Geometria Hiperbólica: resistências e dificuldades em compreendê-la

Karla Aparecida **Lovis**
Universidade Estadual de Maringá
Brasil
karlalovis@hotmail.com
Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá
Brasil
vsfranco@uem.br

RESUMO

O presente artigo relata os resultados de uma pesquisa realizada com um grupo de quarenta e um professores de matemática da Educação Básica com o objetivo de verificar as dificuldades em compreender e a aceitar as geometrias não euclidianas, em particular a geometria hiperbólica. Para atingirmos nossos objetivos recorremos à pesquisa qualitativa e propusemos um minicurso sobre geometria euclidiana plana e geometria hiperbólica com o auxílio do software GeoGebra. Por meio de questionários, das interações e relatos dos professores feitos durante a realização do minicurso, observamos que muitos desconhecem as geometrias não euclidianas e acreditam ser a geometria euclidiana a única geometria possível. Também notamos que os professores têm dificuldades em entender a geometria hiperbólica, principalmente pelo fato de objetos da geometria euclidiana serem utilizados para construir modelos da geometria hiperbólica, mas com significados diferentes.

Palavras chave: educação matemática; ensino de geometria; geometria hiperbólica; geometria euclidiana; formação de professores.

Introdução

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática – DCE – do Estado do Paraná indicam que o conteúdo noções de geometrias não euclidianas deve ser ensinado no Ensino Fundamental e Médio. No Ensino Fundamental o aluno deve ser capaz de compreender noções da geometria projetiva, da topologia e da geometria dos fractais. No Ensino Médio deve-se aprofundar o estudo da geometria dos fractais e introduzir a geometria hiperbólica e a geometria elíptica (PARANÁ, 2008). Sobre a geometria hiperbólica as DCE recomendam: "para abordar os conceitos elementares da geometria hiperbólica uma possibilidade é através do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos)" (PARANÁ, 2008, p. 27).

Na construção das geometrias não euclidianas os aspectos matemáticos e filosóficos se destacam. Os matemáticos, desde a sistematização da geometria euclidiana feita por Euclides na obra *Elementos*, tentaram demonstrar o quinto postulado, também conhecido como postulado das paralelas, mas não obtiveram sucesso. Valendo-se dessas tentativas, eles compreenderam que seria possível construir geometrias que não estão de acordo com pelo menos um dos cinco postulados de Euclides.

Uma dessas geometrias chamada geometria hiperbólica foi desenvolvida teoricamente por Lobachevsky, para só depois ser construído modelos que satisfaziam suas características, conceitos e resultados. No final do século XIX, Poincaré construiu dois modelos para a geometria hiperbólica, cuja axiomatização inicia-se de maneira semelhante à axiomatização da geometria euclidiana. A diferença está no 5º postulado que passa a ser enunciado como: "existe uma reta r e existe um ponto P fora desta reta por onde passam duas retas que não interceptam r".

A geometria hiperbólica, bem como as demais geometrias não euclidianas, não são conhecidas e compreendidas por todos os professores de Matemática da Educação Básica, sendo a geometria euclidiana, para muitos professores, a única geometria existente. De acordo com Santos (2009), muitos professores desconhecem a geometria euclidiana axiomática e tão pouco ouviram falar a palavra axioma.

No decorrer do artigo apresentaremos algumas considerações históricas, filosóficas e matemáticas da geometria euclidiana e da geometria hiperbólica e, por fim, alguns resultados da pesquisa que teve como objetivo identificar resistências e dificuldades dos professores em compreender e aceitar as geometrias não euclidianas, em particular a geometria hiperbólica. Durante o minicurso, os professores relembraram conceitos e propriedades da geometria euclidiana, bem como da geometria hiperbólica, para posteriormente realizarem construções com o *software* GeoGebra[1]. Destacamos que o *software* foi uma ferramenta importante para o desenvolvimento das atividades, uma vez que permitiu a realização das construções de forma dinâmica e interativa e favoreceu a compreensão dos conceitos e relações entre os objetos geométricos.

