en tablas estadísticas

Tabla 1 Porcentaje de actividades analizadas según curso y editorial

Curso	Anaya n=862	Edelvives n=892	Santillana n=795	Total n=2549
1	12.4	9.8	8.9	10.4
2	13.0	16.0	10.8	13.4
3	29.7	30.2	44.8	34.6
4	44.9	44.1	35.5	41.7

Tabla 2 Porcentaje de tipos de tablas por actividades analizadas según curso y editorial

Tipo de tabla		Anaya n=862	Edelvives n=892	Santillana n=795
Tabla de datos		15.2	13.0	8.8
Distribución de frecuencias	Ordinarias	37.2	42.3	50.2
	Acumuladas	5.1	10.9	6.3
	Datos agrupados	19.1	19.1	29.3
Doble entrada	Ordinarias	22.2	14.2	4.3
	Datos agrupados	1.2	0.6	1.1





Razonamiento proporcional y algebraico en tablas estadísticas

Tabla de datos (Nivel 0 - aritmético)

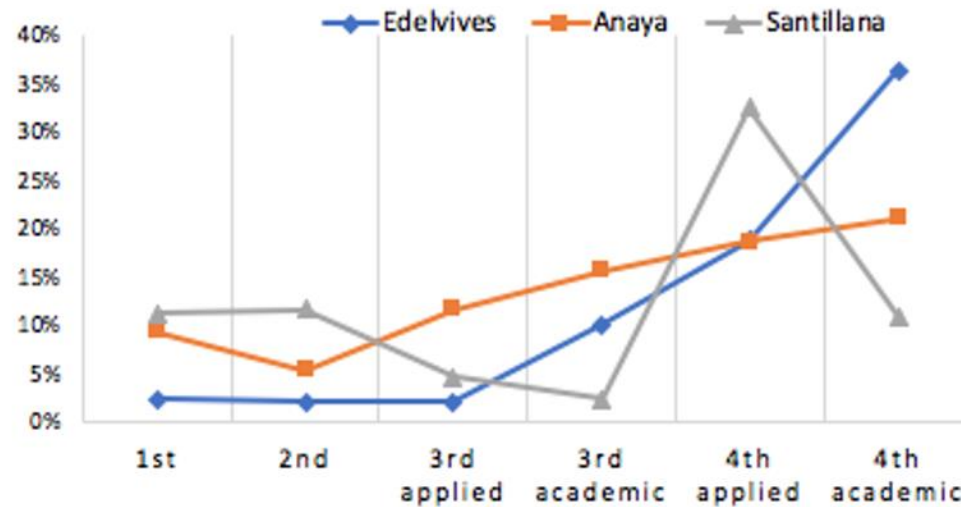
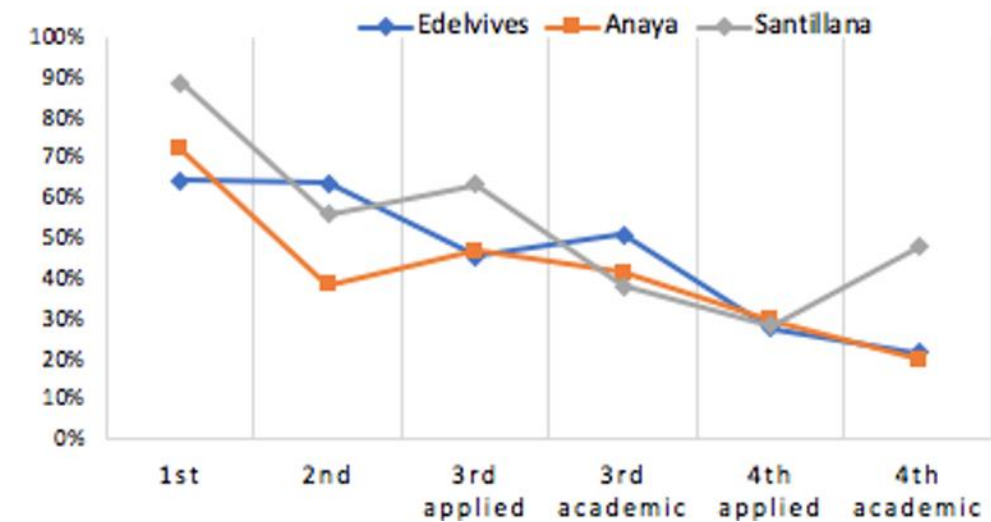


Tabla de distribución en frecuencias absolutas y relativas (Nivel 1 - prealgebraico)



Advances in Mathematics Education

Gail F. Burrill
Leandro de Oliveira Souza
Enriqueta Reston Editors

Research on Reasoning with Data and Statistical Thinking: International Perspectives

Springer

Pallauta, J.D., Gea, M. M., Batanero, C., & Arteaga, P. (2023). Algebraization Levels of Activities Linked to Statistical Tables in Spanish Secondary Textbooks. In G.F. Burrill, L.O. Souza, E. Reston (Eds) Research on Reasoning with Data and Statistical Thinking: International Perspectives (pp. 317-339). Springer.

https://doi.org/10.1007/978-3-031-29459-4_23



Razonamiento proporcional y algebraico en tablas estadísticas

Tabla de distribución en frecuencias acumuladas (Nivel 3 - algebraico)

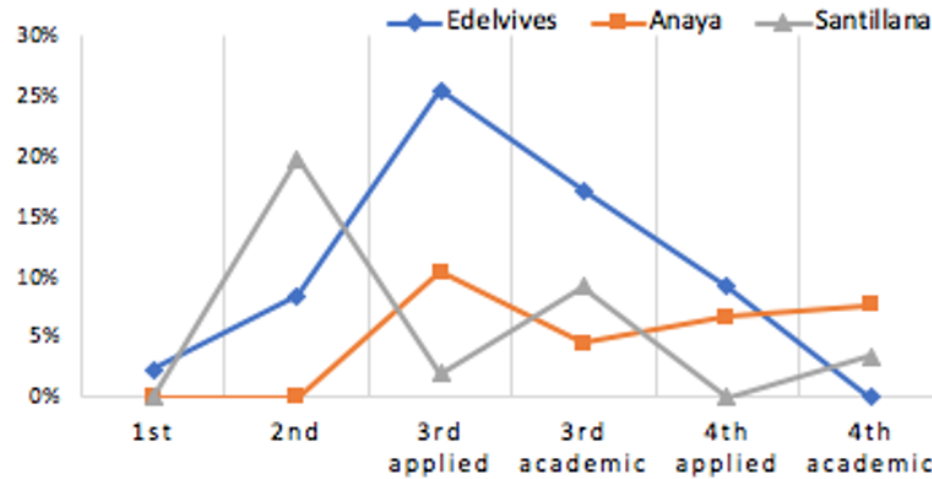
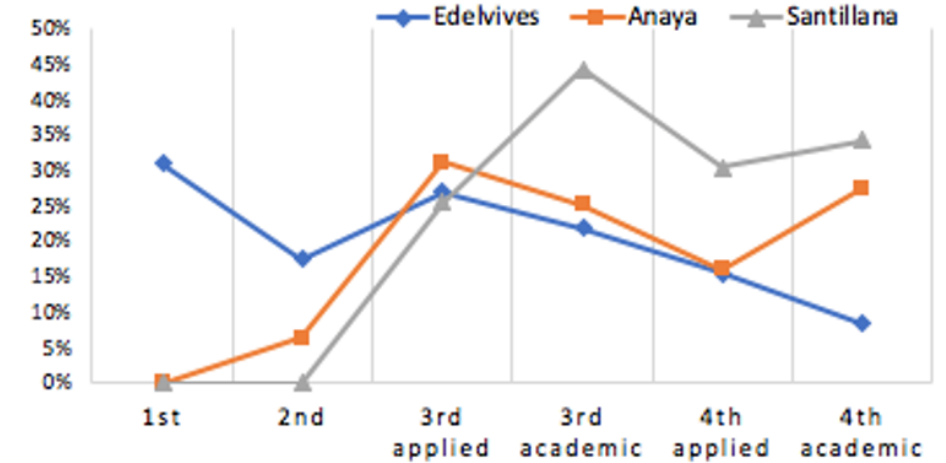


