

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN UTILIZANDO SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Cecilia Russo Cáceres – Alejandro Rosas Mendoza – Juan Gabriel Molina
ceciliarusso@msn.com – alerosas@ipn.mx – jmolina@ipn.mx
Liceo N° 55, Uruguay – Instituto Politécnico Nacional CICATA-Leg, México

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos

Modalidad: CB

Nivel educativo: Medio o Secundario

Palabras clave: Secuencia didáctica, función lineal, software de geometría dinámica

Resumo

En el presente trabajo se expone la elaboración de una secuencia didáctica basada en el uso del software Geogebra, su implementación en una clase de matemáticas y los resultados obtenidos. El objetivo de la secuencia es introducir al estudio del gráfico de una función polinómica de primer grado, a través del trabajo con distintos registros de representación de la función simultáneamente: gráfico, tabular y algebraico. La secuencia didáctica fue diseñada para alumnos de 2° Año de Ciclo Básico de Educación Secundaria de Uruguay (de entre 12 y 13 años de edad). En el estudio participaron 51 estudiantes divididos en dos grupos. En general consideramos que la secuencia elaborada cumple con el objetivo de que los alumnos trabajen con más de un registro de manera simultánea comprendiendo, durante la realización de la misma, la interconexión existente entre los mismos.

ANTECEDENTES

Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) presentan un exhaustivo trabajo donde abordan la temática relativa a funciones y gráficos desde el punto de vista de las tareas, del aprendizaje y de la enseñanza. En el mismo trabajo se señala la estrecha relación existente entre las representaciones algebraicas y gráficas de las funciones y cómo en conjunto determinan el concepto de función. En cuanto a la tarea matemática trabajada con estudiantes se plantean cuatro constructos: acción del estudiante, situación, variable y su naturaleza, y atención.

Por acción se refiere a si la tarea es de interpretación o de construcción, dentro de las cuales se pueden encontrar tareas de predicción, de clasificación, de traducción o de escala. Las tareas de traducción son aquellas relacionadas con reconocer la misma función en distintas formas de representación, reconocer qué representación se corresponde con otra de la misma

función o construir una representación a partir de otra. Este tipo de tareas en general hacen uso de las herramientas tecnológicas. Por situación se refiere a si la función o la gráfica están contextualizadas o no. Por variable y su naturaleza se hace referencia a los datos de la función o del gráfico. La atención es generalmente interna es decir al sistema de ejes, o las escalas por ejemplo.

En cuanto al aprendizaje de los estudiantes se organiza en dos secciones: intuiciones e ideas equivocadas. Las intuiciones son ideas que tienen los estudiantes y que están relacionadas con sus experiencias diarias. Las ideas equivocadas también pueden provenir de la interferencia de conceptos cotidianos con los conceptos matemáticos. En general estas ideas equivocadas se manifiestan en la discusión de qué es o no función, en la correspondencia, en la continuidad o no de los gráficos, en lo relativo a representar, interpretar y leer funciones, así como también en la notación y en la linealidad, dado que muchos alumnos consideran que solo son funciones aquellas cuya representación gráfica es lineal.

Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), concluyen que una noción explícita de la correspondencia entre las nociones gráficas y su expresión algebraica es crucial. De hecho, se puede asegurar que es esta correspondencia la que los estudiantes deben aprender. En lo referente a esta bidireccionalidad. Las autoras citando a Zaslavsk establecen que los estudiantes prefieren ir desde el álgebra para representar gráficamente y no al revés. Al mismo tiempo es importante trabajar sobre las conexiones entre los puntos individuales y el conjunto de los puntos de una tabla y todos los puntos de una recta por ejemplo, así como también desarrollar en el estudiante el sentido de dónde buscar la información crítica.

En cuanto a la tecnología las autoras hacen hincapié en que el uso de ésta afecta de forma importante tanto la enseñanza como el aprendizaje de las funciones y el gráfico de estas. Lo que se plantea es la necesidad de investigar más sobre el uso de la tecnología en la enseñanza, así como también cómo afecta su disponibilidad; se pone como ejemplo el hecho que se pueden trabajar aspectos gráficos como la continuidad sin tener el dominio algebraico que hasta ahora se necesita y que esto puede provocar un cambio en la secuencia tradicional de introducir lo referente a funciones y su gráfico. También se hace referencia a la posibilidad que nos da la tecnología de trabajar con al menos dos representaciones simultáneas del mismo objeto, ya que la mayoría de las tecnologías que grafican nos dan además del gráfico de una

función su ecuación o un par ordenado de números y la representación de dicho punto o una tabla de valores en la que está basada la representación gráfica.

