XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011 — 50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil

Demonstração em geometria: significados de alunos.

João Acácio **Busquini**
Diretoria de Ensino da Região de Sertãozinho – SEESP
Brasil
jbusquini@usp.br
Vinício de Macedo **Santos**
Universidade de São Paulo – FEUSP
Brasil
vms@usp.br

Resumo

Do discurso do matemático e da prática do professor, surge a pergunta geradora desta pesquisa: quais significados são atribuídos à prova rigorosa ou demonstração matemática por licenciandos do curso de Matemática? Partimos da análise histórica e, da literatura disponível sobre a prova rigorosa ou demonstração. Nesta análise, encontramos duas faces distintas: da pesquisa internacional, e da pesquisa nacional que, embora crescente, necessita de maiores discussões na comunidade de educadores matemáticos. Da concepção de demonstração nas raízes gregas, Andrew Wiles, o significado da demonstração apresenta conceitos distintos, apoiados em seus campos históricos, sociais e culturais. Nesta seara, inserimos os instrumentos (questão e testes), produzidos pela Profª Celia Hoyles, para compreendermos o significado que buscamos entre os futuros professores. Desta maneira, delineamos algumas considerações finais visando identificar preocupações e estabelecer relações por meio dos significados – explicação e visualização - que compreendam o ensino-aprendizagem nos cursos de licenciatura em Matemática.

Palavras-chaves. demonstração, formação de professores, prova rigorosa.

Introdução

Em nossa atividade docente, observamos uma grande dificuldade na abordagem da demonstração no processo ensino/aprendizagem na sala de aula. A persuasão da reprodução e a insinuação da verticalização daquilo que às vezes nos parece claro, fazem com que argumentemos que essas construções poderiam ser feitas empiricamente, não sendo necessários toda uma estrutura axiomática formal. Surge aí, as nossas primeiras inquietações sobre o significado da prova ou demonstração.

Embora não encontremos nos anais e revistas especializadas em Educação Matemática um levantamento sistematizado sobre as dificuldades com relação à demonstração enfrentadas por alunos do Ensino Superior, informalmente suspeitamos que estas dificuldades tivessem ligação, pelo menos em parte, da não familiaridade com o raciocínio formal nas instâncias anteriores a este nível de ensino.

A tematização da prova seria o estudo sistemático e aprofundado de seu significado do ponto de vista clássico (definição e operacionalização), do papel das demonstrações para a Matemática e, para o ensino da Matemática, e possível forma de abordagem além da clássica. Estes elementos também parecem ser fatores a contribuir para essas dificuldades.

Tematizadas ou não, familiares ou não, as provas rigorosas são instrumentos por excelência de geração do conhecimento matemático e, por isso, levadas às salas de aula. Sujeitos às provas rigorosas, alunos e professores desenvolvem mecanismos de ação para enfrentá-las e, nesse enfrentamento, obviamente, atribuem significados que formam e ou reproduzem conceitos sobre a Matemática e seu ensino.

Julgamos que o significado atribuído à demonstração nos permite compreender o conceito estabelecido pelo nosso sujeito investigado. O significado que se faz do objeto pesquisado, a demonstração é um elemento que o sujeito aceita sem lhe ser significante, ou seja, só adquirirá se unida a um conceito que lhe dê determinada linguagem. Este conceito, no entanto é fruto de uma imagem produzida pela ação social deste sujeito.

Geralmente os alunos de cursos de licenciatura aceitam as demonstrações contidas em alguns livros-textos, tendo como complemento, a exposição dos professores. Aceita-se assim, o autoritarismo herdado da prática científica da Matemática, do qual o aluno torna-se cúmplice e reprodutor, admitindo, então, uma verdade matemática absoluta.

Hanna (1996), declara que “a demonstração é um elemento chave para uma imagem autoritária da Matemática”. Esta declaração coincide com as argumentações de Imre Lakatos (1976) no seu Proof and Refutation: the logic of mathematical discovery quando desafia o programa euclidiano.

Essas abordagens às demonstrações, quase ritualísticas, estão presentes, hegemonicamente no dia-a-dia das salas de aula e, por isso, são exigidas nas avaliações às quais são submetidos os alunos. Impera a reprodução de algo que seja aceito somente quando satisfaz o “modelo” conhecido. A repetição desse esquema caracteriza os cursos universitários e em algumas salas de matemática no ensino médio.

