

ADIVINANZAS Y BALANZAS. UNA FORMA DE ENTENDER LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Ana-Belén Cabello Pardos
anabelen.cabello@educa.madrid.org
IES Joaquín Araújo (Madrid) España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Nivel educativo medio o secundario (12 a 15 años)

Palabras clave: Modelo didáctico, situación didáctica, álgebra, ecuación de primer grado

Resumen

A partir del análisis de la presentación de las ecuaciones de primer grado en los manuales escolares, se muestra una experiencia realizada en aula con alumnos de séptimo grado (1º de ESO), en la que se desarrolla la unidad didáctica de Introducción al Álgebra mediante el juego de las adivinanzas, profundizando posteriormente con el modelo analógico de la balanza. Se ha trabajado tanto con números enteros positivos como negativos. Finalmente se comentan los resultados de la aplicación de estos modelos y las incidencias surgidas en el aula durante la realización de la experiencia.

Introducción

Los alumnos de 1º de ESO (séptimo grado), de 12 y 13 años, se encuentran en el momento de transición de la etapa de las operaciones concretas a la de las operaciones formales (Piaget, 1983). Esto, entre otros factores, hace que muestren dificultad en la comprensión de la unidad didáctica de Álgebra, ya que es la primera ocasión en la que se encuentran ante procesos de abstracción. Numerosos autores han constatado esta dificultad presente en nuestras aulas y han analizado dichos procesos proponiendo modelos didácticos o líneas de investigación (Castro, 2012; Filloy, Puig y Rojano, 2008; Hurtado, 2013; Kieran, 2006; Palarea, 1998; Rojano, 2010; Socas, 2007; Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1989).

Marco Teórico

La referencia más antigua de este modelo se ha encontrado en el manual “De la tabla de multiplicar a la integral. Unas matemáticas para todos” (Colerus, 1947). En el capítulo XIII, presenta las ecuaciones de primer grado con una incógnita proponiendo una adivinanza: “Sin

entrar aún a teorizar, planteémonos una adivinanza...” (Colerus, 1947). Unas páginas más adelante propone la idea de la balanza: *“Aunque no sea muy matemático, nos valdremos de una imagen: supondremos que la ecuación es una balanza...”* (Colerus, 1947).

El modelo analógico de la balanza ha sido estudiado por otros autores (Palarea, 1998; Rojano, 2010; Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1989). Hay también otras referencias sobre el modelo explícito diagramático de las adivinanzas y otros modelos tales como máquinas, gráficas, tableros de fichas, etc. (Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1989).

La puesta en práctica de este modelo se ha basado en la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).



Ilustración 3. Guy Brousseau

Esta Teoría fue planteada por Guy Brousseau¹¹ (Ilustración 3), primera medalla Félix Klein en 2003 otorgada por la Comisión Internacional de Instrucción Matemática.

Según la misma, el alumno aprende adaptándose a un medio (Sierra, Bosch y Gascón, 2012) en el que se encuentra con contradicciones, dificultades y desequilibrios. El profesor elegirá así, problemas que provoquen en el alumno las adaptaciones deseadas.

El profesor no interviene, es decir, no le ofrece los conocimientos que quiere ver aparecer (Ilustración 4, Ilustración 5).

¹¹ Imagen tomada de www.ardm.eu

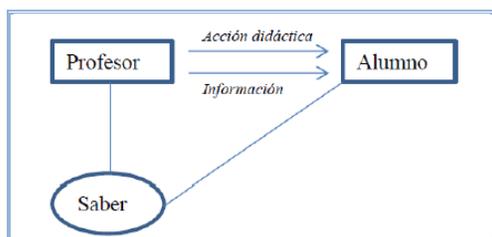


Ilustración 4. Esquema incompleto de modelización de la enseñanza (Brousseau, 2007)

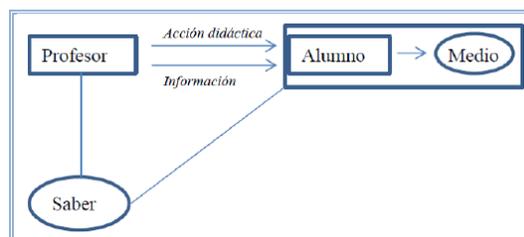


Ilustración 5. Esquema adecuado de modelización de la enseñanza (Brousseau, 2007)

En esta Teoría hay dos fases clave: la devolución y la institucionalización.

