CB-1.189

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE PROFESORES CHILENOS CUANDO ABORDAN LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Yocelyn Parra Urrea – Luis Pino-Fan
yocelynparra@gmail.com – luis.pino@ulagos.cl
Universidad San Sebastián, Universidad de Los Lagos, Chile

Modalidad: Comunicación Breve **(CB)**
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Núcleo temático: Formación del Profesorado en Matemáticas
Palabras clave: Función, Conocimiento didáctico-matemático.

Resumen

Esta investigación pretende caracterizar los conocimientos requeridos por los profesores de matemática para gestionar idóneamente los aprendizajes sobre la noción de función, además de identificar los significados que el profesor implementa en el desarrollo de sus clases. Para lograr nuestro objetivo, reconstruimos el significado holístico de referencia mediante una revisión de tipo histórico-epistemológico. Además, exploramos y caracterizamos aspectos relevantes asociados al conocimiento didáctico-matemático de un profesor chileno en formación inicial cuando aborda la noción de función potencia. Para el análisis nos apoyamos en las nociones teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), y en algunas dimensiones y herramientas propuestas por el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM). Como resultado del estudio, evidenciamos que los profesores presentan dificultades para resolver actividades relacionadas con el conocimiento de contenido común y ampliado. En cuanto a la dimensión didáctica, los profesores movilizan representaciones principalmente de tipo algebraica y gráfica. Asimismo, se han identificado errores y ambigüedades cuando el profesor conceptualiza la noción de función potencia.

Planteamiento del Problema

El análisis y reflexión de las prácticas docentes es una de las problemáticas que ha desatado gran interés en la educación matemática. Diversos estudios han reportado una variedad de dificultades en los procesos de instrucción matemática, impidiendo a los estudiantes apropiarse, comprender y dar significado a la noción de función.

Norman (1992) constata que los profesores poseen dificultades en la conceptualización de las funciones, es decir, aprueban definiciones informales consideradas como útiles para determinar la funcionalidad de las relaciones y las perciben como definiciones matemáticamente formales, además sólo identifican ejemplos estándares de funciones y no

ISBN 978-84-945722-3-4

reconocen situaciones físicas que representan relaciones funcionales. En este mismo sentido, Even (1993) prueba que la apreciación de la naturaleza arbitraria de las funciones está ausente y muy pocos profesores pueden explicar la importancia y origen del requerimiento de la univalencia. Por su parte Wilson (1994) establece que la idea de los profesores respecto a la noción de función es consistente con la concepción que poseen sobre las matemáticas, entendida como la colección de procedimientos para responder a problemas bien definidos. En cuanto a la utilidad de las funciones, los docentes manifiestan poca apreciación por el uso de las funciones y el conocimiento que se tenía en esta área era limitado y fragmentado.

En Chile se evidencian dificultades en contenidos matemáticos específicos asociados con el álgebra, dentro de esta área el trabajo con las funciones es tratado en general desde un punto de vista estrictamente formal (Aravena, 2001). De acuerdo con Figueiredo (2010) la introducción de la noción de función en el nivel prealgebraico tiende a basarse en representaciones verbales y tabulares. No obstante, rápidamente la construcción de dicha noción se centra en representaciones algebraicas y geométricas. Font y Acevedo (2003) aun cuando no estudian directamente las concepciones de los profesores, establecen cómo éstos tienen la creencia de que el uso de metáforas dinámicas en su discurso facilita la comprensión sobre funciones. Los profesores usan de manera poco consciente estas metáforas y creen que sus efectos en la comprensión de sus estudiantes son inocuos; contrariamente, los estudiantes estructuran su conocimiento sobre las funciones en los términos metafóricos que ha utilizado el profesor de manera inconsciente (Acevedo, Font y Giménez, 2004). Godino, Wilhelmi y Bencomo (2006) explicitan que una instrucción didáctico-matemática idónea requiere que el profesor posea un conocimiento profundo de los diversos significados de la noción de función. Por ello, conocer su evolución histórica, representa un conocimiento relevante para la enseñanza de las funciones ya que permite tener una visión más amplia del objeto función (Font, 2011). Amaya, Pino-Fan y Medina (2016) mencionan dificultades que los profesores poseen en torno a la función. Algunas de ellas se relacionan con identificar relaciones funcionales, modelar situaciones utilizando funciones, entre otras. Una de las interrogantes que surge posterior a la revisión de la literatura es *¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático de profesores chilenos en formación cuando abordan la noción de función?* En este trabajo presentamos un estudio de caso con el cual tratamos de caracterizar algunos aspectos relevantes del CDM sobre funciones.