Segundo Garnica (1996), os professores-pesquisadores em Matemática e Educação Matemática, atuantes em cursos de formação de professores, de mão de suas concepções, atribuem extrema importância à prova rigorosa nas Licenciaturas, mas tal importância pode ser “lida” sob dois paradigmas, a saber, o “técnico” (essencialmente ligado à prática científica da Matemática) e o “crítico” (ligado à Educação Matemática).

Entendemos que o tratamento das provas rigorosas em sala de aula: sua importância e ou necessidade das provas, suas propriedades, sua função e o seu papel devam gerar programas para o ensino da Matemática, sob tudo para a Educação Matemática.

Investigamos então, alguns alunos da licenciatura em matemática, que nos possibilitaram obter os significados de prova ou demonstração em seu contexto social. Assim sendo, nos permitimos a utilizar um questionamento e alguns dos testes, em especial os de geometria, produzidos pela pesquisadora Celia Hoyles e utilizados para avaliar alunos do Reino Unido, referente à demonstração.

A análise dos dados coletados, nesta pesquisa de estudo de caso, vista por nós sob uma abordagem sócio-cultural, conduziram-nos à reflexão dos significados obtidos e ao alinhamento destes dados. De posse das considerações sobre os cursos de formação de professores em Matemática, da visão histórica da demonstração, das argumentações dos pesquisadores sobre a prova rigorosa e de nosso alinhamento e reflexão sobre os significados da demonstração matemática tecemos nossas considerações finais.

A prova rigorosa no cenário atual: a pesquisa internacional

No contexto internacional, a lista de pesquisadores que discutem o papel e a função da prova é ainda limitada. Podemos citar pesquisadores como Bell (1976), Lakatos (1978), Balacheff (1989), Radford (1994), Hanna (1996), Hoyles (1997), De Villiers (1999) e Tall (1989, 1999).

Bell (1976) argumenta principalmente sobre os processos que levam a aproximação dos estudantes a provar. Para que os estudantes tenham convicção de suas verdades e apresentem generalizações, eles precisam ter oportunidades de testar e aprimorar suas próprias conjecturas, diz ainda que, “[...] verificação/convencimento [...] passa ao lado da consideração da natureza real da demonstração [...] uma demonstração lógica requer uma análise mais completa das diversas funções e papéis da demonstração”. (p. 24).

Em pesquisa com alunos ingleses, Tall (1989) chama a atenção para os diversos significados que uma prova sugere, assim para o professor e o aluno a prova pode ter significados diferentes. Neste sentido, também chamamos a atenção dos educadores para uma maior reflexão da prática do que chamamos de prova em sala de aula. O pesquisador Tall (1989) observa que a noção de prova formal entre os estudantes é muito difícil, a prova matemática difere de convencer um amigo ou inimigo, isso talvez esteja baseado em duas idéias importantes: a pessoa que formula uma definição clara e a dedução de uma verdade da declaração do outro. Ele ainda observa que a prova pode impor uma dúvida razoável a um júri, entretanto, na comunidade matemática, a prova tem um papel indispensável e diz que, “essa tradição tem separado os matemáticos das ciências empíricas com um método indubitável [...] o que contrasta a indução natural para a atividade empírica”.

O ensino e aprendizagem da prova rigorosa são destacados por Radford (1994), quando expõe sua preocupação dizendo que “o conceito tido pelos alunos acerca da demonstração, esta subentendida pela conceitualização que eles têm dos objetos matemáticos”. Neste contexto, o pesquisador propõe que o ensino da demonstração deva ser acompanhado de uma mudança conceitual dos objetos matemáticos.

Em sua pesquisa sobre a prova rigorosa e demonstração Hanna (1997) expõe sobre sua prática em escolas americanas da importância cada vez menor da demonstração, principalmente em escolas secundárias. Ela acredita que isto pode ser creditado, em parte, pelo grande número de docentes de matemática que têm sido levados pelo desenvolvimento da matemática e da investigação em educação matemática, onde a demonstração não teria um papel fundamental na teoria e na prática didática na aprendizagem.

Nesta mesma direção Ernest (1991) e Lakatos (1976), desafiaram o programa euclidiano e assim, a matemática autoritária e irrefutável. Nesta posição, salienta a pesquisadora Gila Hanna que o programa grego está em conflito com nossos valores atuais de sociedade. É neste cenário, que a matemática exerceria um instrumento democrático de justificação.