El profesor plantea al alumno una situación adidáctica que está a su alcance. Esa situación involucra al profesor en un juego con el sistema de interacciones del alumno con su medio. Ese juego más amplio es la situación didáctica. Es decir, es la situación que tiene intrínsecamente la intención de enseñar, o de que el alumno aprenda algo.

Mediante la “devolución”, el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de dicha transferencia.

La situación termina con un momento final de revisión y ordenación de lo que se ha hecho. Es la fase de “institucionalización”. Se trata de otorgar el carácter de “saber” a determinados “conocimientos”, ya que los conocimientos quedarían contextualizados y reducidos al recuerdo si no hubiera institucionalización en saberes.

Metodología

La metodología empleada responde al paradigma de investigación en acción (Elliott, 2010; Stenhouse, 1998).

Se plantearon dos objetivos (Ilustración 6):

Objetivo 1. Analizar la presentación de las ecuaciones de primer grado en los manuales escolares.

Objetivo 2. Diseñar y experimentar una situación que provoque en el alumno un aprendizaje de las ecuaciones de primer grado por adaptación al medio.

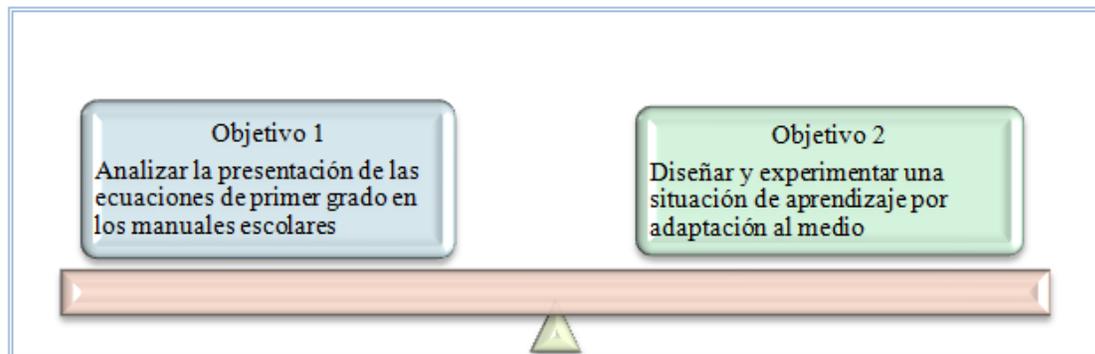


Ilustración 6. Objetivos planteados en la investigación

La investigación se ha desarrollado durante el curso 2015/2016 en las siguientes fases (Ilustración 7):

- *Fase teórica.*
Se realizó un análisis de la presentación de las ecuaciones de primer grado en una muestra incidental (Pereda, 1987) de manuales escolares. También se analizó el software existente sobre dichas ecuaciones.
Se estudió el marco teórico y se realizó una revisión de la literatura existente.
Se diseñó la situación de aprendizaje de ecuaciones de primer grado con el modelo de adivinanzas y balanzas.
- *Fase experimental.*
Se aplicó en el entorno real del aula el modelo diseñado. Se utilizó, de nuevo, una muestra incidental (Pereda, 1987) de 30 alumnos (18 chicas y 12 chicos) de 1º de ESO de un Instituto público de Madrid, durante el curso 2015/16, durante las 8 sesiones destinadas a esta unidad didáctica.
- *Fase de evaluación.*
Esta fase incluye el análisis de los resultados, la evaluación del modelo, así como la redacción y difusión de la experiencia.