ISBN 978-84-945722-3-4

Marco Teórico

Describir y caracterizar los conocimientos didácticos-matemáticos que los profesores deberían tener para gestionar eficazmente la enseñanza y garantizar el aprendizaje de sus estudiantes, ha sido una de las problemáticas de interés en la educación matemática. Pino-Fan y Godino (2015) presentan un modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor basado en el "enfoque ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). Este modelo plantea tres grandes dimensiones: Matemática; Didáctica; y Meta didáctico-matemática. Pino-Fan, Assis y Castro (2015) definen la dimensión matemática del CDM, como "*los conocimientos que permiten al profesor, resolver una actividad matemática que se pretende implementar en el aula y vincularlo con objetos matemáticos que se encuentran más adelante en el currículum de matemáticas. Incluye dos subcategorías de conocimientos: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido*" (p. 1433). El conocimiento común del contenido es entendido como aquel que permite resolver tareas matemáticas propuestas por el currículo de matemática en un nivel educativo específico (Pino-Fan y Godino, 2015). El conocimiento ampliado del contenido refiere al conocimiento que se sitúa más adelante que aquel que se está estudiando, además permite vincular la noción con otros objetos matemáticos (Ibíd.).

La dimensión didáctica del CDM *incluye seis subcategorías del conocimiento: Conocimiento especializado de la dimensión matemática (faceta epistémica); Conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes (faceta cognitiva); Conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes (faceta afectiva); Conocimiento sobre las interacciones que se originan en el aula (faceta interaccional); Conocimiento sobre los recursos que pueden favorecer los aprendizajes de los estudiantes (faceta mediacional); y Conocimiento sobre los aspectos curriculares, sociales, políticos, económicos, que influyen en la gestión de los aprendizajes (faceta ecológica)* (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015). Las seis facetas de la dimensión didáctica del CDM pueden contemplarse para examinar y caracterizar el conocimiento de los profesores en cualquier fase del proceso de enseñanza: estudio preliminar, planificación o diseño, implementación y evaluación (Pino-Fan y Godino, 2015). En este documento nos enfocaremos a los conocimientos relacionados con la faceta epistémica del CDM.

ISBN 978-84-945722-3-4

Pino-Fan y Godino (2015) definen la dimensión meta didáctico-matemática del CDM como "*los conocimientos sobre las normas y metanormas, las condiciones y restricciones contextuales. Conjuntamente involucra criterios de idoneidad que permiten al profesor reflexionar sobre su propia práctica y determinar mejoras potenciales de la misma"* (p. 103).

Metodología

La siguiente investigación trata de un estudio de caso mediante el cual se caracteriza el conocimiento didáctico-matemático de un profesor chileno en formación inicial (Profesor A), cuando afronta la enseñanza de la noción de función potencia. Conjuntamente, se pretende identificar los significados parciales que el profesor implementa en el desarrollo de sus clases. En esta comunicación por motivos de espacio sólo se presentará el análisis de la dimensión matemática del (CDM) y de una de las seis facetas que componen la dimensión didáctica del (CDM) –faceta epistémica–. Al momento de la experimentación, el profesor A estaba cursando el sexto semestre de la carrera de pedagogía media en matemática cuya duración total es de ocho semestres. Algunas de las asignaturas que el profesor A había cursado a lo largo de su formación son: álgebra básica, álgebra de funciones, cálculo diferencial, cálculo integral, entre otras. Cabe señalar que el estudio de la función potencia se realiza en Chile en cuarto año medio, es decir, con estudiantes de 17-18 años. Para la recolección de la información se filmó una clase simulada en la que profesores en formación de sexto semestre cumplieron el rol de estudiantes de cuarto año medio.

Resultados

Significado Holístico de la noción de función

En un estudio previo (Parra, 2015), se identificaron seis significados parciales que constituyen el significado holístico de referencia de la noción de función: *La función como correspondencia, como relación entre variables, como expresión gráfica, como expresión analítica, como correspondencia arbitraria y desde la teoría de conjuntos*.

Descripción Clase sobre Función Potencia

La profesora A comienza el proceso de enseñanza explicitando el objetivo de la clase: "*Conocer y comprender el concepto de función potencia y su representación gráfica"*. Durante el inicio de la clase refuerza los conceptos de potencia y ecuación exponencial. Inmediatamente después procede a definir la noción de función potencia como: "*Es toda aquella función de la forma* $f(x) = ax^n$ *donde a es un número real distinto de cero y n debe*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