A pesquisa[2] teve caráter qualitativo, uma vez que propusemos investigar particularidades que envolviam a observação de um grupo de professores participantes de um minicurso sobre geometria hiperbólica em um ambiente computacional. A coleta dos dados se deu por meio de dois instrumentos: gravação em áudio e vídeo e questionário. Foram aproveitadas ainda, para a pesquisa, as observações e anotações da pesquisadora e as respostas do questionário. Os sujeitos da pesquisa foram professores do Ensino Fundamental e Médio da Rede Estadual de Ensino do Estado do Paraná, do Núcleo Regional de Maringá – NRE. Dos quarenta e um professores participantes da pesquisa oito são do sexo masculino e trinta e três são do sexo feminino.

---

[1] O *software* GeoGebra é gratuito e pode ser disponibilizado no endereço http://www.geogebra.org. Acesso: 10 jan. 2010.

[2] Para consultar a pesquisa completa ver Lovis, 2009.

Algumas considerações sobre os aspectos matemáticos, históricos e filosóficos da geometria euclidiana e da geometria hiperbólica

A geometria euclidiana, na primeira fase do seu desenvolvimento, era considerada uma ciência empírica, ou seja, uma ciência em que todos os resultados eram deduzidos diretamente da prática como respostas às necessidades das comunidades (SMOGORZHEVSKI, 1978).

A civilização grega, ao contrário da egípcia, contemplava a geometria não apenas em virtude de suas aplicações práticas, mas do seu interesse teórico. Gálvez (2006) expõe que o momento culminante da geometria como ramo da matemática acontece quando Euclides escreve a obra *Elementos* (aproximadamente 300 anos a.C.), sintetizando o saber geométrico da sua época. Nesta obra, Euclides apresenta alguns axiomas e definições e cinco postulados para construir, de forma dedutiva, com o rigor da lógica, a geometria euclidiana. Os postulados de Euclides[3] são:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, como todo centro e distância, descreve um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009).

O quinto postulado não é tão evidente quanto os quatro primeiros. Ao enunciar suas leis, Euclides as fez de forma universal: “não examina se propriedades de uma determinada linha ou figura realmente existem; examina, ao contrário, as propriedades de todas as linhas ou figuras de tal ou qual espécie devem ter” (BARKER, 1969, p. 28-9).

Durante muito tempo os matemáticos preocuparam-se em questionar a veracidade do quinto postulado (postulado das paralelas), acreditavam que não se tratava de um postulado, mas sim de um teorema. Foi a negação do quinto postulado que desencadeou a construção de novas geometrias. Uma das maneiras de negar o quinto postulado é afirmar que por um ponto fora de uma reta é possível traçar pelo menos duas retas paralelas, fato este que acontece na geometria hiperbólica.

No final do século XIX os matemáticos compreenderam a situação lógica do quinto postulado e afirmaram que este é independente dos outros postulados de Euclides. Ou seja, que é possível existir sistemas geométricos consistentes nos quais o quinto postulado pode ser substituído por uma afirmação contrária (BARKER, 1969).

O desenvolvimento dessa nova geometria surgiu como algo revolucionário, uma vez que vários filósofos, matemáticos e pensadores de épocas passadas haviam afirmado que só existia uma geometria verdadeira, a geometria de Euclides. Poincaré (2008) destaca que:

> [...] depois dos gritos escandalizados, habituamo-nos ao que elas tem de paradoxal; várias pessoas chegaram até a duvidar do postulado, a se

[3] A versão descrita está disponível em Euclides (2009), tradução de Irineu Bicudo.

> perguntar se o espaço real é plano, como supunha Euclides, ou se apresenta uma ligeira curvatura. Chegaram mesmo a achar que a experiência poderia dar-lhes uma resposta a essa pergunta. É desnecessário acrescentar que isso equivaleria a desconhecer completamente a natureza da geometria, que não é uma ciência experimental (POINCARÉ, 2008, p. 110).

O fato de ter sido construída uma geometria que contradiz o quinto postulado de Euclides não quer dizer que a geometria euclidiana não é verdadeira ou que é mais verdadeira que a nova geometria, ambas são verdadeiras e possuem um sistema lógico consistente.