Tabla de distribución en intervalos de valores (Nivel 3 - algebraico)



Advances in Mathematics Education

Gail F. Burrill
Leandro de Oliveria Souza
Enriqueta Reston Editors

Research on Reasoning with Data and Statistical Thinking: International Perspectives

Springer



Razonamiento proporcional y algebraico en tablas estadísticas

Tabla de doble entrada en frecuencias absolutas o relativas (Nivel 4 - algebraico)

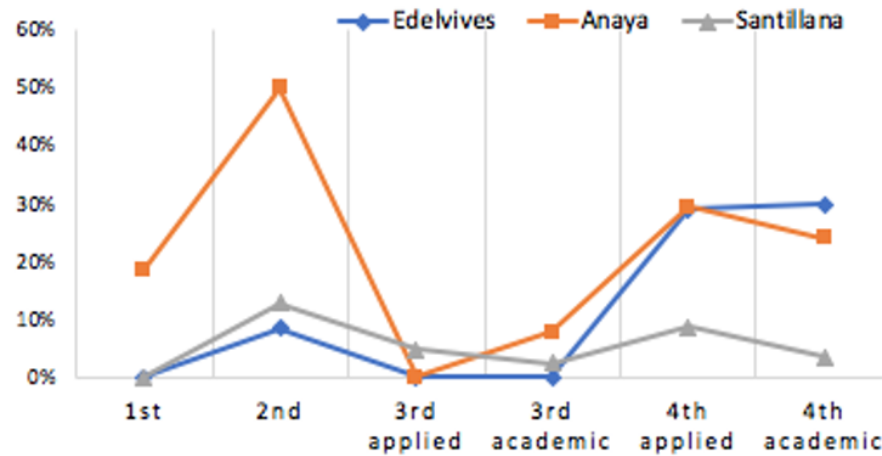
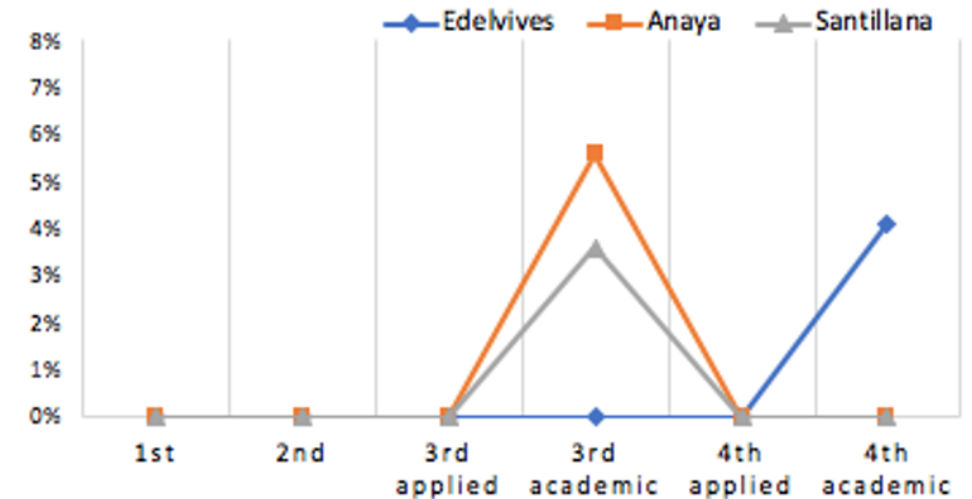


Tabla de doble entrada en valores en intervalos (Nivel 4 - algebraico)

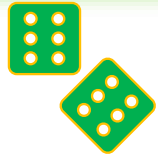


Advances in Mathematics Education

Gail F. Burrill
Leandro de Oliveria Souza
Enriqueta Reston Editors

Research on Reasoning with Data and Statistical Thinking: International Perspectives

Springer



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

mathematics MDPI

Article
Algebraization Levels in the Study of Probability
Maria Burgos *, Carmen Batanero and Juan D. Godino

Department of Mathematics Education, University of Granada, 18071 Granada, Spain; batanero@ugr.es (C.B.); jgodino@ugr.es (J.D.G.); * Correspondence: mariaburgos@ugr.es

Abstract: The paper aims to analyze how the different degrees of mathematical formalization can be worked in the study of probability at non-university educational levels. The model of algebraization levels for mathematical practices based on the onto-semiotic approach is applied to identify the different objects and processes involved in the resolution of a selection of probabilistic problems. As a result, we describe the possible progression from arithmetic and proto-algebraic levels of mathematical activity to higher levels of algebraization and formalization in the study of probability. The method of analysis developed can help to establish connections between intuitive/informal and progressively more formal approaches in the study of mathematics.