En referencia al trabajo de Biehler (2005) se presenta el hecho de que un mismo concepto matemático puede llegar a tener diferentes significados según el contexto en el que aparezca. En particular realiza su trabajo poniendo como ejemplo el concepto de función. En cuanto al análisis de las representaciones el autor deja en claro que si bien las computadoras dan nuevas posibilidades, los docentes aún no las tienen incorporadas en las clases de matemáticas y se requiere reflexionar sobre ello. Al mismo tiempo asegura que trabajar con diferentes representaciones y relacionarlas entre sí se considera como un elemento básico de una enseñanza significativa y el aprendizaje de las funciones. El software existente amplía la gama de operaciones que se pueden realizar con las funciones y permite a los aspectos geométricos cobrar mayor importancia.

MARCO CONCEPTUAL

Como se mencionó, el propósito de esta investigación fue el diseño de una secuencia didáctica en GeoGebra para el estudio de las siguientes nociones relacionadas al concepto de función:

- Introducción del concepto de gráfico de una función, en particular de funciones polinómicas de primer y segundo grado.
- Relación entre los distintos registros; algebraico, geométrico y/o numérico (tabular)

A continuación se exponen algunos conceptos importantes que se tomaron en cuenta en su elaboración. En primer lugar se describen los principios relacionados con la actividad matemática de este trabajo en sí misma y en segundo lugar los relacionados con el uso de la tecnología en esta secuencia, especialmente el software GeoGebra.

ACERCA DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

Conviene comenzar por destacar la importancia que tienen tanto la representación gráfica como la relación entre los distintos registros en el proceso de apropiación del concepto función. Como lo precisa Biehler (2005), la aritmetización y la formalización no son suficientes y es necesaria la incorporación de los aspectos geométricos y visuales del concepto que vamos a trabajar.

Los aspectos relacionados con la necesidad de que el alumno incorpore los distintos registros de representación de una función y la relación existente entre ellos desde un primer

acercamiento al tema se enmarcan en la teoría de representaciones semióticas de Duval. Entendiendo como representaciones semióticas a aquellas relacionadas con un sistema particular de signos y que pueden ser convertidas en otro sistema de representación (Duval, 1999). Propone que hay tres actividades cognitivas estrictamente relacionadas a los sistemas de representación semióticos:

La primera es, evidentemente, la formación de representaciones en un registro semiótico particular... Esta formación implica siempre una selección en el conjunto de los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se 'quiere' representar. Las otras dos actividades están directamente ligadas a la propiedad fundamental de las representaciones semióticas: su transformabilidad en otras representaciones que conservan sea todo el contenido de la representación inicial, sea sólo una parte de ese contenido. Ahora bien, esta transformación no corresponde a la misma actividad cognitiva según que la transformación se haga al interior del mismo registro, al contrario, que consista en un cambio de registro. Hablaremos de 'tratamiento' cuando la transformación produce otra representación en el mismo registro. Y hablaremos de 'conversión' cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial.

En Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui (2012) las autoras hacen referencia a lo necesario que se hace el trabajo con distintos registros y representaciones el trabajo con distintos registros semióticos y diferentes representaciones es indispensable para el aprendizaje de la matemática pero no es una tarea natural para los alumnos. Es aquí donde presentan las mayores dificultades. (p. 36)

ACERCA DEL USO DE GEOGEBRA EN EL DISEÑO DE LA SECUENCIA

La utilización de un dispositivo tecnológico en la enseñanza de la matemática implica un replanteamiento de la clase tradicional (a lápiz y papel y pizarrón) pues genera nuevas situaciones, como el replanteamiento de las tareas asignadas a los estudiantes pues con el poder de representación y de cálculo de dispositivos tecnológicos como calculadoras o computadoras, las tareas tradicionales pueden dejar de tener sentido.

Zbiek, Heid, Blume y Dick (2007) discuten varios constructos teóricos producto de diversas investigaciones que involucran el uso de tecnología y que son usados para explicar ciertos fenómenos o para describir situaciones que ocurren en ellas; a continuación describiré algunos de los que hacemos uso. Uno de esos constructos es privilegiar el cual hace referencia

a las elecciones que los docentes realizan en relación a su uso de alguna tecnología en clase. Elegimos utilizar GeoGebra para abordar la temática sobre la que se desarrolla la secuencia de este trabajo porque consideramos que brinda mejores posibilidades que el trabajo con lápiz, papel y pizarra pues permite la fluidez representacional, la cual consideramos importante ya que puede permitir al estudiante el tránsito entre distintos sistemas de representación: el algebraico, el gráfico o el numérico, la cual es una idea en la que están basadas las actividades de la secuencia que se propone. El constructo fluidez representacional consiste en la posibilidad que tiene el estudiante de interactuar con la representación o con las distintas representaciones de una misma entidad matemática, extrayendo de ellas distintos significados.