Resistências e dificuldades dos professores em aceitar e compreender a geometria hiperbólica

Por mais de dois mil anos os matemáticos, e as pessoas em geral, acreditavam que a geometria euclidiana era o único conhecimento geométrico possível e que responderia a todos os problemas do mundo físico e matemático. O desenvolvimento das geometrias não euclidianas derrubou essa crença, mas mesmo assim muitos professores de matemática desconhecem a existências dessas geometrias e muitos têm dificuldade em aceitá-las e compreendê-las. Os conceitos e definições da geometria euclidiana exercem forte influência no ensino de geometrias não euclidianas.

Quando falamos de ensino de geometrias fica difícil ensinar esses conteúdos sem utilizar as figuras geométricas. Mas o que deve ficar claro para o professor/aluno é que a figura geométrica representa apenas uma instância física da representação do objeto. Ao representar uma reta paralela passando por um ponto, no modelo do plano euclidiano, obtemos a existência de uma única reta paralela. Ao representar retas paralelas, passando por um ponto, no modelo do plano hiperbólico de Poincaré, podemos obter infinitas retas paralelas que passam por esse ponto. A representação de retas paralelas nesses dois modelos são diferentes. Por isso, devemos ter cuidado ao fazer generalizações e uso de imagens mal explicadas, mal interpretadas, uma vez que podem conduzir a erros e enganos na compreensão de teorias.

Quando questionados sobre o que é o plano do modelo de Poincaré, os professores tiveram dificuldades em compreender que o plano hiperbólico é infinito, por ser o plano o interior do círculo euclidiano. Nos trechos que seguem os ministrantes serão denotados por M e os professores por P. O professor P1 relatou que:

M1*: "e esse plano é finito ou infinito?"*

P1*: "finito".*

M1*: "finito?"*

P1*: "sim".*

O professor P1 entende que por ser o plano o interior do círculo euclidiano ele seria limitado, e equivocadamente finito, e não se preocupou com a definição de plano. Sem dúvida, conceitos e propriedades da geometria euclidiana exercem forte influência quando se tenta mostrar uma "nova geometria" para os professores. A "nova representação" que foi apresentada aos professores causou espanto, uma vez que no modelo de Poincaré podemos “ver” os pontos no infinito, o que não acontece na geometria euclidiana.

O conceito de reta também foi apresentado aos professores, que são: cordas abertas que passam pelo centro O (ou seja, os diâmetros sem os extremos), e arcos de circunferências abertos ortogonais ao horizonte. No decorrer do texto chamaremos as retas nesse modelo, de retas hiperbólicas, ou simplesmente de h-retas.

A professora P2, quando questionada sobre o que é uma reta na geometria hiperbólica, respondeu:

***P2**: “é uma reta que não é “reta”*.

(...)

***P2**: “a gente que chama ela de reta, mas na verdade não existe isso no espaço dele”*.

***M1**: “não, reta por definição é isso: são arcos ortogonais ao círculo euclidiano”*.

Ao falar que “é uma reta que não é *reta*”, a professora P2 usa a noção de reta do senso comum, ou seja, para ela a palavra reta expressa todo o significado de um objeto geométrico, dificultando o entendimento de que aquele objeto geométrico é uma reta no modelo hiperbólico. Sobre as retas, Poincaré (1995) expõe que:

> No espaço, conhecemos triângulos retilíneos dos quais a soma dos ângulos é igual a dois ângulos retos; mas conhecemos igualmente triângulos curvilíneos dos quais a soma dos ângulos é menor que dois ângulos retos. A existência de uns não é mais duvidosa que a dos outros. Dar aos lados dos primeiros o nome de retas é adotar a geometria euclidiana; dar aos lados dos últimos o nome de retas é adotar a geometria não euclidiana. Assim, perguntar que geometria convém adotar é perguntar a que linha convém dar o nome de reta. (POINCARÉ, 1995, p. 41).

