Uso do ambiente computacional GeoGebra como ferramenta para o ensino de Cálculo e Análise com Geometria

José Carlos Pinto **Leivas**
Centro Universitário Franciscano – UNIFRA
Brasil
leivasjc@yahoo.com.br
Ana Regina **Brunet**
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA e Faculdades Portoalegrenses - FAPA
Brasil
anabrunet@cpovo.net
Magda **Leyser**
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA – SENAC
m.leyser@terra.com.br
Brasil
Rosvita Fuelber **Franke**
Universidade Luterana do Brasil - ULBRA
rosvitafranke@ig.com.b
Brasil

Resumo

Esta comunicação científica originou-se a partir de uma oficina, realizada com participantes de um evento internacional de Educação Matemática, ocorrida no segundo semestre de 2010. Durante a realização da oficina, utilizando o software GeoGebra, os investigadores, todos professores da Licenciatura em Matemática, propuseram um problema de limites que exigia representação geométrica envolvendo duas circunferências. Usando uma abordagem construcionista, buscamos compreender como os participantes resolviam o problema usando lápis e papel e, posteriormente, o ambiente computacional. A pesquisa, de cunho qualitativo, mostrou que indivíduos, mesmo tendo cursado disciplinas de Cálculo e Análise Matemática, quando confrontados a utilizar tais conhecimentos, apresentam certas limitações que tendem a ser eliminadas quando se usa um software de Geometria Dinâmica que proporcione desenvolvimento da habilidade de visualização em

problema algébrico ou analítico.

Palavras chave: educação matemática, visualização, geometria dinâmica, cálculo e análise.

Introdução

O software Geogebra, de uso livre, tem sido um potencializador para o ensino de diversas áreas do conhecimento matemático e um aliado para a Educação Matemática, pois permite representar situações não elementares que se encontram em diversos problemas de tais áreas. Dessa feita, o utilizamos para auxiliar na resolução de um problema de Cálculo e Análise por meio de uma visualização dinâmica.

Esta comunicação científica originou-se de uma oficina apresentada no Congresso Internacional de Ensino de Matemática, no segundo semestre de 2010. Os pesquisadores se propuseram a oportunizar uma atividade utilizando Geometria Dinâmica para resolver uma seleção de atividades que contemplassem os conceitos de limite, continuidade e derivada.

A situação-problema que origina a pesquisa, doravante será denominada de "Considerações sobre o caso das duas circunferências", é enunciada da seguinte forma:

Considere uma circunferência fixa C_1 de equação $(x -1)^2 + y^2 = 1$ e uma circunferência C_2, a ser encolhida dinamicamente, com raio r e centro na origem. P é o ponto (0, r), Q é o ponto de interseção superior das duas circunferências e R é o ponto de interseção da reta PQ com o eixo x.

A partir dessa, lança-se o seguinte problema: O que acontecerá com R quando C_2 se contrair, isto é, r tender a zero pela direita?

O aporte teórico

A informática na educação é um novo domínio da ciência; segundo Almeida (2000). Para a autora, uma situação problema passa a ser compreendida por meio de explicações pluralistas embasadas em teorias que se interrelacionam e se entrelaçam com seu próprio contexto; e que, muitos dos desafios enfrentados atualmente, têm a ver com a fragmentação do conhecimento. Uma vez que uma característica da ciência moderna é seguir a racionalidade científica e tendo sido gerado um movimento que perpassa as ciências pela interdisciplinaridade, foi construída uma concepção de informática na educação que se origina de ampla abordagem a respeito de aprendizagem, de conhecimento, de domínio computacional e de prática pedagógica.

Assim, o uso da informática na educação, por meio de computadores, segue duas abordagens: instrucionista e construcionista. Há muito tempo o uso do computador deixou de ser como uma simples máquina de escrever textos e passou a desempenhar um relevante papel na aprendizagem dos alunos. Enquanto na abordagem instrucionista há o funcionamento do ensino, mais ou menos como uma instrução programada a ser seguida pelo aluno utilizando o computador, na abordagem construcionista, a forma de pensamento dos alunos é explicitada e o professor, como orientador do processo, acompanha o desenvolvimento das atividades que o aluno desenvolve no computador por meio de constantes questionamentos sobre a forma como o aluno realiza suas tarefas.

Entendemos que, numa abordagem construcionista, o aluno pode fazer uso de outros recursos como, por exemplo, as redes de comunicação, discutindo com colegas ou com o próprio professor por chat, email, internet e outros, o que favorece a cooperação entre os indivíduos com a finalidade de buscar o conhecimento. Assim, nessa abordagem, o uso do computador torna evidente a aprendizagem de cada um dos indivíduos e uma transformação dessa forma no ensino e na aprendizagem em que se dá ênfase na aprendizagem e não no ensino, deslocando o foco do processo do professor para o aluno como o construtor e não o executor.