También consideramos que GeoGebra es una herramienta cognitiva con alta fidelidad matemática. Las herramientas cognitivas, según Zbiek, Heid, Blume y Dick (2007) son aquellas tecnologías utilizadas para la actividad matemática tanto en la dimensión técnica como en la dimensión conceptual; este tipo de herramienta da evidencias observables a quien la está utilizando de las acciones que está realizando. Esto es importante ya que le permite al estudiante un mejor acercamiento a la tarea que está llevando a cabo pues le permite observar las representaciones gráficas de las funciones que opera y sus efectos en las representaciones algebraicas. En lo relativo a la alta fidelidad matemática y cognitiva.

Zbiek et. al (2007) señalaron:

Entendiendo por fidelidad matemática, a la exactitud de la herramienta en relación a las propiedades matemáticas, convenciones y comportamientos mientras que por fidelidad cognitiva entenderemos la exactitud de la herramienta en relación a reflejar los proceso de pensamiento del alumno o decisiones estratégicas tomadas mientras realiza la actividad matemática. (p. 173)

SECUENCIA DIDÁCTICA

Esta secuencia didáctica está formada por 4 actividades y tiene como objetivo que los alumnos comprendan y utilicen en distintos registros el hecho de que todos los puntos del gráfico de una función tienen como característica que su ordenada es el correspondiente de la abscisa en dicha función. Es de suma importancia que los alumnos tengan claro esta característica y que puedan manejarse con ella en los distintos registros en los que usualmente

se trabaja en matemática (tabular, gráfico y analítico), debido a que la información que podemos tener de una función puede venir dada en cualquiera de los mencionados registros y además poder relacionarlos sin dificultad da cuenta de un verdadero entendimiento del concepto.

Con la primera actividad se buscó que el alumno arribara a dicha conclusión, GeoGebra nos da la posibilidad de ir mostrando todos los cambios que se dan instantáneamente al variar el punto sobre el gráfico de la función. Es importante destacar que para esta primera actividad se decidió trabajar con una función lineal, por lo simple que es calcular los valores de “y” y eso evita que surjan dificultades o distracciones al objetivo de la actividad. En cuanto al trabajo que deben realizar los alumnos, ellos deben completar una tabla a partir de la cual deberán extraer sus conclusiones. Se esperaba que los alumnos completaran dicha tabla observando lo que se destaca en la animación de la actividad, aunque también podían utilizar algún otro tipo de recurso como la hoja de cálculo que el propio software ofrece o también realizando los cálculos necesarios dado que aparece la expresión analítica de la función con la que se está trabajando. Se buscó que en la primera actividad ya aparecieran los tres tipos de registros mencionados para que los alumnos los manejen con mayor naturalidad.

Actividad 1: Abre el applet *geogebra1* e inicia la animación. Detén y activa la animación varias veces para completar la siguiente tabla:

Coordenadas del punto A	Valor de x	Valor de $f(x)$
()		
()		
()		
()		
()		

- ¿Qué relación hay entre las coordenadas del punto A y el par $x, f(x)$?
- ¿Sucesos siempre lo mismo?
- ¿Qué podemos concluir?

Actividad 2: Abre el archivo *geogebra2*. En el archivo puedes ver tres ventanas abiertas. La algebraica, donde aparece la expresión analítica de una función f , la gráfica, donde aparece la representación gráfica de la función y la hoja de cálculo donde tienes una tabla para completar.

Ingresa en la hoja de cálculo las coordenadas de 5 puntos que pertenezcan a la gráfica que aparece en la vista gráfica. Puedes corroborarlo creando una lista de puntos.

¿Cómo hiciste para determinar las coordenadas de esos puntos?

El punto (1,1) pertenece al gráfico? ¿Por qué?

Puedes decir las coordenadas de otro punto que no pertenezca al gráfico.

Actividad 3: Haciendo uso del gráfico que aparece en el archivo *geogebra3*, completa la siguiente tabla:

x	$g(x)$
-3	
	-10
0	
	0

Actividad 4: Haciendo uso del gráfico que aparece en el archivo *geogebra4*, completa la siguiente tabla:

x	$p(x)$
-2	
	8
-1	
0	
	0
$\frac{3}{4}$	

La actividad 2 buscó que se trabajara desde el registro tabular para observar como esta información se registra en lo gráfico, aunque también se les dió el apoyo de la expresión analítica. En esta actividad es fundamental el hecho de que usemos un software como GeoGebra ya que le muestra al alumno la misma información en tres registros al mismo tiempo. En una primera instancia los alumnos debieron ingresar una lista de pares ordenados de la forma $(x, f(x))$ y a medida que lo hicieron seleccionaron la herramienta indicada para que el programa los representara gráficamente. Así pudieron observar que estos puntos quedan contenidos en el gráfico dado de $f(x)$.