De Villiers (1999), observa as implicações sobre o papel e função da demonstração em matemática, dizendo que “tradicionalmente a idéia principal é remover a dúvida pessoal ou de céticos”. Este mesmo pesquisador, examinando atenciosamente o trabalho de Bell (1976), sobre funções da prova (convencimento e verificação), amplia esta lista. Assim, são funções da demonstração, a explicação, a sistematização, a descoberta, a comunicação e o reconhecimento pessoal e da academia.

A teoria de Harel e Sowder (1998), tem a intenção de classificar os esquemas de provas representadas pela habilidade intelectual no desenvolvimento matemático, sobretudo das observações psicológicas dos estudantes. Esta classificação não se baseia na idéia do indivíduo de conceber prova ou refutações, mas na busca da verdade, dúvidas e convicções em um determinado contexto social.

São três as categorias identificadas: o convencimento externo dirigido pelo professor ou livros textos; a prova empírica na qual acreditamos ser a prática difundida nos ensinos que antecedem a formação de professores; e, a prova dedutiva, sobretudo pela dedução lógica.

Balacheff (1999), observa o diagnóstico sobre quais poderiam ser as origens das dificuldades do ensino e aprendizagem da demonstração em matemática, sob o ponto de vista do contrato didático que surge entre alunos e professores. Nesta concepção de verdade da prova, o professor é a garantia de legitimidade e de validez daquilo que se constrói em sala. Nesta implicação, fica o aluno privado de ter um acesso autêntico na problemática entre verdade e prova. Estas superações da dificuldade inerente aos sistemas didáticos poderiam ser superadas devolvendo a responsabilidade ao aluno, sobre suas produções.

Para superar estas dificuldades Nicolas Balacheff propõe a argumentação, mas observa os problemas que surgem sobre o estudo desta interação social, quanto as diferentes concepções teóricas desta argumentação, há os riscos em reconhecer uma argumentação matemática e os obstáculos epistemológicos para a aprendizagem desta demonstração.

De La Torre (2000) também argumenta sobre a demonstração em matemática dizendo que a Didática da Matemática e as matemáticas estão a serviço da educação. Ele também acredita que as justificações não deviam estar como objetivo último da educação e da educação matemática.

Destas pesquisas que apontam a pesquisa internacional sobre funções, tipos, esquemas, percepção, didática e outras que não inserimos aqui se notam a frequência com que este tema é apresentado na comunidade Matemática e na Educação Matemática. Este levantamento, embora seja uma amostra dos artigos publicados em periódicos e anais nas duas últimas décadas, observa-se, principalmente no campo da mídia eletrônica, uma discussão bem mais dinâmica.

Observamos, no entanto, que a pesquisa nacional, não segue o mesmo ritmo do desenvolvimento que os pesquisadores internacionais perseguem. Esse atraso no Brasil pode ser atribuído a um currículo que não possibilite uma discussão mais profunda sobre a prova e a demonstração.

Acreditamos também que a comunicação, isto é, desvelar o significado da demonstração, principalmente nos cursos de formação de professores, pode fazer este objeto ser mais democrático em sala de aula, além de buscar outros caminhos que possibilitem as investigações e que venham a contribuir para a tríade ensino/aprendizagem/matemática. Esta consideração refere-se ao nosso argumento de que são os licenciandos os instrumentos que possibilitarão aos alunos dos ensinos anteriores à universidade, os primeiros contatos ditos formalizados com os temas 'prova' e demonstração.

Metodologia

A pesquisa foi realizada em uma amostra de alunos do 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição particular de ensino do interior do Estado de São Paulo. Para tanto, pretendeu-se pesquisar em um grupo de futuros professores, alunos deste curso em três momentos. No primeiro, foram investigados, nesse mesmo universo, os *significados* por meio de um questionário e, em outro momento, os *significados* por meio de testes objetivos e, por fim, o alinhamento dos significados encontrados.

Os testes apresentados aos nossos sujeitos foram semelhantes aos aplicados pela pesquisadora Hoyles[1], da Universidade de Londres, e a pesquisa foi publicada no *For the Learning of Mathematics* (1997). O instrumento foi elaborado e aplicado para avaliar o *National Curriculum* inglês (equivalente aos nossos *Parâmetros Curriculares Nacionais*) relativamente à prova e à demonstração em álgebra e em geometria.

Nosso interesse, restringiu-se nos significados da demonstração em geometria. Estes testes elaborados por Hoyles foram traduzidos pela professora Lílian Nasser[2], do Rio de Janeiro, que nos convidou a participar do programa de aplicação desses testes. O valor destes testes reside na possibilidade deles oferecerem respostas indicativas de significados dos alunos quanto às demonstrações, não somente no que se referem aos significados elaborados por eles próprios, mas também sobre aquilo que eles acreditam ser o significado atribuído por seus professores.