ser un número natural mayor que cero”. A continuación la Profesora A alude a que existen cuatro casos de funciones potencia y señala: “*La función potencia con exponente par se define como: “si n es un número par sabemos que para cualquier x su resultado será positivo, por lo que ambas ramas (simétricas al eje y) crecen con la misma rapidez en el mismo sentido”.* Luego expresa *“Un ejemplo de esta ecuación”* corrige rápidamente e indica *“Un ejemplo en esta función es $f(x) = x^6$*” y muestra la representación gráfica de la función. En seguida explica “*Si el coeficiente a es positivo las ramas se abren hacia arriba y si el coeficiente a es negativo las ramas se abren hacia abajo”*. Posteriormente, a modo de ejemplo plantea la función $f(x) = 2x^4$ y efectúa la representación gráfica, para ello recurre a una representación tabular asignando valores a x y obteniendo los valores de y. Cabe destacar que la Profesora A al momento de graficar ubica erradamente el par ordenado en el plano –intercambiando la posición de las coordenadas– al cabo de unos minutos corrige el error y alude a que la representación corresponde a una parábola positiva. Seguidamente señala que otro caso de función potencia es aquella cuyo exponente es impar. La profesora A manifiesta “*Este tipo de función puede ocasionar mayor dificultad*”, una vez que presenta la función $f(x) = 2x^5$ pregunta a sus estudiantes ¿Qué ocurre si x es cero? La profesora expone que “*si $x = 0$, entonces $y = 0$ por ende este tipo de función potencia siempre va a partir del cero y se obtendrán los valores positivos y negativos en la rama 1 y 2 respectivamente, es decir, los valores numéricos serán iguales en cada rama pero con signo contrario*”.

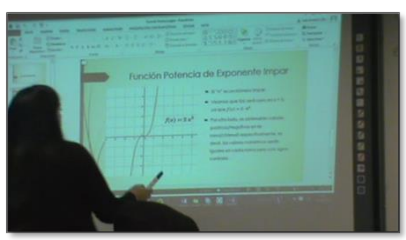

Figura 8. Explicación representación gráfica función potencia exponente impar

A continuación, la profesora plantea como actividad algunas representaciones algebraicas y solicita realizar sus respetivas representaciones gráficas. Entre sus comentarios, sugiere transitar desde la representación algebraica a la tabular y luego a la gráfica. Posteriormente expone el caso de la función $f(x) = ax^n$ con $n = 1$ y señala*:* ¿Cómo se comporta la gráfica

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de esta función? rápidamente manifiesta: "*Efectivamente la gráfica es una recta, por ende representa la gráfica de una función lineal. Por lo tanto, no es una función potencia, ya que su representación no corresponde a una parábola*"

Otra inquietud que la profesora plantea a sus estudiantes es: ¿Cómo se comporta la gráfica de la función $f(x) = x^0$? Ante esta pregunta la profesora estima conveniente efectuar la gráfica, para ello, utiliza la representación tabular asignado los siguientes valores (-1, 0, 1) a la variable x y menciona que los valores de la variable y son (1, 1, 1) respectivamente, concluye que en este caso se trata de una función constante y no de una función potencia. Ante esta situación, uno de los estudiantes consulta: ¿$0^0 = 1$? La profesora A alude que en ese momento no puede explicarlo, pero que durante la próxima clase aclarará aquella inquietud. Posteriormente, la profesora se apoya de la tabla 1 para explicar el dominio y el recorrido de la función potencia.

Tabla 1. Dominio y recorrido función potencia

	Función par cóncava hacia arriba	Función par cóncava hacia abajo	Función impar
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Recorrido	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^-$	$\mathbb{R}$

Al finalizar la profesora realiza una síntesis de lo abordado durante la clase y refuerza lo siguiente: "*Recordemos que en las funciones potencia el exponente siempre debe ser un número natural mayor que 1 pues si fuese igual a uno se trataría de una función lineal y si fuese igual a cero se trataría de una función constante*".

Análisis de resultados

A partir de las definiciones, argumentos y justificaciones proporcionadas por la profesora A en el proceso de enseñanza sobre función potencia, podemos concluir que la profesora posee un dominio parcial del *conocimiento común del contenido*. Esto particularmente porque no logra dar respuestas matemáticamente satisfactores a más de una tarea que ella misma propone. Cabe destacar que las actividades planteadas se corresponden con las que se sugieren en el currículo de cuarto año medio. Durante el proceso de instrucción no se logra percibir el dominio del *conocimiento ampliado del contenido* de la profesora A. Asimismo, no se observan conexiones de la noción de función potencia con objetos matemáticos de niveles educativos más avanzados.