Poincaré (1995) destaca ainda que a experiência não pode resolver tal questão e que quando dizemos que a reta euclidiana “é uma reta verdadeira”, e que a reta não-euclidiana “não é uma reta verdadeira”, queremos dizer simplesmente que a primeira ideia intuitiva de reta corresponde a um objeto mais notável do que a segunda. É uma simples observação que procura responder as indagações dos objetos geométricos.

Enquanto, na representação da geometria euclidiana é impossível “ver” pontos no infinito, na representação do disco de Poincaré existem elementos visíveis que representam o inatingível, o infinito. Os pontos ideais, assim como o horizonte – a circunferência – não pertencem ao plano hiperbólico, mas podemos “vê-los”. Ao desenhar uma h-reta, é possível encontrar os pontos de interseção da reta com o plano hiperbólico – os pontos ideais – e esses pontos são necessários para que possamos medir a distância entre dois pontos, por exemplo.

Segue alguns relatos dos professores sobre as dificuldades em compreender e aceitar a geometria hiperbólica. Um dos destaques feitos pelos professores foi que o curso contribuiu para o aprendizado de outra geometria. A professora P3 destaca: “agora já posso compreender melhor, o contato e as reflexões, além da utilização da geometria euclidiana ajudam muito”. Para a professora P4: “após os dois cursos que participei ficou claro a existência de outra geometria que não a euclidiana”.

Valendo-se das respostas dos professores percebemos como a formação inicial e continuada é importante para que eles possam rever e apreender novos conceitos. Ponte (1998) destaca que:

> Para responder aos desafios constantemente renovados que se colocam à escola pela evolução tecnológica, pelo progresso científico e pela mudança social, o professor tem de estar sempre a aprender. O desenvolvimento profissional ao longo de toda a carreira é, hoje em dia, um aspecto marcante da profissão docente. O desenvolvimento profissional permanente é uma necessidade incontornável mas não deve ser visto como uma mera fatalidade. Pelo contrário, deve ser encarado de modo positivo: a finalidade do desenvolvimento profissional é tornar os professores mais aptos a conduzir um ensino da Matemática adaptado às necessidades e interesses de cada aluno e a contribuir para a melhoria das instituições educativas, realizando-se pessoal e profissionalmente (PONTE, 1998, p. 3-4)

Muitos professores, durante o minicurso e nas respostas dos questionários, mostraram-se “afastados” do conhecimento matemático e, a formação continuada pode contribuir para que os professores aprendam novos conteúdos, novas metodologias e reflitam sobre a prática docente. O fato de muitos professores não conhecerem a geometria hiperbólica como um conjunto de axiomas e postulados consistentes, dificultou ainda mais o entendimento dessa geometria.

Alguns professores relataram que a aceitação e a compreensão das geometrias não euclidianas ainda não aconteceram. Professora P5: “mais ou menos, pois frequentei os dois cursos sobre geometrias não euclidianas, porém ainda preciso estudar muito”. O professor P6: “é muito difícil a aceitação, mas já me sinto mais tranquilo em aceitar”. Para a professora P7: “na verdade é preciso uma fundamentação maior para depois haver maior compreensão dos termos utilizados, pois a base sobre o assunto está muito distante das colocações feitas”.

Apesar dos cursos que os professores participaram, a compreensão e a aceitação das geometrias não euclidianas não é garantida. Os conteúdos de geometrias, assim como outros conhecimentos matemáticos, sofrem uma transposição passando do conhecimento científico para o conhecimento escolar. Mazzotti (2008) destaca que o professor durante a sua vivência acadêmica, também tem contato com diferentes representações, opiniões e condutas que o influenciarão na construção do conhecimento e, posteriormente, na maneira como ele ensinará esses conteúdos para os seus alunos.

Outra dificuldade que os professores apontaram foi conhecer somente a geometria euclidiana. Para a professora P5: “o fato dos conceitos terem sido fixados desde a pré-escola com ênfases do tipo: ‘isso não existe’, ‘só isso é certo’”. A professora P6 destaca: “na minha formação acadêmica não lembro de ter visto outra geometria, daí a dificuldade”. A professora P7: “foram tantos anos acreditando na geometria euclidiana que agora é muito difícil compreender a não euclidiana”. Para o professor P8: “a principal dificuldade é ter sempre trabalhado com a geometria euclidiana”.