Julgamos ainda, sobre a possibilidade da diferença entre, os significados dos sujeitos pesquisados e de seus professores possibilitam-nos construir, metodologias significativas para, uma aproximação dos estudantes à demonstração.

Coleta de dados

Como já dito, os procedimentos elaborados tiveram o objetivo de identificar os significados atribuídos à demonstração por alunos de um curso de licenciatura em Matemática. No primeiro momento foram, investigados os *significados* dos alunos, por meio da aplicação de uma questão que apresentaremos a seguir e que, embora concordemos com as abordagens fenomenológicas descritas no item anterior, nos parece ser suficiente chamarmos este primeiro momento de *subjetivo*. Assim, propusemos aos nossos cinco sujeitos, a seguinte questão:

- **Escreva abaixo tudo o que você sabe sobre demonstração em Matemática e para que serve.** (Sem direito a consultas, os sujeitos da pesquisa apresentaram as seguintes respostas)

---

[1] Os testes aplicados aos nossos sujeitos foram em uma versão mais ampliada que os apresentados neste artigo.
[2] Prof. Dra. Lílian Nasser é docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ/Projeto Fundão.

> “A demonstração serve para melhor a abstração, pois vendo, sabendo a história de onde vem, de onde tudo começou a matéria fica mais atraente, mais interessante.”; “Levar os alunos no computador e mandar eles mexerem no Cabri, eles vão se divertir e aprender mais.”(Sujeito A)

> “No decorrer do curso aprendemos várias demonstrações, principalmente na parte de geometria. A demonstração é muito importante, pois através dela conseguimos entender melhor o que estudamos e com certeza enxergarmos o que aprendemos de forma mais clara.” (Sujeito B)

> “Demonstrar é necessário e essencial em tudo e para tudo que fazemos. Demonstrando você consegue provar ou não certas teorias já elaboradas, testada e aprovada.”; “Demonstrando na geometria fica mais fácil de assimilar conteúdos mais complexos.”; “No caso de simetria (matéria que estava sendo estudada antes da aplicação do teste), o educador consegue demonstrar e mostrar através de um simples pedaço de papel. Temos necessidade de abstrair a partir daquilo que nos é demonstrado. A demonstração serve de ponte entre o real com o imaginário (concreto com o abstrato).” (Sujeito C)

> “A demonstração é a melhor maneira de se aprender a geometria, porque é através dos desenhos que podemos entender os ângulos internos e externos; porque a soma dos ângulos internos dos triângulos sempre é de 180°. A soma interna dos ângulos de um quadrilátero é de 360°.” (Sujeito D)

> “A demonstração é muito importante para explicar os porquês de tanta teoria.”; “Quando temos uma hipótese temos que demonstrá-la, mostrar, provar, para que ela venha ser verdadeira.”; “E com as explicações sempre esclarece as duvidas.”; “E para fazermos uma demonstração temos que mostrar várias maneiras que se poderia ver uma hipótese para se tornar verdadeira.” (Sujeito E)

É relevante dizermos que tal questão foi respondida sem qualquer tipo de interferência sobre a concepção que estes alunos tinham a respeito de demonstração, ou seja, em nenhum momento houve de nossa parte uma socialização sobre o tema. Isto nos pareceu necessário para identificarmos qual era o significado, *a priori*, destes sujeitos referentes à demonstração.

No segundo momento, para obtermos um melhor resultado nesta pesquisa sobre os significados da demonstração pelos sujeitos, foram aplicados alguns dos testes objetivos elaborados, denominados por: Geometria 1 e Geometria 2.

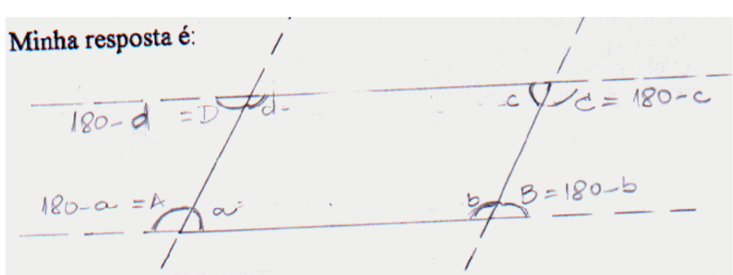
Em oposição ao verificado no procedimento metodológico anterior denominaremos estes testes como *objetivos*. Os testes e os resultados da aplicação destes testes estão a seguir.