Keywords: probability; formalization; fundamental stochastic ideas; algebraization levels

1. Introduction
Today we are witnessing a debate in statistics education regarding the possibility of teaching different contents, such as statistical inference to students with limited knowledge of algebra or calculus through informal approaches [1–3]. A similar discussion is observed in relation to other mathematical topics, for which the recommendation is a stronger emphasis on understanding and solving problems [4] while avoiding unnecessary formalizations as well as learning computational algorithms, which are less relevant because of technology. In order to facilitate the understanding of the teaching contents, and according to students' previous knowledge, the study of mathematics can be carried out with different degrees of formalization, which depend on the generalization, symbolization, and analytical computation processes; in other words, these different levels are linked to the use of algebraic concepts and processes. A contribution to this discussion is to admit the possibility of different formalization levels, i.e., various degrees of using algebra throughout the learning of mathematics. The view of algebra as the application of unknowns, equations, functions, parameters, or abstract structures, whose properties make it possible to operate with symbols, is restrictive since it conceals an essential feature of algebraic reasoning: that of generalization and progressive expression of generality. An extended view recognizes the presence of algebraic thinking even in the primary school mathematical activity [5,6]. In particular, the algebraic reasoning levels model [7,8] systematizes and completes such an extended view and enables to clarify the levels of mathematical formalization in the study of whatever content. In this paper, we center probability, because of the diversity of random situations that we have to face in our lives, and its necessity in the later study of inference. Due to this relevance, several curricular proposals [9,10] introduce probability in Primary Education, pursuing to achieve the probabilistic literacy needed for every citizen [11]. The aim of this paper is to analyze the algebraic activity required in the work with probability at non-university levels and to describe it using the levels proposed in the algebraic reasoning model [7,8]. In this way, it is possible to define different degrees of formalization in the study of probability, depending on the algebraic reasoning level required in each of them, and to propose a sequence for introducing the fundamental ideas

check for updates
Citation: Burgos, M.; Batanero, C.; Godino, J.D. Algebraization Levels in the Study of Probability. *Mathematics* **2022**, *10*, 91. <https://doi.org/10.3390/math10010091>
Academic Editors: Laura Malin-Rodríguez and María Magdalena Ceca Serrano
Received: 6 December 2021
Accepted: 23 December 2021
Published: 27 December 2021
Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.
Copyright: © 2021 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

Mathematics **2022**, *10*, 91. <https://doi.org/10.3390/math10010091> <https://www.mdpi.com/journal/mathematics>

SITUACIÓN: COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES

PREMIO: sacar bola ROJA

Alicia

4 Rojas
2 Azules

Bernardo

6 Rojas
4 Azules

Ganancia: 0,5€

¿Ganancia de Alicia para que el juego sea justo?

Respuesta:

Ganancia esperada: Alicia

$$P(\text{Roja}) = \frac{4}{6}$$

$$\text{Ganancia esperada} = \frac{4}{6} \cdot x + \frac{2}{6} \cdot 0 = \frac{3}{10}$$

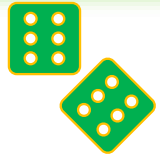
$$x = \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{4} = \frac{9}{20} = 0,45\text{€}$$

Ganancia esperada: Bernardo

$$P(\text{Roja}) = \frac{6}{10}$$

$$\text{Ganancia esperada} = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{10} \cdot 0 = \frac{3}{10}$$

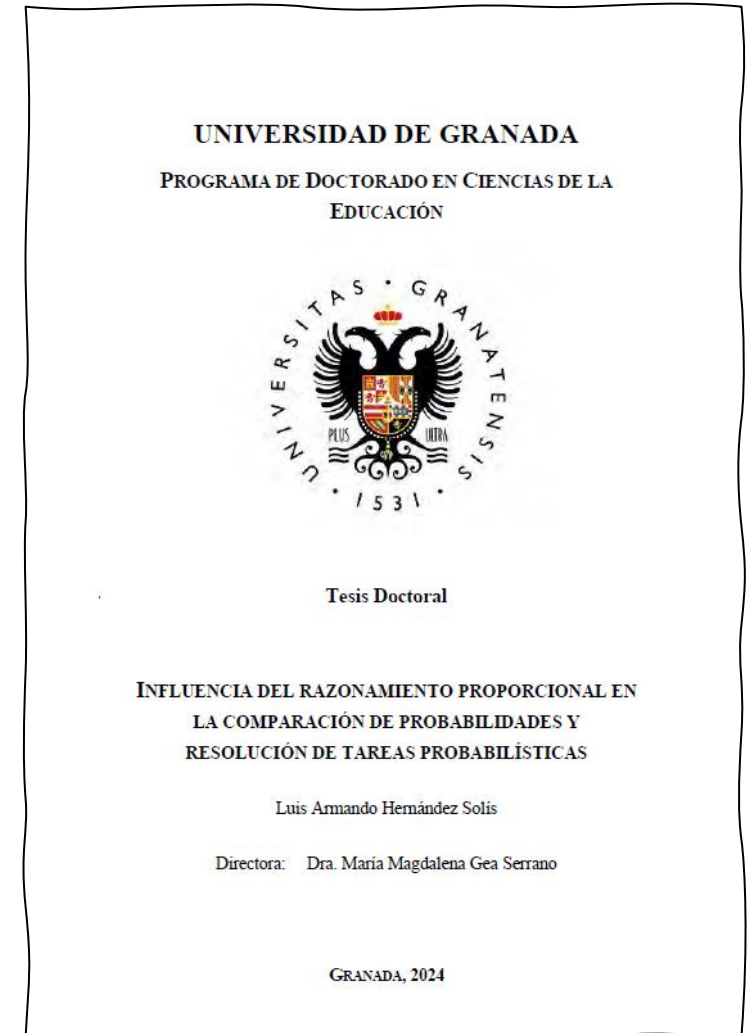
Nivel 2

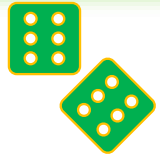


Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

Influencia del razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades y resolución de tareas probabilísticas

Comparación de probabilidades en urnas y razonamiento proporcional





Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

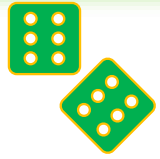
Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. Hernández-Solís, L. A. y Gea, M.M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico. *PNA*, 15(4), 267-288.

<https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349>

Hernández-Solís, L. A., Gea, M.M., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Research on children's reasoning in comparing probabilities. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 39(1), 1-24.

<https://www.seio.es/beio/research-on-childrens-reasoning-in-comparing-probabilities/>



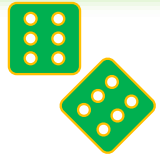


Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

El conjunto de investigaciones analizadas advierten que la intuición en probabilidad, y más concretamente la capacidad de comparar probabilidades, progresa por etapas.

Estas etapas tienen una fuerte relación con las correspondientes al desarrollo del razonamiento proporcional pero no son equivalentes.

En consecuencia, el estudio de fracciones por sí sólo no logrará que el estudiante progrese hacia la etapa más avanzada de su razonamiento probabilístico.

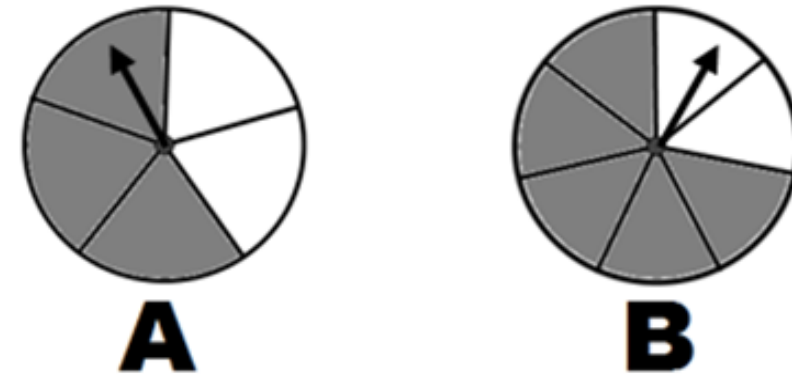


Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

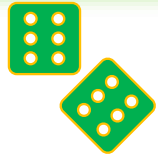
Por otro lado, como se muestra en varios de los estudios, **el contexto influye fuertemente en las estrategias** utilizadas en problemas equivalentes (desde el punto de vista probabilístico).



