

MEDIATRIZ, CIRCUNCENTRO Y DIAGRAMA DE VORONOI EN EDUCACIÓN PRIMARIA. EXPERIMENTO CON M&M'S

Laura Morera¹ – Marc Guinjoan² – Carla Alacañiz³
laura@explorium.cat – marc@explorium.cat – info@explorium.cat
eXplorium¹²³ – Universitat Autònoma de Barcelona¹²

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Primario

Palabras clave: Mediatriz, Diagrama de Voronoi, material manipulativo, actividades ricas

Resumen

En este estudio se ha diseñado un taller manipulativo para alumnos de todos los cursos de primaria que se centra en los conceptos de mediatriz, circuncentro y diagramas de Voronoi. A través de visualizar el concepto de mediatriz entendido como la recta de puntos que están a igual distancia de dos puntos dados, se amplía su conceptualización al ver que están a igual distancia de tres puntos y el paso a la generalización consiste en realizar los diagramas de Voronoi.

Se han recogido datos de las distintas fases del taller en las diferentes etapas educativas y se muestran resultados de los distintos niveles de intervenciones de los alumnos durante la realización del taller.

Introducción

En un entorno de resolución de problemas, con la didáctica adecuada, el alumnado puede aprender conceptos matemáticos de forma creativa, innovadora y divertida. Queremos que los conocimientos que adquiere el alumnado sirvan para afrontar los retos que tengan por delante. En el presente documento mostramos una experiencia didáctica aplicada con éxito en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en jóvenes de educación primaria, desde primero hasta cuarto. Más concretamente, el objetivo principal de esta experiencia didáctica aquí presentada es trabajar conceptos geométricos específicos de un nivel, a priori, superior al de la edad del alumnado que participa en la sesión.

Hay muchas formas de transmitir conceptos. Uno de esos modos es la pizarra, la tiza y los ejercicios en la libreta, pero en eXplorium defendemos otros modos para permitir que los

alumnos aprendan, ya sea usando la tecnología (*tablets*, ordenadores...) u otros recursos menos sofisticados (cartón, plástico, material reciclado...). Lo que sí tenemos claro es que para que los jóvenes construyan el conocimiento tienen que experimentar, manipular y hablar sobre lo que van descubriendo guiados por el andamiaje del profesor (Sherin, 2002).

Experiencia didáctica

El objetivo principal de la actividad extraescolar que presentamos en esta comunicación es que los alumnos de primaria (desde primero hasta cuarto) trabajen sobre los conceptos matemáticos de la mediatriz, el circuncentro y los diagramas de Voronoi mediante un proceso práctico y gradual basado en la construcción de puntos equidistantes a otros puntos dados.

Esta experiencia didáctica se ha realizado en 15 grupos de aproximadamente 10 alumnos de ciencia recreativa en horario extraescolar. Los alumnos cursaban entre 1º y 4º de educación primaria agrupados en dos grupos de edad (los alumnos de 1º y 2º van juntos y los alumnos de 3º y 4º también).

El concepto de mediatriz se puede definir de dos formas: 1) la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento que lo corta en el punto medio y 2) la mediatriz de dos puntos es el lugar geométrico cuyos puntos son equidistantes a los dos puntos dados. Matemáticamente, vemos que estas definiciones son equivalentes; en cambio, didácticamente, la segunda facilita la construcción de los conceptos posteriores de circuncentro y diagramas de Voronoi. También veremos que la experimentación realizada con los alumnos les hace descubrir esta propiedad de equidistancia. Así para esta comunicación tomaremos como definiciones:

La *mediatriz de dos puntos* es el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la misma distancia que los dos puntos dados.

El *circuncentro de tres puntos* es el punto equidistante a tres puntos dados.

El *diagrama de Voronoi de diversos puntos* es la construcción geométrica originada a partir de la creación de las mediatrices entre distintos puntos que nos hace un mapa de los puntos equidistantes a los diferentes puntos que tienen alrededor.

Una vez presentadas las definiciones a las que nos referimos en esta comunicación, mostramos la experiencia de clase acompañada de diferentes evidencias de aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje.