Geometria 1: Prove se a seguinte afirmativa é verdadeira ou falsa. Escreva sua resposta de maneira que você obteria a melhor nota possível.“Quando se somam os ângulos internos de um quadrilátero, o resultado é sempre 360°.”

O Sujeito A responde: “Se eu pensar em um quadrado a soma dará sempre 360°.”

O Sujeito B responde:

A + a = 180°
B + b = 180°
C + c = 180°



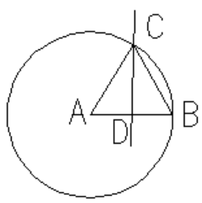
D + d = 180°
a + b + c + d = 360°
A + B + C + D + 360° = 720°
A + B + C + D = 720° - 360°
A + B + C + D = 360°
∴
a + b + c + d = 360°

O Sujeito C responde: "Somando um quadrilátero a soma é 360°, porque ele possui quatro lados, logo 4 (quatro ângulos) e somando seus ângulos obtenho 360°."

O Sujeito D responde: "Porque cada ângulo do quadrilátero é 90° e possuindo quatro lados a sua soma resultará sempre em 360°."

O Sujeito E responde: "Através da explicação de ângulos de triângulo, dá para deduzir o seguinte: Quando dividimos um quadrilátero ao meio temos de um lado 180° e do outro mais 180°, daí somamos dois lados e conclui-se o resultado igual a 360°."

Geometria 2:



A é o centro de um círculo e **AB** é o raio**. C** é um ponto da circunferência onde a mediatriz de **AB** corta o círculo. Prove se a seguinte afirmativa é verdadeira ou falsa. Escreva sua resposta de maneira a obter a melhor nota possível.

O triângulo ABC é sempre eqüilátero.

O Sujeito A responde: "A é o centro da circunferência. AB é a medida do raio. D é o ponto médio da perpendicular de AB e BC."

O Sujeito B responde: "AB = AC = raio da circunferência. Sendo AB = AC e o ângulo CÂB e C$\hat{B}$A têm 60° pois podemos dividir a circunferência, neste caso, em seis triângulos iguais portanto o outro lado será igual pois o ângulo também será de 60°."

O Sujeito C responde: "Se eu tenho um raio A a B, eu traço com o compasso, abertura mais que a metade e encontro assim a mediatriz, encontrando o ponto C. A mesma irá cortar o triângulo ao meio, sendo assim a afirmativa é verdadeira."

O Sujeito D responde: "Sim, porque achando a mediatriz achamos o meio do triângulo e medindo os pontos vamos sempre achar o eqüilátero, porque cada ângulo interno é de 60° assim somando os três lados vamos obter o resultado de 180°."

O Sujeito E responde: "Neste caso sim porque para se construir um triângulo eqüilátero traça-se uma reta qualquer e com auxílio de um compasso acha-se a mediatriz e aí se traça o triângulo que tem medidas iguais."

Acreditamos que os testes, ao introduzirem aspectos relacionados ao contexto da demonstração matemática aos alunos, possam estabelecer uma identificação da linguagem produzida por estes sujeitos, pelo seu professor e pelos livros-textos e, neste sentido, admite-se um significado diferenciado daquele encontrado no primeiro momento desta coleta de dados. Esta diferenciação, também é elemento necessário para uma apresentação da prova mais significativa para os sujeitos pesquisados, evitando assim, uma excessiva exploração da prova unicamente como sinônimo da verificação. Neste sentido, inserimos nossa análise, a reflexão e o alinhamento da questão e dos testes que representam os significados dos sujeitos sobre a demonstração matemática.

Análise dos dados

Com a finalidade de compreendermos e compartilharmos de modo mais abrangente os significados sobre prova e demonstração apresentados pelos sujeitos pesquisados, analisaremos as respostas da questão e dos testes que foram instrumentos para obtermos os significados da demonstração.

Das descrições apresentadas em nossa coleta de dados, extraímos as informações que para nós ficaram evidenciadas no contexto da demonstração. Assim, descrevemos a seguir a nossa análise sob os relatos dos sujeitos.

Análise e reflexão da questão: a busca do significado

Na análise destes significados atribuídos à questão, não encontramos o sentido que é disseminado pela Matemática, ou seja, o rigor, os axiomas e teoremas. Estes temas parecem alheios aos sujeitos. Ainda nesta análise que procedemos, procuramos evidenciar também as categorias significativas que mais representam o significado; *a explicação do que é* a demonstração. Assim, obtemos as categorias significativas da questão *subjetiva*, atribuída aos alunos, sujeitos da nossa investigação sobre os *significados* da demonstração na construção dos seus conhecimentos.