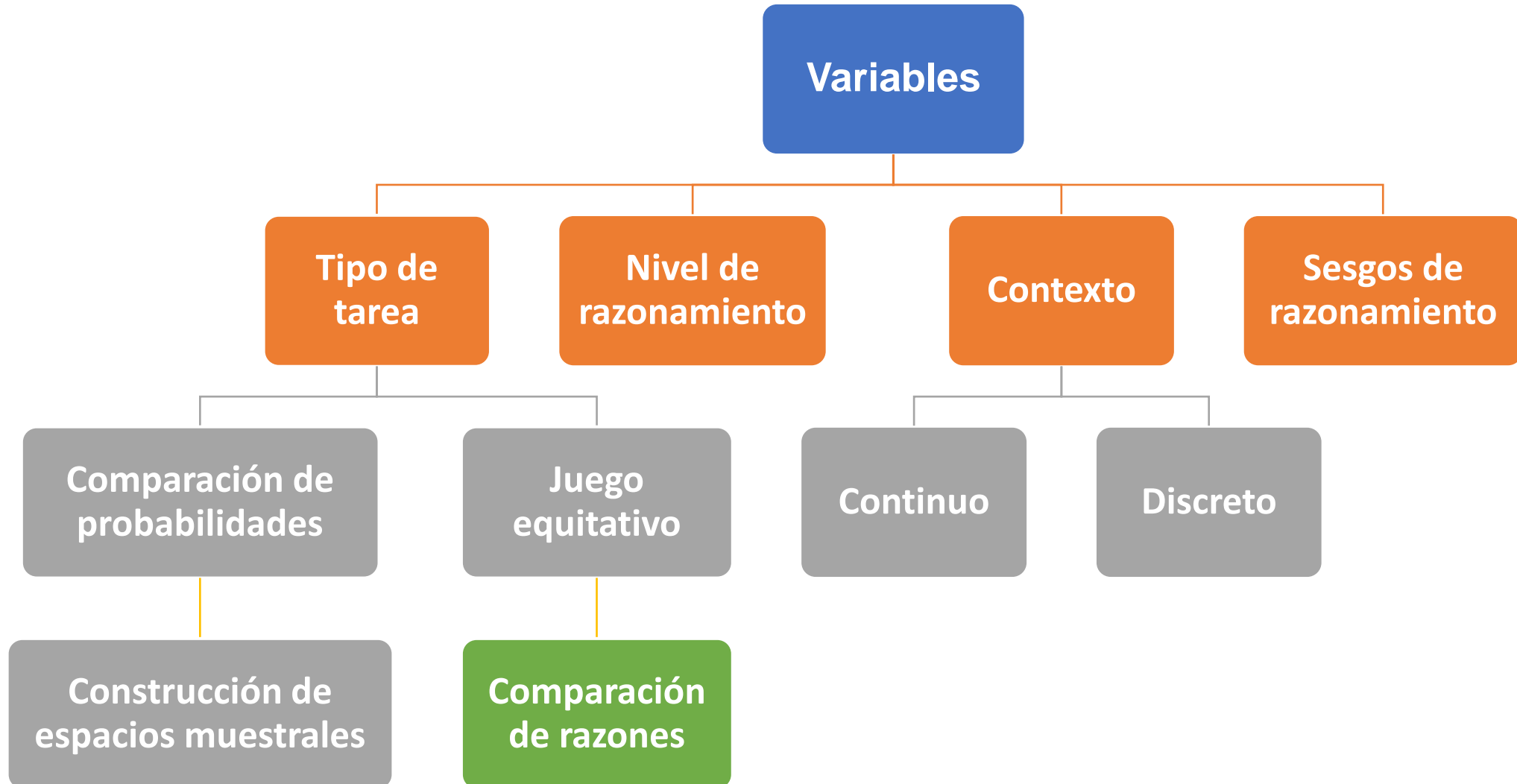
$(3,2)$ vs $(5,2)$

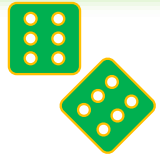


$(3,2)$ vs $(5,2)$



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

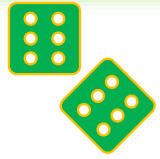




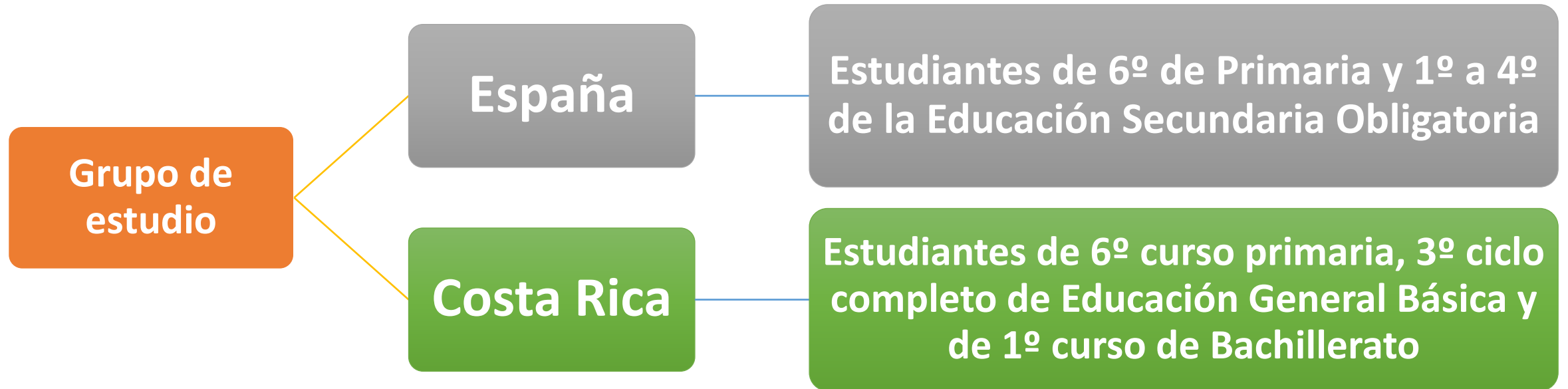
I Etapa: Estudio exploratorio

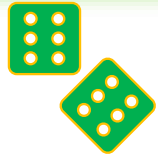


11 años: 40 estudiantes
12 años: 15 estudiantes



II Etapa: Estudio ampliado





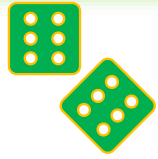
Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

Descripción de la muestra

Tabla 1. Composición de la muestra, según curso escolar, país y cuestionario.