El taller consta de cuatro fases que, de forma ordenada, se van sucediendo guiadas por el profesor al incorporar diferentes retos experimentales.

Primera fase: exploración.

A cada pareja de alumnos se le reparte un plato de plástico, una jarra de agua y una bolsa de caramelos (M&M's®). El primer reto que se les propone es que hagan hipótesis de lo que creen que sucederá cuando introduzcan el caramelo en el plato lleno de agua (con 3 mm de altura aproximadamente).

Algunos alumnos se centran en las propiedades físicas: hacen hipótesis sobre su flotabilidad. La gran mayoría dicen que no puede flotar por el peso, y otros comentan que es un material que no podrá flotar, pero no concretan qué propiedades debería tener. Otros se centran más en los aspectos químicos: hacen hipótesis sobre la disolución, o no, del colorante y del chocolate en el agua. Algunos apuntan que el agua debería estar caliente, otros comentan que para que se derritiera el chocolate, sería mejor que el líquido fuera leche. También hay quienes se decantan por hipótesis más geométricas e intentan predecir la forma del colorante cuando este se deslice por la capa de agua. Algunos ven claramente que se hará un círculo alrededor, pero otros visualizan una franja alargada en una dirección concreta, pero en ambos sentidos.

Una vez han hecho sus hipótesis y las han puesto en común, realizan el experimento, observan qué sucede (Figura 1) y verifican las hipótesis ciertas y refutan las que eran falsas.



Figura 1. Círculo creado alrededor de un punto.

Para esta comunicación a partir de ahora nos centraremos en las oportunidades de aprendizaje creadas en torno a los conceptos matemáticos y dejaremos de lado los transversales.

Segunda fase: Construyendo la mediatriz

El siguiente reto es pensar qué sucederá si en un plato con agua, dejamos dos caramelos de colores distintos a la vez.

Después de haber visto lo que sucede cuando se deja uno, los alumnos suponen que se generan dos círculos, pero predicen dos posibles resultados en el punto de encuentro entre ambas áreas. Por un lado, unos alumnos defienden la hipótesis de que los colores de los colorantes se mezclarán y se generará una franja de otro color (ellos ponen el ejemplo de que amarillo y azul, se transformará en verde) y, por otro lado, otros defienden que los colores chocarán y ya no avanzarán más. A lo largo de la discusión guiada por el profesor, algunos alumnos nombraban el concepto de frontera y al preguntar sobre la forma de esta frontera, varios veían que sería una frontera recta mientras que otros no conseguían imaginar qué forma tendría. En la Figura X, acompañada de la transcripción, podemos ver como un alumno había dibujado, sobre la pizarra, correctamente lo que sucedería.

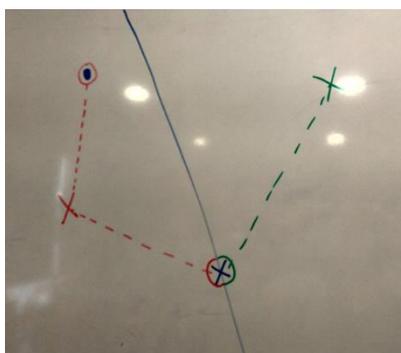


Figura 2. Esquema de la situación de la mediatriz de dos puntos

P: ¿Cómo creéis que será esta frontera que decís que se formará?

A: ¡Recta!

P: Si por ejemplo dibujo un plato y en estas cruces (roja y verde) es donde pondremos los caramelos, ¿dónde estará esta recta?

A: Aquí (sale a dibujar-la en azul encima del dibujo del profesor).

P: ¿Y este punto (el círculo azul) de dónde está más cerca?

A: De este punto (el rojo), será de este color (rojo).

P: ¿Y este punto (la cruz azul), de cuál estará más cerca?

A: ¡Este está igual de cerca de los dos!

P: Señálame otro punto que esté a igual distancia de los dos.

A: ¡Cualquiera de éstos! (Señalando la recta)

Nótese que lo que no tienen asimiladas son las propiedades teóricas y por ejemplo, la línea recta que dibuja el alumno, está hecha a ojo y no coincide exactamente con la construcción

de la mediatriz, pero podemos observar en la transcripción que sí tienen claro que los puntos de la línea recta estarán a igual distancia de los dos caramelos iniciales.