Reflexão sobre os testes objetivos

Nesta instância de nossa análise, na busca dos significados dos nossos sujeitos sobre prova e demonstração, procuramos a imparcialidade (*epoché*) a respeito do objeto estudado. Nesse sentido, passamos a identificar as unidades significativas encontradas nos relatos, ainda que subjetivos, dos nossos sujeitos desta pesquisa.

Destas descrições, observamos e destacamos as palavras que mais se evidenciavam em suas respostas, as unidades significativas. Esperamos com isso nortear na elaboração desta pesquisa, que passará a ser para nós, o significado de provas e demonstrações. Estas descrições nos permitem ainda focar quais são os valores que estão presentes em seus significados.

Testes objetivos: reflexões sobre as unidades significativas

Entendemos que os estudantes desprezam a possibilidade de erros por meio do <u>desenho</u> e aceitam este como uma generalização da prova. Na análise desta unidade procuramos salientar a dualidade existente no contexto. Por um lado argumentamos como Doubinov (1996), quando relata que “o desenho não somente torna mais acessível o conteúdo de um teorema, mas igualmente, o próprio andamento da demonstração”. Isso nos parece ser adequado quando o desenho auxilia na compreensão do enunciado. O próprio Doubinov (1996) encarrega-se de sepultar o valor do desenho quando relata que “[...] com um desenho pouco cuidadoso, infligirão antes de tudo uma verdadeira punição a si mesmos [...]”, onde um erro (intencional ou não-intencional), induz os estudantes a uma demonstração falsa.

Os instrumentos (compasso, régua, transferidor e computador) são meios importantes para demonstrar. Para alguns matemáticos, as ferramentas que auxiliam na construção da matemática sejam, talvez, “um pouco de areia e muito cérebro”. Estes dizeres referem-se a um mosaico onde Arquimedes medita sobre um problema traçado na areia, enquanto soldados romanos o espreitavam ao fundo.

No entanto, convém lembrar que o computador, como ferramenta auxiliar, permitiu a Apple e Haken, em 1976, demonstrarem a *Conjectura das Quatro Cores*, muito embora essa demonstração ainda cause desconfiança a muitos matemáticos. Avançando nestas considerações acreditamos numa estrutura que envolva a realidade do nosso individuo, o meio sócio-cultural onde ele vive e reflita sobre sua realidade.

O exemplo é fundamental para provar e generalizar uma afirmação. Nossa argumentação quanto a esta unidade, refere-se à importância essencial que os sujeitos de nossa pesquisa atribuem, o exemplo à prova. Para eles, o exemplo é parte essencial em uma demonstração e podemos ainda inferir que o exemplo é a própria demonstração ou a prova.

A narração pode ser considerada uma prova. Destas produções de provas apoiando-se sobre a produção de texto ou uso da linguagem, aceitamos aquelas que são produzidas no processo ensino/aprendizagem, no interior da sala da aula. Sabemos, no entanto, que a validez de uma argumentação, que se encontra na língua natural com livres restrições, enquanto que na prática, as regras são profundamente diferentes do que requer o rigor matemático.

Nesse contexto, Balacheff (1999) propõe que se “[...] reconheça a existência de uma relação complexa e constitutiva de cada uma delas: a argumentação se constitui em obstáculo epistemológico à aprendizagem da demonstração [...]”, acreditamos que a ligação estreita da demonstração com um processo axiomático intenso não favoreça, enfim, esta abordagem à prova dos nossos sujeitos.

O alinhamento dos significados da questão e dos testes

Retomando os significados apresentados através das respostas dos sujeitos às questões, partimos para a instância última desta pesquisa, onde serão sintetizados os significados que os alunos pesquisados dão a demonstração.

Da análise dos significados da prova e demonstração sob as respostas dos nossos sujeitos, obtemos duas categorias principais: a explicação e a visualização. Esta relação nos forneceu subsídios para elaborarmos também algumas subcategorias referentes aos significados das respostas dos nossos sujeitos, que foram classificados como:

1. os estudantes desprezam a possibilidade de erros por meio do desenho e aceitam este como uma generalização da prova;
2. os instrumentos (compasso, régua, transferidor e computador) são meios importantes para demonstrar;
3. o exemplo é fundamental para provar e generalizar uma afirmação; e,
4. a narração[3] pode ser considerada uma prova.