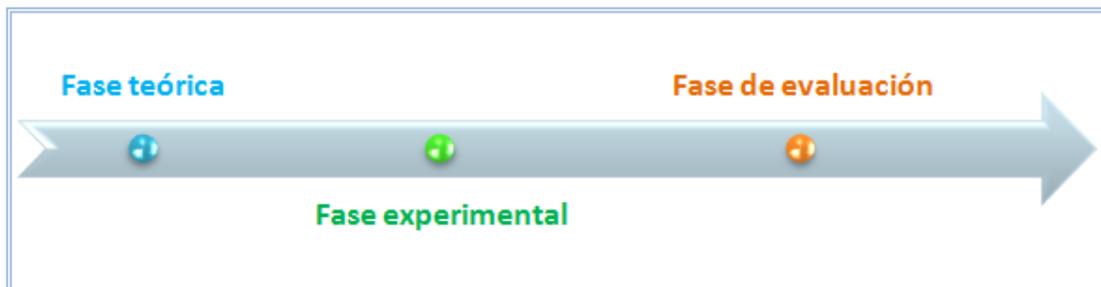


Ilustración 7. Fases de la investigación

Resultados

Se presentan los resultados obtenidos en función de los objetivos planteados.

Primer resultado. Se ha analizado la presentación de las ecuaciones de primer grado en una muestra de manuales escolares (Bujanda y Mansilla, 2002; Ingelmo y Zárata, 2015; Machín y Rey, 2015; VVAA, 2010).

En ellos se introduce el lenguaje algebraico como generalización del lenguaje ordinario o como generalización de la aritmética y se introducen las expresiones algebraicas.

En (Bujanda y Mansilla, 2002), a continuación de esta presentación se utiliza el modelo analógico de la balanza para explicar el signo igual y las ecuaciones equivalentes con la idea de equilibrio.

Un *software* existente para la resolución de ecuaciones de primer grado, disponible en Internet en español, está en la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales (*National Library of Virtual Manipulatives*).

Es una herramienta interactiva que facilita al profesor el trabajo, liberándolo de la necesidad de diseñar una balanza con cajas y pesas para cada ecuación. Al alumno le posibilita, además, el aprendizaje autónomo (Ilustración 8).

Este proyecto educativo de la Universidad de Utah empezó en 1999 y ha sido financiado por la Fundación Nacional para la Ciencia (*National Science Foundation*), como se puede ver en su sitio web (<http://nlvm.usu.edu/es/nav/siteinfo.html>).

Permite trabajar solo con números naturales y también con enteros negativos.

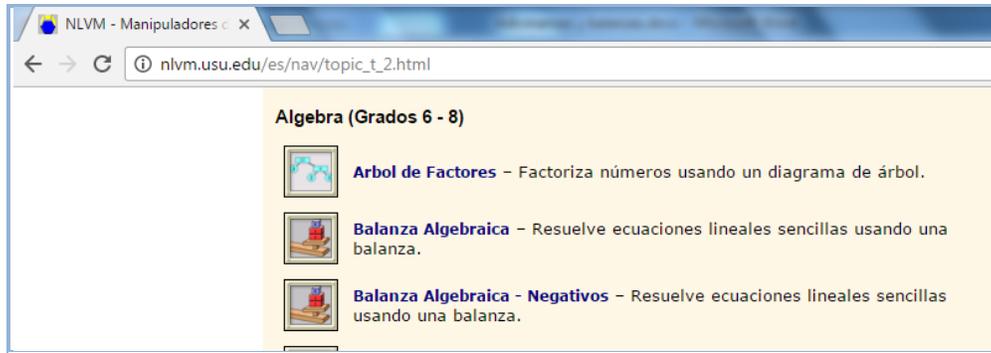


Ilustración 8. Balanza Algebraica de la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales

El Proyecto Gauss (Ilustración 9) desarrollado por el Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF), permite trabajar con números enteros positivos y negativos (<http://recursostic.educacion.es/gauss/proc/>).