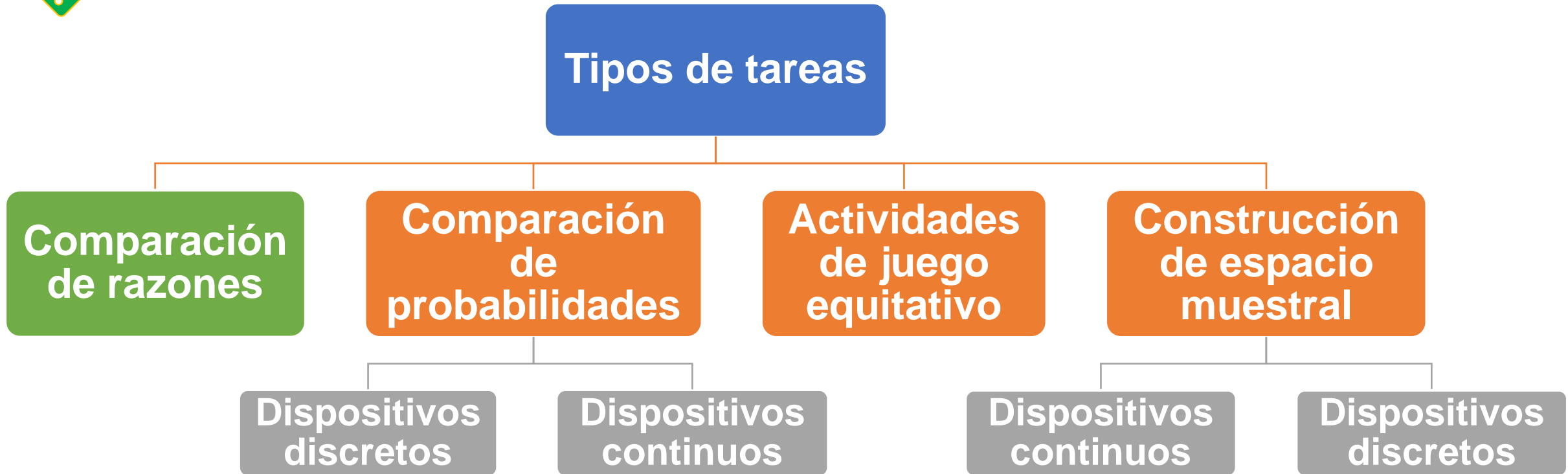
Curso	Cuestionario A		Cuestionario B		Total	
	Costa Rica	España	Costa Rica	España	Costa Rica	España
6ºEGB	35	39	33	39	68	78
7ºEGB/1ºESO	26	43	26	37	52	80
8ºEGB/2ºESO	31	32	33	31	64	63
9ºEGB/3ºESO	26	50	26	46	52	96
10ºED/4ºESO	27	55	29	40	56	95
Total	145	219	147	193	292	412

704 estudiantes

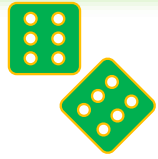


Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

Tipos de tareas



6 niveles de dificultad en la escala de Noelting(1980a, 1980b)



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

Batanero, C. y Hernández-Solís, L. A. (2023). Razonamiento proporcional en comparación de razones de estudiantes costarricenses y españoles. *Uniciencia*, 37(1), 1-20.

<https://doi.org/10.15359/ru.37-1.21>

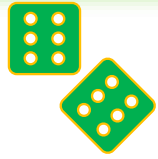
Gea, M. M., Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Relating students' proportional reasoning level and their understanding of fair games. *Journal on Mathematics Education*, 14(4), 663-682.

<https://doi.org/10.22342/jme.v14i4.pp663-682>



Uniciencia



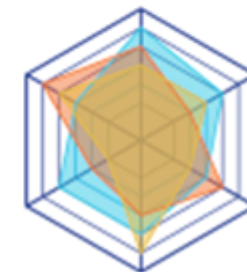
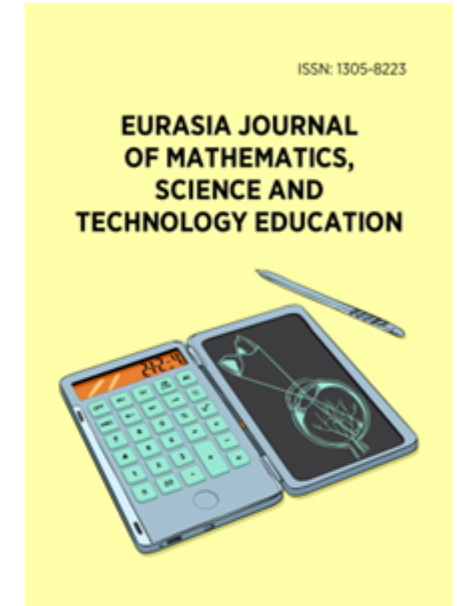


Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

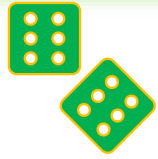
Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (2023).
Costarican students' proportional reasoning and
performance in comparing probabilities in spinners.
*Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology
Education*, 9(12), 1-14.

<https://doi.org/10.29333/ejmste/13869>

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (en
prensa). Razonamiento proporcional y construcción de
espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos
por estudiantes costarricenses. *Revista de Educación
Estadística*.



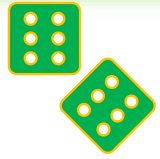
Revista de
Educación
Estadística
UCM



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico



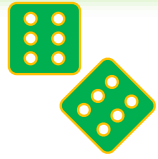
Batanero, C., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2023). Analysing Costarican and Spanish students' proportional reasoning and comparison of probabilities. *Statistics Education Research Journal*, 22(3), 1-23. <https://doi.org/10.52041/serj.v22i3.659>



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

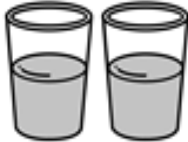



Para cada nivel escolar y país,

- **¿Cuál es la dificultad relativa de comparar probabilidades en urnas para problemas de diferente nivel de razonamiento proporcional según Noelting (1980a, 1980b)?**
- **¿Coincide esta dificultad con la de comparación de razones en problemas del mismo nivel de razonamiento?**
- **¿Qué estrategias usan los estudiantes en diferentes cursos y ambos países para comparar razones y probabilidades? ¿Hay estrategias incorrectas específicas de la comparación de probabilidades?**



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

Elena y Juan preparan limonada. Elena mezcla 2 vasos de zumo de limón con 3 vasos de agua. Juan mezcla 1 vaso de zumo de limón con 3 vasos de agua. Todos los vasos contienen la misma cantidad de líquido. Observa el dibujo.