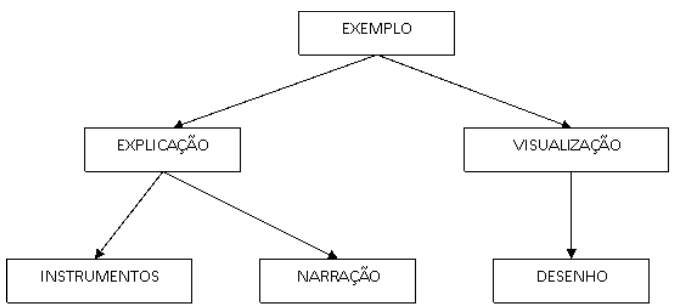
[3] Neste estudo, narração se refere à proposta da situação tal como a apresentada no Geometria1, resposta de Edu, onde diante da narrativa de uma situação, o aluno deva se pronunciar.

De posse das unidades significativas: desenho, instrumento, exemplo e narração extraída dos significados dos testes, elaboramos seus alinhamentos. Deste modo, a **explicação** e a **visualização** como significados, atribuídos pelos sujeitos pesquisados, tem o sentido de tornar claro ao outro algo que possa ser compreendido.

Sob nosso ponto de vista, isto nos leva a considerar que nossos sujeitos quando relatam ou se referem ao **desenho,** sob a forma de elucidar ou expor à luz algo que não fora compreendido ou que visa ser compreendido, desejam, enfim, convencer o outro sob a forma da explicação.

O caminho desvelado pelo desenho também nos permite obter os significados, atribuídos pelos sujeitos, sobre a importância dada aos **instrumentos** manuais como o compasso ou a régua, ou de mídia eletrônica como no caso do computador, o fato é que estes instrumentos são considerados, pelos sujeitos investigados, essenciais para demonstrar. Nesta mesma linha do desenho está a **narração**, entendida por nós como forma de explicar a demonstração por meio da transcrição ou narrativa. Este processo escolhido ou elaborado pelo sujeito tem o propósito de convencer o outro sobre seus argumentos ou a sua impressão sobre o objeto a ser demonstrado. Destas reflexões a respeito do alinhamento das unidades significativas encontramos uma ligação entre elas. Esta ligação pode ser lida sob a forma do **exemplo** comum a todas os significados.

Neste sentido, construímos um diagrama que representa e caracteriza a dualidade destes objetos que foram construídos no decorrer desta pesquisa, sob a luz da prova e demonstração.



Por meio do esquema acima, observamos estas relações, advindas dos nossos sujeitos. Relacionamos a demonstração ou prova rigorosa como um exemplo, seja ela dada por uma certa explicação sob forma de desenho, de instrumentos ou de narração, ou ainda, pela visualização observada nos desenhos.

A relação da demonstração, com determinado exemplo dado por nossos sujeitos, convida-nos a refletir acerca da linguagem e da compreensão desta linguagem que está sendo utilizada nos cursos de formação de professores em Matemática.

No momento que se finaliza nosso trabalho de dissertação, salientamos que, de acordo com a análise por nós processada, pelo observado e exposto, os sujeitos pesquisados nos episódios transcritos, carece de uma melhor exposição por parte dos professores sobre a demonstração, seus objetivos, suas funções e a crítica que se ergue sobre ela.

A nossa argumentação a este respeito, é que o professor propicie em sala de aula um momento para ser tematizada a questão de provas e demonstrações. Fica evidenciado que a análise por nós processada nos forneceu subsídios a fim de elucidar o processo que retrata o significado sobre a demonstração ou prova rigorosa emitidas pelos nossos sujeitos. A finalidade é encontrarmos propostas que permitam a compreensão deste importante objeto dentro da

Matemática, e principalmente, nos cursos que formam os profissionais que estarão aptos a esta disseminação.

Consideração finais

Ao tecermos nossas considerações finais, ressaltamos que o principal interesse desta pesquisa, elaborada com uma amostra de cinco alunos, de um curso de Licenciatura em Matemática, era a busca do significado, que estes alunos atribuem à demonstração matemática. Essa busca residiu na contextualização do objeto de estudo, a demonstração, seus aspectos históricos e sociais, tendo como foco a formação de professores em Matemática.

Embora, muitas vezes, ignorados pelos professores na formação inicial de professores em Matemática, concebemos como elementos essenciais estes aspectos históricos e sociais da demonstração para uma efetiva abordagem deste objeto.