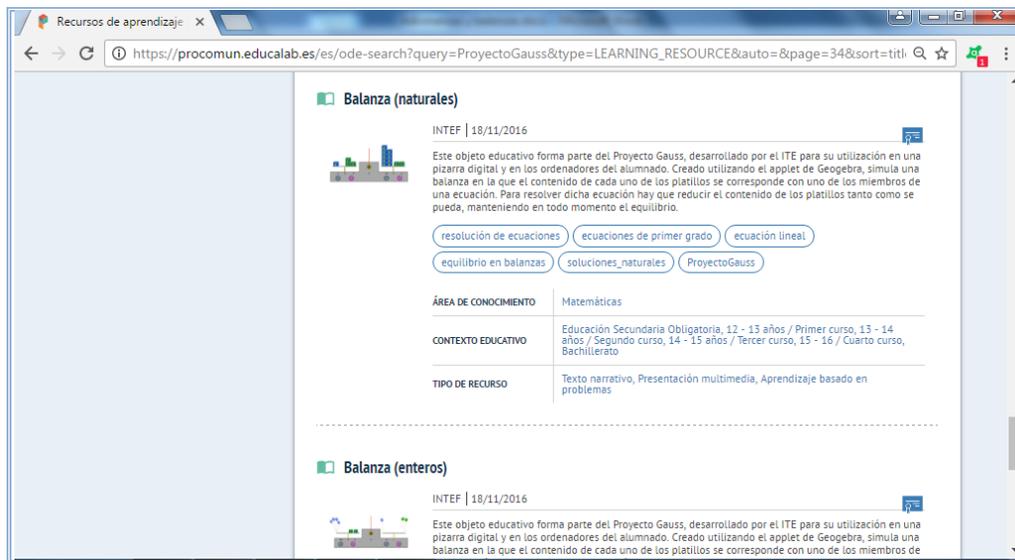


Ilustración 9. Balanza del Proyecto Gauss

Ambos tienen sus ventajas e inconvenientes.

- El primero es más amigable, pero funciona con Java.
- El segundo trabaja en html pero es menos amigable.

En esta experiencia didáctica se ha trabajado con la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales.

Segundo resultado. Se ha diseñado y experimentado una situación de aprendizaje de las ecuaciones de primer grado por adaptación al medio (Sierra, Bosch y Gascón, 2012).

Se muestran extractos de las sesiones.

Situación 1. Adivinanzas

Se plantean ecuaciones de primer grado sencillas, como en el manual escolar, desde $x + b = d$, hasta $ax + b = cx + d$. De esta manera, el alumno constata la insuficiencia de esta técnica y se pasa al modelo de la balanza (Ilustración 10).

- A un número le sumamos 6 y nos da 8. ¿Cuál es?
 $\square + 6 = 8$
- A un número le restamos 3 y nos da -5. ¿Cuál es?
 $\square - 3 = -5$
- Un número lo multiplicamos por 4 y nos da 12. ¿Cuál es?
 $4 \cdot \square = 12$
- Un número lo dividimos entre 4 y nos da 3. ¿Cuál es?
 $\square / 4 = 3$
- Averigua el número: $4 \cdot \square + 4 = 3 \cdot \square + 7$

Ilustración 10. Adivinanza

Situación 2. Balanzas (con números enteros positivos y negativos)

Se plantean ecuaciones del tipo $ax + b = cx + d$. Inicialmente con coeficientes números enteros positivos y en segundo lugar con números enteros positivos y negativos. Se trata de ver “cuántas cajas de 1” hay en una “caja marcada con la x”. Los globos son contrapesos, que simbolizan las cantidades negativas.

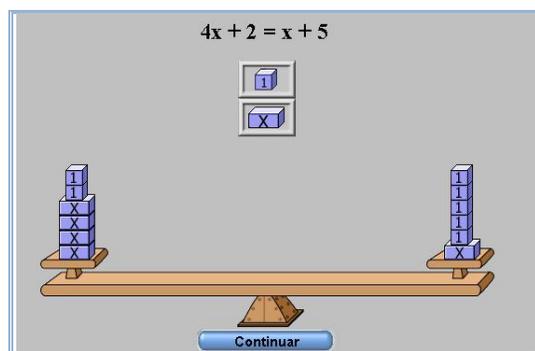


Ilustración 11. Balanza con números enteros positivos

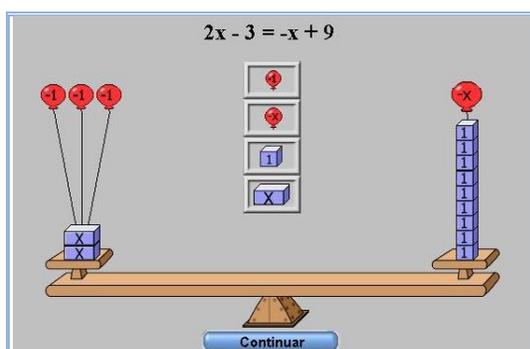


Ilustración 12. Balanza con números enteros negativos

Discusión de los resultados y conclusiones

En cuanto a los resultados del primer objetivo, sería deseable una mayor conexión entre las líneas de investigación en Didáctica del Álgebra y los planteamientos de algunos manuales escolares. Esto se puede conseguir utilizando las herramientas informáticas que permiten modelizar la enseñanza.