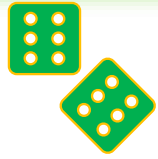
Elena		Juan	
Zumo de limón	Agua	Zumo de limón	Agua
			

¿Cuál de las dos limonadas sabe más a limón?

- La de Elena. (Opción correcta)
- La de Juan.
- Las dos igual.
- No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Composición	Nivel de razonamiento proporcional	Nivel de dificultad
(2,3) vs (1,3)	IA. Intuitivo inferior	1



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

Ítem 7. En la caja A hay 3 fichas negras y 2 fichas blancas. En la caja B hay 5 fichas negras y 2 fichas blancas. Observa el dibujo.

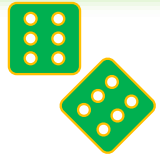


Se agitan las cajas y se saca una ficha con los ojos cerrados ¿En cuál es más probable sacar una ficha negra? Señala la respuesta correcta:

- Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja A.
- Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja B. (Opción correcta)
- En ambas cajas hay igual probabilidad de sacar una ficha negra.
- No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Composición	Nivel de razonamiento proporcional	Nivel de dificultad
(3,2) vs (5,2)	IA. Intuitivo inferior	1



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

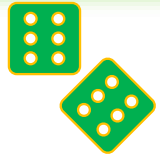
Categorías de análisis de estrategias

Estrategias aditivas

Comparar totales en cada razón.
Comparar los primeros términos “a” de las razones.
Comparar los segundos términos “b” de las razones.
Comparar la diferencia entre los términos de cada razón.

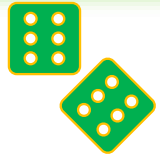
Estrategias multiplicativas

Relación de equivalencia a la unidad.
Relación de equivalencia entre razones.
Correspondencia entre términos de las razones.
Proporcionalidad.



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

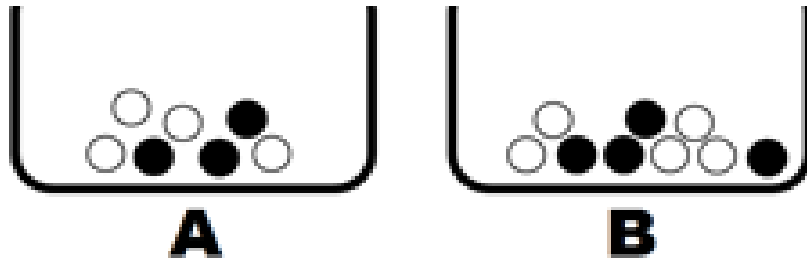
En concordancia con trabajos previos como el de Pérez Echeverría et al. (1986), **las dificultades** de resolución de los ítems de comparación de razones aparecen o van aumentando al **requerirse estrategias multiplicativas**, pues muchos estudiantes recurren otra vez a estrategias aditivas, que pueden encubrir el sesgo del número natural (Gómez y Dartnel, 2019; González-Forte et al., 2022).



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

Estrategias erróneas más frecuentes

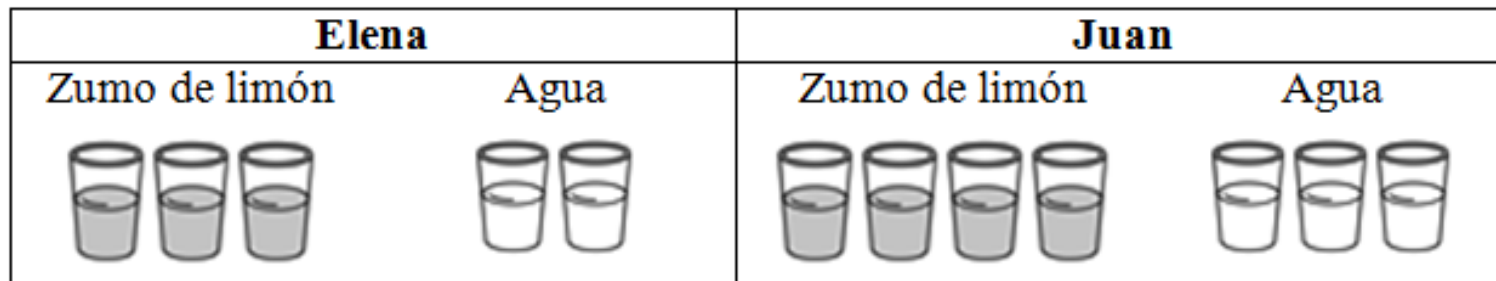
- Comparación de un solo término en los cocientes.



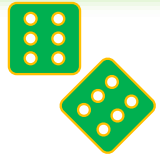
$$\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$$

IIIB. Operacional formal superior	4
-----------------------------------	---

- Comparación de casos posibles o diferencias.



$$\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$$



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

Sesgos de razonamiento

Sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988)

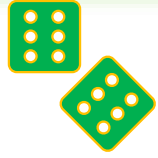
E614: «En la urna B, obviamente hay más fichas negras; pero hay posibilidad de negra en ambas urnas, por lo que la probabilidad es la misma»

Enfoque del resultado (Konold, 1989)

E10: «Puede haber resultados diferentes porque se elige con los ojos cerrados. Aunque la urna con mayor número sea más probable, esto no influye en los resultados».