Después de la discusión, las diferentes parejas realizan el experimento y pueden observar qué sucede. En la mayoría de los casos, se pueden observar las mediatrices que teóricamente se esperan (Figura 3a), pero como en todo experimento, surgen algunos problemas físicos: cuando no toda la superficie del plato está cubierta con agua y queda una isla en medio como se puede observar en la Figura 3b o, cuando las marcas de los caramelos no son iguales y el colorante no se derrite a la misma velocidad, cosa que hace que la frontera recta no quede donde sería la mediatriz teórica, sino que queda paralela a ella pero más cerca de uno de los caramelos.



a) Mediatriz de dos puntos



b) Plato con agua insuficiente

Figura 3. Experimentación con dos caramelos

Queremos hacer notar que están descubriendo el concepto de mediatriz por ellos mismos, pero antes de dar paso a la siguiente fase, es conveniente que el profesor institucionalice el nombre de esta frontera recta con la que han estado tratando para que los alumnos la puedan nombrar por su nombre y sepan que es la mediatriz.

Otro reto para ir más allá que en algunos grupos surgió, para seguir trabajando propiedades sobre la mediatriz, es que se puede proponer que dada una mediatriz, los alumnos tengan que pensar dónde situar los caramelos. Es muy interesante, se dan cuenta de que hay muchas soluciones y lo que se tiene que cumplir es que los dos puntos sean simétricos respecto a la mediatriz. Así también hay conexiones con el concepto de simetría.

Tercera fase: Siempre hay circuncentro?

En esta tercera fase, decidimos cambiar la naturaleza del reto inicial, y en lugar de preguntar de forma abierta qué creen que sucederá, ahora con tres caramelos, les propusimos que los distribuyeran de forma que consiguieran tres zonas iguales.

En los grupos que los platos de plástico eran bastante cuadrados (Figura 4a), los alumnos, mediante sus propuestas, intentaban crear tres franjas igual de anchas. En cambio, en los grupos donde los platos eran circulares, intentaban conseguir tres sectores circulares iguales (Figura 4b). En otras ocasiones, no tenían claro lo que sucedería y proponían distribuciones como la de la Figura 4c.



a) Distribución en plato cuadrado b) Distribución en plato circular c) Distribución errónea para crear tres zonas iguales

Figura 4. Experimentación con 3 caramelos

A partir de estas situaciones se creó un tema de discusión interesante: la creación del circuncentro. En diversas puestas en común se comentó si había algún punto que estuviera a la misma distancia de los tres caramelos, y en los casos donde se había creado circuncentro los alumnos respondían rápidamente que sí. Incluso también era interesante referirse a aquellas distribuciones que no cumplían con el reto inicial, como la de la Figura 4c, ya que les sirvió para generalizar la propiedad de ¿cuándo tres puntos tendrán circuncentro? Y es que en todos los grupos llegaron a la conclusión que tres puntos tendrían circuncentro si no estaban alineados, es decir, si formaban un triángulo.

De hecho, algunos de los errores matemáticos como el de la Figura 4c, tienen que ver con las propiedades químicas y físicas que habían experimentado; por ejemplo, como había colores o marcas que teñían más o menos, intentaban contrarrestar esos efectos con las posiciones como se puede observar en el siguiente extracto de la creación de la Figura 4c:

M: ¿Por qué los habéis (los caramelos) colocado así? (Antes de que el colorante se diluya)

A1: Porque el verde será más pequeño.

A2: No, todos tendrán el mismo espacio.

M: ¿Qué espacio tendrá exactamente el amarillo? ¿Y el verde? ¿Y el rojo?

(Los alumnos creen que se formará como un triángulo alrededor de cada caramelo)

M: ¿Podrá el verde llegar aquí? (Zona donde no hay ningún caramelo, lado izquierdo)

A1: No, porque el amarillo y el rojo chocarán antes y no podrá pasar.

A2: Sí, porque el verde pasará antes que choquen.

M: Entonces, ¿creéis que se formará una línea verde entre el amarillo y el rojo?