Em virtude das respostas dos professores, destacamos a importância da formação continuada e de minicursos que apresentem novas metodologias e conteúdos, e que relembre conteúdos já vistos pelos professores, para que possam sanar suas dúvidas e compreenderem melhor os conteúdos matemáticos. A formação matemática dos professores (tanto ao concluir a sua formação inicial como já em serviço) é certamente boa se esses mostram interesse pela sua disciplina, ao conhecer os seus desenvolvimentos e aplicações e, principalmente, resolvendo problemas, pesquisando situações para propor aos seus alunos, e estudando obras e materiais onde se apresentam novas ideias relativas à Matemática, ao seu percurso histórico e ao seu papel na sociedade atual (PONTE, 1998).

Considerações finais

Com a realização do minicurso por possível identificar algumas dificuldades e resistências que os professores apresentam ao estudar o conteúdo de geometria hiperbólica. Acreditamos que a dificuldade em entender essa geometria foi principalmente a "contaminação" da geometria euclidiana, bem como o desconhecimento de conceitos e resultados da geometria euclidiana e da geometria hiperbólica.

Objetos geométricos da geometria euclidiana, na maioria das vezes, são utilizados para construir modelos para a geometria hiperbólica, mas o que muitas vezes não ficou claro para o professor é que esses objetos expressam significados diferentes nesta geometria.

As representações dos objetos geométricos – retas, triângulos, retas paralelas, ângulos etc. – na geometria hiperbólica são diferentes da geometria euclidiana. Os professores estão acostumados com as representações euclidianas e uma "nova representação", constituiu-se em uma dificuldade para o entendimento da geometria. Os professores usaram a noção da palavra "reta", por exemplo, do senso comum. Para eles uma reta deve ser sempre um "objeto geométrico reto". O fato da maioria dos professores conheceram somente a geometria euclidiana e acreditarem ser esta a única geometria possível também dificultou o entendimento da geometria hiperbólica.

Proporcionar aos professores da Educação Básica o estudo das geometrias não euclidianas possibilitará que eles ampliem o conhecimento e o pensamento geométrico, resgatem a história das geometrias, compreendam problemas do cotidiano, aprofundem temas da geometria euclidiana, além de mostrar que a geometria euclidiana não é a única geometria que existe.

Referências

Barker, S. F. (1969). *Filosofia da Matemática*. Tradução: Leonidas Hegenberg e Octanny S. da Mota. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

Euclides. (2009). *Os Elementos*. Tradução: Irineu Bicudo. 1ª ed. São Paulo: Editora Unesp.

Gálvez, D. (2006). *A geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária*. In: SAIZ, C. P. I. (Org.). Didática da Matemática. São Paulo: Artmed Editora.

Lovis, K. A. (2009). *Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica*: o que pensam e o que sabem os professores. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – UEM, Maringá.

Mazzotti, T. (2008). *Para uma “pedagogia das representações sociais”*. In: Revista Educação e Cultura Contemporânea, v. 6 – Nº 11.

Paraná, (2008). *Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básic*a. Curitiba.

Poincaré, H. (2008). *Ensaios fundamentais*. Tradução: Vera Ribeiro. 1ª ed. Rio de Janeiro: Contraponto e PUC Rio.

__________. (1995). *O valor da Ciência*. Tradução: Maria Helena F. Martins. Rio de Janeiro: Contraponto.

Ponte, J. P. (2009). *Da formação ao desenvolvimento profissional*. Encontro Nacional de Professores de Matemática ProfMat, Lisboa, 1998. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/98-Ponte%28Profmat%29>. Acesso em: 5 nov.

Santos, T. S. (2009). *A Inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no Currículo da Educação Básica*. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – UEM, Maringá.

Smogorzhevski, A. S. (1978). *Acerca de la geometria de Lobachevsky*. Tradução: Virgilio L. Más. Editora Mir.

Software GeoGebra. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 17 jan. 2010.