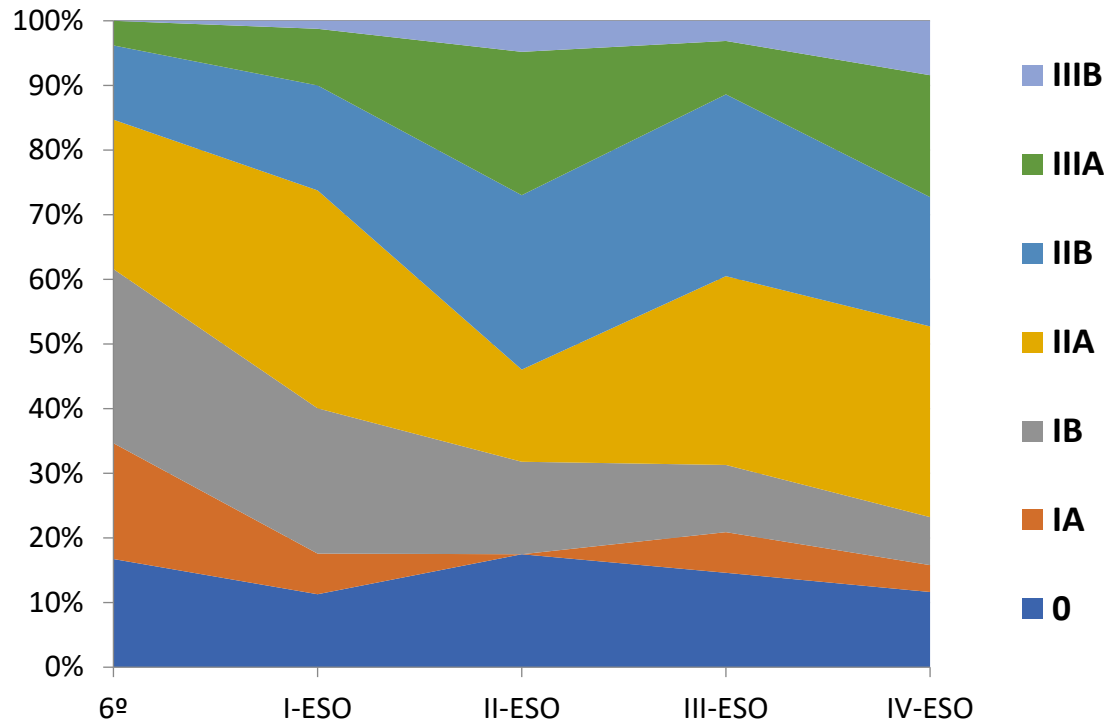
Consideraciones físicas

E103: «Porque cuando agitamos la urna, la bola blanca subirá a la parte superior de la urna A, pero aún existe la oportunidad de que salga una bola negra. Cuando agitamos la urna B, las bolas negras subirán a la parte superior, pero sigue existiendo la posibilidad de que salga la bola blanca».

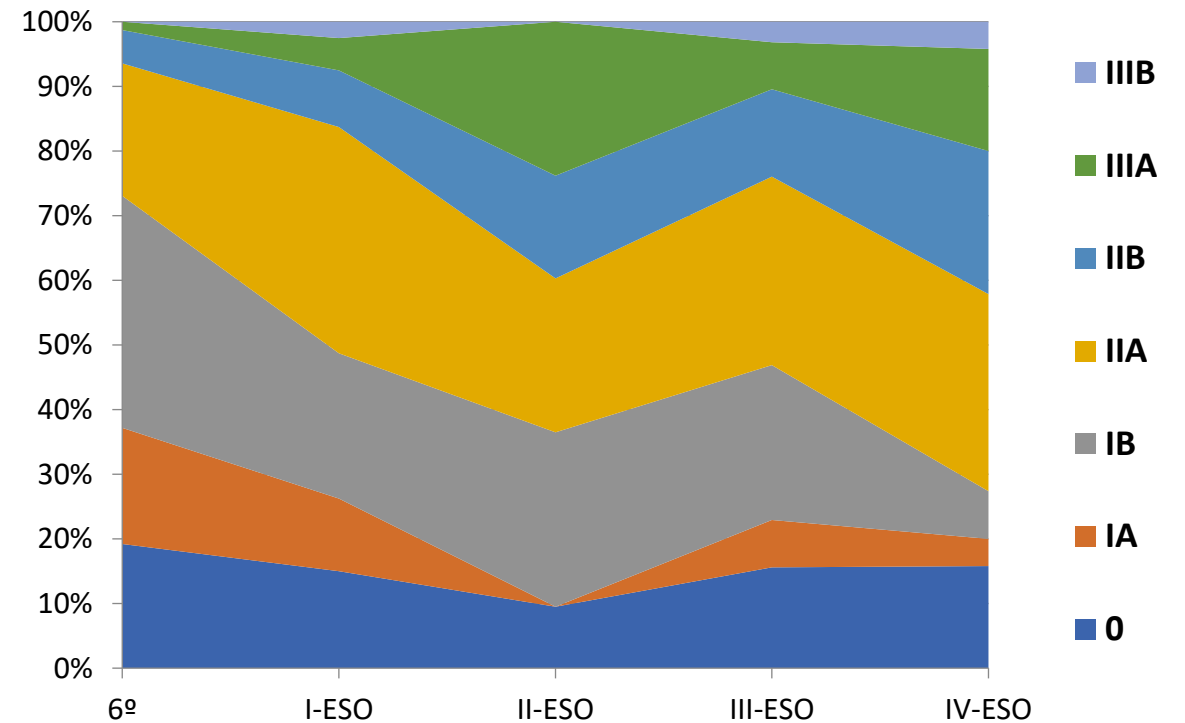


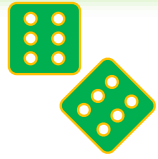
Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

Nivel de Razonamiento PROPORCIONAL- España



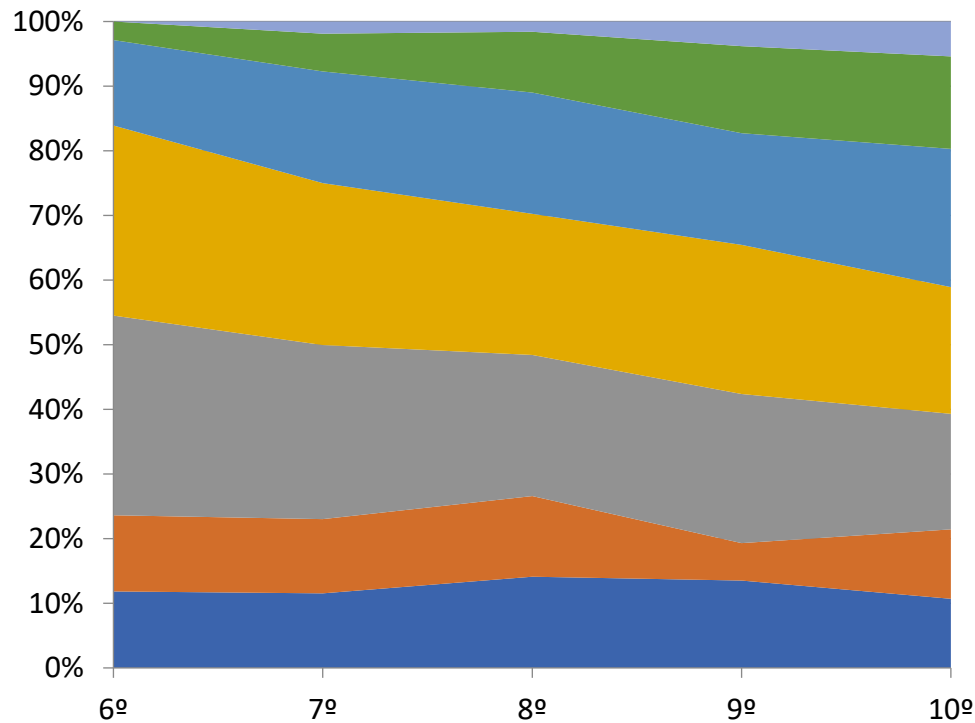
Nivel de Razonamiento PROBABILÍSTICO- España