Apontamos para uma licenciatura na qual forme professores que assumam as suas funções; expressar-se com clareza, precisão e objetividade e exerçam seus papéis, entre eles o papel social de educador, a visão histórica e a crítica da Matemática.

Como tratamos também nesta pesquisa, admitem-se diferentes interpretações para a demonstração. Não apenas entre áreas distintas residem divergências. Na formação de professores em Matemática, encontramos discordâncias discursivas dentro da própria Matemática: a pedagógica e a cientifica.

Nos parece importante observar estas divergências, do ponto de vista da epistemologia, onde, os professores de Matemática desenvolvam compreensões sobre a demonstração, para que ela mesma tenha uma função mais significativa entre os estudantes. Bicudo e Garnica (2001), descrevem esses mesmos elementos dizendo que, "a comunicação entre especialistas, na prática científica, restrita a um grupo fechado, funda-se na competência de conteúdos e no domínio absoluto da linguagem própria da área."

Percebemos que a grande dificuldade no ensino didático de uma demonstração está, intrinsecamente ligada a uma metodologia que faça aproximar os estudantes da prova matemática.

Assim, sugerimos e apontamos para, aspectos não-formalizados da demonstração. Estes aspectos têm a finalidade de que, os estudantes, produzam significados apropriados à demonstração. Apontamos para que, as demonstrações, sejam socializadas, entre, professores e alunos, venham ser exploradas pelo uso do computador e sejam abordadas por formas "ingênuas" de prova. Estes argumentos interceptam a contextualização de nossa pesquisa; os aspectos sociais e históricos da demonstração e enfim, as movimentações que pertencem a esse horizonte de conhecimento deverão ficar mais evidentes. Aponta, ainda para uma nova abordagem metodológica. No momento em que a Matemática passa por transformações, inserimos a utilização do computador em sala de aula, a fim de que a compreensão e a sistematização do processo (informatização) estabeleçam novos caminhos ao processo de demonstração.

Exposto enfim, os argumentos finais acima delineados, que acreditamos termos atingidos os objetivos propostos inicialmente, ou seja, encontrarmos os significados que os alunos do curso de Licenciatura Matemática dão à demonstração e que concebem como: um **exemplo** seja ele dado por uma explicação (desenho, narração ou instrumentos), ou ainda, pela visualização (desenho), conduz-nos a um re-direcionamento teórico-metodológico, essencialmente na formação de professores em Matemática.

Referencias

Balacheff, N. (1999). *International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*. Acesso em 12 de Setembro de 2002, disponível em Didactique: http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations . In: H. Freudenthal, *Educational Studies in Mathematics* (p. 23-40). Netherlands: Springer.

Domingues, H. H. (2002). A demonstração ao longo dos Séculos. *Bolema* , p. 55-67.

Doubinov, I. (1996). *Erros nas Demonstrações Geométricas*. São Paulo: Atual/Mir.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer.

Fetissov, A. (1985). *A demonstração em geometria*. São Paulo: Atual/Mir.

Garnica, A. V. (1996). Da literatura sobre a prova rigorosa em Educação Matemática: um levantamento. *Quadrante* , p. 431-451.

Garnica, A. V. (1996). Lakatos e a filosofia do Prova e Refutaçõe: contribuições para a Educação Matemática. *Educação e Sociedade* , p. 431-451.

Garnica, M. A. (2001). Filosofia da Educação Matemática. In: M. A. Garnica, *Filosofia da Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autentica.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange* , 21 (1), p. 6-13.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. *Proceedings of the 20th International Conference for the Psycology of Mathematics Education*. , 3, p. 171-185.

Harel, G., & Sowder, G. (1996). Classifying processes of proving. *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology Mathematics Education* , 3, p. 59-65.

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of student´s approches to proof. *For the learning of Mathematics* , 17 (1), p. 7-16.

Lakatos, I. (1994). *Pruebas y refutaciones: la logica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza.

Nasser, L, & Tinoco, L. (2001). *Argumentação e provas no ensino da matemática*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - Fundão/UFRJ.

Radford, L. (1994). La enseñanza de la demonstracion: aspectos teoricos y practicos. *GEI* , 6, p. 21-35.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching* , p. 28-32.

De LaTorre, E. (2000). La demonstracion. Reflexion en torno a la demonstraciones. *SEIEM* , p. 24 -26.

Villiers, M. D. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com Sketchpad. *Revista Educação e Matemática* , p. 31-36.