En una segunda instancia debieron explicar cómo hicieron para encontrar el par coordenadas que ingresaron. Esto buscó conocer cuál fue el camino que siguió cada uno de los alumnos. Finalmente en una tercera instancia debieron responder y justificar si un punto dado pertenecía o no al gráfico y señalar las coordenadas de un punto que no pertenezca al gráfico.

Esta etapa de la actividad buscó permitirle a los alumnos trabajar de manera más libre en cuanto al registro que quieran usar y darles así la posibilidad de elegir ellos en cuál querían trabajar y que así se dieran cuenta que en este caso es indiferente el que ellos usen.

En cuanto a las siguientes dos actividades si bien son muy similares se diferencian en su grado de dificultad. El objetivo de ambas es que los alumnos pongan en juego lo concluido en las actividades anteriores y permita al docente tener una idea clara de cómo el alumno va incorporando lo trabajado anteriormente. En ambas actividades haciendo uso del gráfico de una función debe completar una tabla donde aparecen algunos valores ya sea de imágenes o preimágenes asociadas a dicha función.

Se esperaba que el alumno reconociera que estos valores dados en las tablas correspondían a la abscisa u ordenada, según el caso, de puntos en el gráfico de la función. También debía reconocer en cuál de los ejes se ubica el valor dado y en cuál el desconocido. Trabajando así con ambos registros de forma permanente. En la primera de estas dos actividades aparece la cuadrícula en la zona gráfica para brindarle un apoyo al estudiante, pero en la segunda no aparece y es por esto que aumenta la dificultad. Es esperable que dado el hecho de que no se cuenta con la cuadrícula el alumno tenga que trabajar con otros aspectos como lo son las rectas paralelas a los correspondientes ejes. Aquí se podía utilizar las herramientas del software (recta paralela, recta perpendicular) para dar mayor precisión que si se trabajaba con lápiz, regla y papel. Suponiendo que el alumno cuenta con el valor de x y debe completar el valor de su imagen, lo deseable era que el alumno trazara, haciendo uso de las herramientas de GeoGebra, una recta perpendicular al eje Ox por el punto $(x,0)$ y luego usando intersección ubicara el punto del gráfico con dicha abscisa, para luego tomar una de las siguientes posibles decisiones, o bien trazar una recta perpendicular a la anterior para ubicar el punto de coordenadas $(0,f(x))$ o atendiendo a lo que sucede en la vista algebraica observe las coordenadas del punto indicado en el gráfico al usar la herramienta intersección.

COMENTARIOS FINALES

La secuencia fue aplicada a 51 estudiantes de 2° Año de Ciclo Básico de Educación Secundaria de Uruguay (de entre 12 y 13 años de edad). En general consideramos que la secuencia elaborada cumple con el objetivo de que los alumnos trabajen con más de un registro de manera simultánea comprendiendo durante la realización de la misma la

interconexión existente entre los mismos. Esto queda en evidencia a la hora de analizar las respuestas.

Tener presente que el concepto de función puede ser representado en distintos sistemas semióticos y que cada uno de ellos acarrea su dificultad, así como también el cambio de uno de esos sistemas a otro, fue de suma importancia durante la elaboración de la secuencia como durante la aplicación de la misma. Durante la elaboración porque provocó la búsqueda de actividades en las que además de considerar cada uno de los sistemas que se estaban utilizando los alumnos también tuviesen que cambiar de sistema y durante la realización porque implicó prestar atención a que los alumnos estuviesen comprendiendo que se trataba del mismo concepto matemático pero en distintas formas de representación. Buscando que se den tanto la formación como la transformación de representaciones. La formación de representaciones en un sistema en particular, en este caso el gráfico de la función, transformación desde el punto de vista de la conversión de un sistema a otro, en este caso del algebraico al gráfico, del tabular al gráfico o del gráfico al tabular.

Referencias bibliográficas

- Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. En J. Kilpatrick et al (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-81). USA: Springer.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Leinhardt, G. et al (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Task, Learning and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Zbiek, R. et al (2007). Research on technology in mathematics education. A Perspective of Constructs. En F. K. Lester, Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1169-1207). USA: IAP.