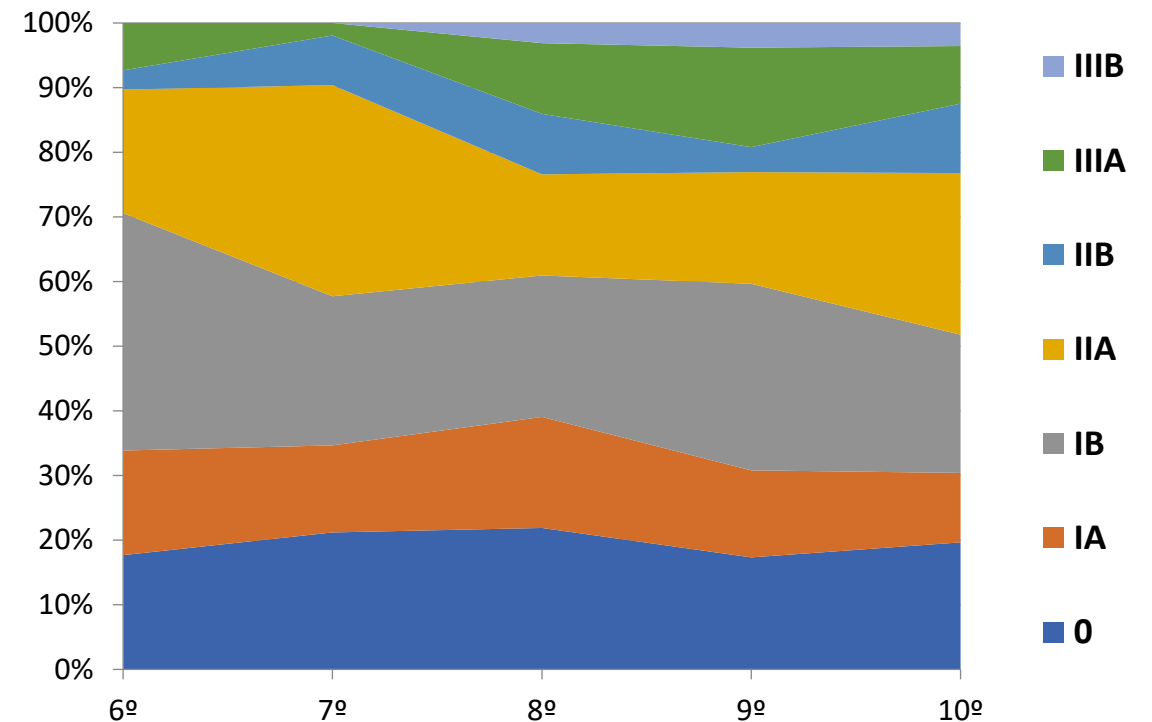


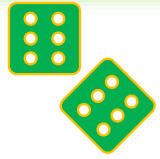
Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

Nivel de Razonamiento PROPORCIONAL- Costa Rica



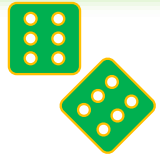
Nivel de Razonamiento PROBABILÍSTICO-Costa Rica





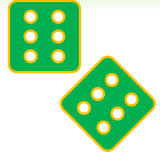
Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

Las tareas clasificadas en los niveles IA y IB (nivel intuitivo inferior y medio en la clasificación de Noelting, 1980a, 1980b) resultaron muy fáciles para los estudiantes de la muestra, que las resolvieron correctamente en un alto porcentaje (**al menos el 80% en cualquier país**) en todos los grados, para ambos tipos de ítems.



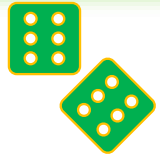
Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

- La dificultad aumenta en los problemas de nivel IIA (equivalencia con la clase unitaria), que es ligeramente superior en la comparación de los ítems de probabilidad.
- El éxito en los problemas de nivel IIB (clase de equivalencia de cualquier razón) aumenta progresivamente por curso, con más fuerza en la comparación de razones y en España (respecto a Costa Rica).
- Pocos estudiantes de ambos países, utilizan estrategias multiplicativas. Esta es la razón por la que no resolvieron correctamente los problemas más difíciles.



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

Se observa que pocos estudiantes, incluso en el 10º curso (Costa Rica) o 4º de la ESO (España), resuelven correctamente la totalidad de problemas; específicamente, son muy complicados los ítems correspondientes a los niveles de razonamiento proporcional IIIA y IIIB, por lo que, en la muestra del Estudio 2, la edad esperada en que se alcanza dicho razonamiento es mayor que la supuesta por Noelting (1980a, 1980b).



Razonamiento proporcional y algebraico y razonamiento probabilístico

Se encontró una correlación entre el razonamiento proporcional y el probabilístico, que fue mayor que la existente entre cualquiera de estas variables y el curso escolar.

Igualmente, se observa una **mayor dificultad de los problemas de probabilidad que en los de comparación de razones en los niveles superiores de razonamiento**, coincidiendo con los hallazgos de Pérez-Echeverría et al. (1986) y los resultados comunicados por Supply et al. (2020) con estudiantes alemanes en las pruebas PISA.



Reflexiones finales

Los diferentes resultados mostrados complementan investigaciones anteriores:

- ✓ **No se encontró ningún estudio que analizara de forma sistemática y conjunta la comparación de probabilidades y razones en el mismo rango de edad que el considerado en el estudio presentado.**
- ✓ En Costa Rica no se disponía de datos relacionados, y las investigaciones llevadas a cabo en España no incluían las mismas edades; además, utilizaban muestras de tamaño moderado.
- ✓ Pocos estudiantes (ambos países) utilizaron estrategias multiplicativas, que interpretamos como la razón más influyente por la que no resolvieron correctamente los problemas más difíciles. El docente requiere atender a esta necesidad desde el desarrollo del razonamiento proporcional y algebraico en relación al razonamiento probabilístico de los estudiantes.



Reflexiones finales

- ✓ **Es necesario analizar la actividad algebraica desde cualquier área de las matemáticas.**
- ✓ El uso de la tabla estadística acompaña a la actividad de recogida, organización y análisis de la información estadística de manera natural. Por tanto, del análisis de su tipología encontramos diferentes niveles de algebrización que pueden explicar las dificultades de los estudiantes en su uso.
- ✓ La estadística forma parte de la educación deseable para un ciudadano, en cuanto al desarrollo de su razonamiento crítico, lo que redundaría en el desarrollo de la **capacidad en lectura e interpretación de información** (tablas y gráficos estadísticos, resúmenes e inferencias en base a datos) que con frecuencia aparecen en los medios de comunicación.
- ✓ **Se requiere una mirada profesional a la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos en el aula desde los posibles sesgos en situaciones bajo incertidumbre.**

La mirada profesional al razonamiento proporcional y algebraico en la práctica estadística

María Magdalena Gea Serrano (mmgea@ugr.es)
Luis A. Hernández Solís (lhernandez@uned.ac.cr)

18 de mayo de 2024

Proyecto PID2022-139748NB-I00 financiado por:



MINISTERIO
DE CIENCIA, INNOVACIÓN
Y UNIVERSIDADES



Cofinanciado por
la Unión Europea



AGENCIA
ESTATAL DE
INVESTIGACIÓN



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

UNED
UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA
Costa Rica