En lo referente a los resultados del segundo objetivo, cabe comentar tanto el diseño como la experimentación de las situaciones didácticas.

Diseño de las situaciones.

Las situaciones diseñadas cumplen las características de las situaciones de aprendizaje por adaptación al medio (Sierra, Bosch y Gascón, 2012).

Se plantea un tipo de problemas: En la primera situación, se trata de adivinar un número; en la segunda situación, de adivinar cuántas “cajas de 1” hay en una “caja de x”, manteniendo el equilibrio de la balanza (Ilustración 11, Ilustración 12).

El alumno dispone de una estrategia inicial o base para empezar a resolver el problema, que consiste en ir probando. Dicha estrategia no coincide con la estrategia óptima que es la resolución de la ecuación.

Los problemas se han presentado a los alumnos como un medio no didáctico, es decir, no perciben la intencionalidad didáctica de la propuesta.

Los alumnos pueden comprobar, sustituyendo, si la solución obtenida es válida.

Experimentación de las situaciones.

Los alumnos jugaron a las adivinanzas y balanzas sin tener la información de que estábamos empezando la nueva unidad didáctica. Poco a poco se fueron introduciendo en el Álgebra.

Fueron descubriendo que, mediante este juego, estábamos resolviendo ecuaciones de primer grado. A esto también contribuyó el hecho de que fuera del entorno escolar algunos reciben apoyo y clases particulares.

La actitud de los alumnos ante este tema ha sido muy positiva ya que han mostrado interés y les ha gustado trabajar de manera lúdica, si bien queda pendiente medir las mejoras en el aprendizaje.

La comprensión de las ecuaciones con números enteros negativos ha sido fácil con el recurso de los globos utilizados en la aplicación. Otras propuestas emplean poleas. Los alumnos de 1º de ESO no tienen suficientes conocimientos de Física como para comprender la analogía.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bujanda, M. P., & Mansilla, S. (2002). *Matemáticas 1º de Secundaria. Números*. Madrid: SM.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez, *Investigación en Educación Matemática XVI* (págs. 75-94). Jaén: SEIEM.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE HORSORI Universidad de Barcelona.

Colerus, E. (1947). *De la tabla de multiplicar a la integral. Unas matemáticas para todos*. Barcelona: Labor.

Elliott, J. (2010). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Ediciones Morata.

Fillooy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 26 (3) , 327-342.

- Hurtado, C. A. (2013). Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita y su impacto en la educación básica. En *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (págs. 1045-1055). Montevideo.
- Ingelmo, M. A., & Zárate, Y. A. (2015). *Matemáticas 1º ESO*. Barcelona: Teide.
- Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. En A. Gutiérrez, & P. Boero, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics. Past, Present and Future*. (págs. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.
- Machín, P., & Rey, M. J. (2015). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: Oxford Educación.
- Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. (Tesis doctoral). Universidad de La Laguna.
- Pereda, S. (1987). *Psicología Experimental. I Metodología*. Madrid: Pirámide.
- Piaget, J. (1983). *La Psicología de la Inteligencia*. Barcelona: Crítica. Grupo Editorial Grijalbo.
- Rojano, M. T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números*, 75 , 5-20.
- Sierra, T., Bosch, M., & Gascón, J. (2012). La formación matemático-didáctica del maestro de Educación Infantil: el caso de «cómo enseñar a contar». *Revista de Educación*, 357 , 231-256.
- Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores, & M. P. Bolea, *Investigación en educación matemática* (págs. 19-52). Tenerife: SEIEM.
- Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernández, J. (1989). *Introducción al Álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Stenhouse, L. (1998). *La investigación como base de la enseñanza*. Madrid: Ediciones Morata.
- VVAA. (2010). *Matemáticas 1º ESO*. Madrid: Santillana.