A2: Sí, porque aunque está más lejos, tiene más velocidad que los otros y podrá pasar antes de que los otros choquen.

Cuarta fase: ¿Cómo generalizamos? Con Diagramas de Voronoi.

En este momento, ya tienen la teoría interiorizada a partir de su propia experimentación; ya han visualizado una mediatriz y un circuncentro (ya sea a través de su experimento o el de un compañero). Es el momento idóneo para predecir, hacer hipótesis sobre lo que pasará, y generalizar para construir el caso de n puntos, que era el objetivo de la sesión.

Esta vez se plantean dos retos. En el primero, se trata de hacer hipótesis sobre papel de lo que creen que sucederá con diferentes distribuciones de caramelos. Dada una imagen como la de la Figura 5a, sobre la misma figura los alumnos hacen sus hipótesis del diagrama de Voronoi que se formará. En la Figura 5b podemos apreciar la creación de un grupo de alumnos del diagrama de Voronoi asociado a una distribución de puntos concreta.



a) Planteamiento del reto para hacer hipótesis de cómo sería el diagrama de Voronoi asociado a esta distribución de puntos



b) Solución propuesta por los alumnos

Figura 5. Primer reto del caso general con más de 3 puntos

Podemos observar cómo tienen asimilados algunos de los conceptos trabajados y cómo ven que la frontera entre dos puntos será recta.

El segundo reto propuesto en esta fase consiste en pensar dónde deberían estar los caramelos inicialmente, cuando la información que tenemos es el diagrama de Voronoi terminado como se muestra en la Figura 6a.

En ambos casos, los alumnos realizaban los experimentos para comprobar sus hipótesis como se muestra en la Figura 6b, donde sitúan cada caramelo en el lugar correspondiente y miran

a ver si lo que sucede es lo que ellos han predicho. En este caso así es, la hipótesis queda corroborada. Esta es la parte culminante del taller entero.



a) Planteamiento del reto para hacer hipótesis sobre la distribución de los puntos que generarían este diagrama de Voronoi



b) Solución propuesta por los alumnos

Figura 6. Segundo reto del caso general con más de 3 puntos

Finalmente, los alumnos también conservan las ganas de realizar experimentaciones libres y crean sus propias distribuciones de puntos para conseguir diagramas de Voronoi complicados, que ya conjeturan que no serían tan fáciles de predecir (Figura 7).



Figura 7. Ejemplos variados de diagramas de Voronoi creados por alumnos.

Conclusiones

El recurso que presentamos en esta comunicación permite que el alumnado de primaria trabaje el concepto de mediatriz, de circuncentro y de diagrama de Voronoi de forma satisfactoria a través de un taller donde la manipulación y la experimentación son claves.

Las matemáticas no están separadas del mundo que nos rodea, forman parte de él. Es por eso que la experiencia tiene parte teórica y experimental mediante experiencias con objetos sencillos. El alumnado puede observar un concepto teórico y abstracto de forma práctica.

Al hacer experimentos, otras componentes como la creación de hipótesis, el análisis de resultados o el pensamiento crítico para conseguir un objetivo salen a la luz trabajan el pensamiento matemático de forma competencial.

Además, con este taller practican el trabajo en equipo, si hay más de un alumno por plato, y las discusiones y análisis entre compañeros que se derivan de la experiencia educativa. En eXplorium, creemos que estas ideas son fundamentales para que los alumnos vivan un proceso de aprendizaje significativo.

En definitiva, la experiencia detallada en este comunicado no solamente aporta conocimiento matemático, sino también saberes de muchos otros ámbitos que están relacionados con las matemáticas, aunque en las aulas no pueda parecer así.

Agradecimientos

Este trabajo se enmarca en el contexto del proyecto EDU2015-65378-P “Construcción de conocimiento matemático escolar: discurso del profesor y actividad de enseñanza”.

Referencias bibliográficas

Aubanell Pou, A. (2006). *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària*. <http://www.xtec.cat/~aubanel/> Consultado 22/05/2017.

Castelnuovo, E. y Barra, M. (1976). *Matematica nella realtà*. Torino: Editore Boringhieri.

Sherin, M.G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 205-233.