ISBN 978-84-945722-3-4

Basados en los componentes y descriptores de los criterios de la idoneidad epistémica, la profesora A define 'erradamente' la noción de función potencia, esto se evidencia principalmente cuando señala que "*dada la función* $f(x) = ax^n$ *n debe ser un número natural mayor que cero*". Otro error que se visualiza es definir dominio y recorrido como conceptos independientes de la noción de función. Además, se perciben ciertas ambigüedades cuando la profesora A, al inicio de la clase, define la función potencia y explica que el valor de *n* debe ser un número natural mayor que cero y luego cuando efectúa el resumen de la clase señala que *n* debe ser un número mayor que uno, pues de lo contrario la expresión representa una función lineal y no una función potencia. Con respecto a la *riqueza de los procesos* y la *representatividad* según Pino-Fan, Assis y Castro (2015) el profesor, además de las matemáticas que le permiten resolver diversas problemáticas donde activa su conocimiento común y ampliado, debe poseer un conocimiento matemático 'perfilado' para la enseñanza, es decir, debe ser capaz de abordar diversas representaciones del objeto matemático función. Durante el proceso de enseñanza, la profesora A moviliza diversas *representaciones*. No obstante, sólo transita desde representaciones algebraicas a tabulares y luego a gráficas. En cuanto a los *procedimientos* que presenta en el desarrollo de las actividades que propone, sólo se identifica la valoración de expresiones algebraicas y ubicar pares ordenados en el plano. En relación a vincular la noción de función potencia con otros objetos matemáticos, la profesora A se refiere a los *conceptos* de potencia y ecuaciones exponenciales como nociones esenciales para el estudio de la función potencia. Sin embargo, no refuerza ni se refiere a la noción de función. Con respecto a las *justificaciones* y *argumentaciones* que proporciona la profesora A, se identifican ciertas imprecisiones, esto se evidencia cuando plantea la expresión $f(x) = x^0$ y no logra explicar la situación, cuando definir el dominio de la función respondería a la problemática. Los tipos de *problemas* que se desarrollan durante la clase sobre función potencia son problemas para ejemplificar definiciones presentadas y problemas no contextualizados, para reforzar las definiciones introducidas. No se identifican tareas contextualizadas que requieran de funciones potencias para modelar fenómenos.

Reflexiones Finales

ISBN 978-84-945722-3-4

En este estudio se demuestra cómo el uso de las dimensiones y/o herramientas propuestas por el modelo del conocimiento didáctico matemático (CDM) son útiles para analizar el conocimiento de una profesora chilena cuando aborda la función potencia.

Como resultado del análisis, se evidencia que la profesora posee un dominio parcial del conocimiento común del contenido, además se observan errores y ambigüedades en la conceptualización de la noción de función potencia y se perciben impresiones en los argumentos y/o justificaciones a tareas propuestas en el desarrollo de la clase. La enseñanza desarrollada por la profesora A, se basa principalmente en procesos mecánicos, esto se visualiza cuando se presenta el algoritmo para transitar desde representaciones algebraicas a tabulares y luego a gráficas. Por otro lado, a partir del proceso de enseñanza y de acuerdo al tipo de problemas, definiciones, representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos propuestos, el significado de la noción de función potencia pretendido por profesora A no es representativo del significado holístico de referencia, esto pues el enfoque que se le da al objeto matemático se basa fundamentalmente en su acepción de representación gráfica y en un significado que involucra elementos de la teoría conjuntista.

Finalmente, describir y caracterizar otras facetas de la dimensión didáctica del CDM es sin duda una de las problemáticas que se podrían abordar en investigaciones futuras.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto de investigación Fondecyt 11150014, financiado por CONICYT de Chile.

Referencias bibliográficas

Acevedo, J.L., Font, V., & Giménez, J. (2004). Class Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph offunctions. In J. Giménez, G. Fitzsimons, C. Hahn (Eds.), *Globalisation and mathematics education CIEAEM 54*, pp. 336 - 342. Barcelona: Graó.

Amaya, T., Pino-Fan, L., & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática, 28*(3), 111-144.

Aravena, M. (2001). Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica. (Tesis Doctoral). Universidad de Barcelona, España.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(2), 94-116.

ISBN 978-84-945722-3-4

Figueiredo, C. (2010). Los ejemplos en clase de matemáticas de secundaria como referente del conocimiento profesional. (Tesis Doctoral). Universidad de Extremadura, España.

Font, V., & Acevedo, J. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(3), 405-418.

Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 56, 86-94.

Godino, J., Wilhelmi, M., & Bencomo, D. (2006). Idoneidad de un proceso de instrucción matemática sobre la noción de función con estudiantes de ingeniería. Coloquio Internacional para la Enseñanza de la Matemática a Estudiantes de Ingeniería. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Norman, A. (1992). Teachers mathematical knowledge of the concept of function. In G. Harel, E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy, vol. 25, MAA notes* (pp. 215-232). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Parra, Y. (2015). Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función. (Tesis de Magíster). Universidad de Los Lagos, Chile.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA, 36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of tearchers didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Techonology Education, 11*(6), 1429-1456.

Wilson, M.R. (1994). One preservice secondary teacher's understanding of function: The impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(4), 346-370.

ISBN 978-84-945722-3-4