Segundo Papert (1994), o instrucionismo e o construcionismo podem ser distinguidos, por exemplo, quanto a uma melhor aprendizagem ocorrer pelo “aperfeiçoamento do ensino” no instrucionismo e uma “produção de maior aprendizagem a partir do mínimo ensino” pelo construcionismo. Um segundo aspecto que se considera importante apontado pelo autor é o uso do conceito de *debuging* (depuração) para dizer que o aluno busca compreender a sua representação do desenvolvimento de micromundos em ambientes de aprendizagem ativa sem preocupação com o certo ou errado bem como com o pré-requisito, tão considerado na formação matemática. Desta forma, o erro passa a ser algo que conduz o aluno a uma nova aprendizagem a partir das tentativas de compreender as causas pelas quais ele ocorreu na sua construção.

Para o mesmo autor,

> A Educação Tradicional codifica o que ela pensa que os cidadãos precisam saber e parte para alimentar as crianças com este “peixe”. O Construcionismo é gerado sobre a suposição de que as crianças farão melhor descobrindo (“pescando”) por si mesmas o conhecimento específico de que precisam; a educação organizada ou informal pode ajudar, principalmente, certificando-se de que elas sejam apoiadas moral, psicológica, material e intelectualmente, em seus esforços. (Papert, 1994, p. 125)

Assim, no construcionismo, o aluno, visualizando na tela do computador os produtos de seus pensamentos e investigações, as inúmeras possibilidades ou tentativas de resolver um problema, motiva-se a se aventurar em novas direções, o que lhe permite construir estruturas cognitivas a respeito do que o professor lhe orienta a realizar. Visualizar aqui, não significa, portanto, apenas ver o que se apresenta na tela e sim organizar essas estruturas que lhe permitirão construir determinados conceitos.

Essa nova forma de compreender visualização, não apenas como “ver com os olhos” é tema recente de pesquisa na área de Educação Matemática e o Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática (PME), a partir da 21ª conferência, ocorrida em 1997, e no PME 22, em 1998, tem mostrado diversificações de interesses a respeito, sendo que o uso de computadores e softwares na aprendizagem e no uso de visualização ganhou espaço ao ser dirigido para os aspectos voltados ao pensamento geométrico, incluindo-se aí o interesse pela teoria semiótica focando o tema.

No entanto, uma maior influência das tecnologias computacionais ocorre no PME 23, com trabalhos sobre visualização como veículo significativo para resolver problemas em álgebra.

Parzysz, citado por Presmeg (Gutiérrez, Boero, 2006), enfatizou, na ocasião, que visualização pode ser útil não somente em tópicos visuais como Geometria e Trigonometria, mas também em Álgebra. São feitas explanações sobre as vantagens de utilizar softwares computacionais que estimulam visualização dinâmica. Os processos visuais, auxiliados pelo computador, motivam a obter facilmente diferenças entre vários tipos de problemas algébricos. Nesse PME, muitos trabalhos estimularam o uso de visualização por meio de Geometria Dinâmica.

Para Borba e Villarreal (2005), visualização é um tema considerado em Educação Matemática como sendo uma forma de raciocínio matemático e pesquisas nessa área têm sido abundantes, embora apresentem vantagens e desvantagens. Entretanto, os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2008) fornecem indicativos para a *geometria* e para as *medidas* por níveis de escolaridade. Assim, indicam que os programas de ensino, desde o pré-escolar ao último ano do Ensino Médio, deverão qualificar os alunos para "Usar a visualização e a modelação geométrica para resolver problemas." (Principios e Normas, 2008, p. 112).

Para Tall (1991, p. 20) muitos dos processos de pensamento matemático avançado já são encontrados em níveis mais elementares (convencer a si próprio, a um amigo, a um inimigo e, antes de um teorema ser conjecturado e provado, há muito trabalho quanto às ideias e relações que serão frutíferas). Afirma esse autor que, para Piaget, "ações e operações tornam-se objetos de pensamento e assimilação". (Idem, p. 49)

Neste trabalho consideramos o conceito de visualização definido por Leivas (2009, p. 22), como sendo "um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos." Dessa forma, visualizar pode ser compreendido como um ato de "ver com a mente". O mesmo autor, em sua tese de doutorado define o termo geometrização do currículo da Licenciatura em Matemática a partir de utilização de abordagens geométricas como método para compreender e representar conceitos de diversas áreas do conhecimento matemático e de outras ciências, por meio de imaginação, intuição e visualização de modo que a Geometria passa a ser um ponto de vista que conduz à geometrização.

A partir desses pressupostos teóricos definimos a metodologia do presente trabalho.

A metodologia utilizada

Uma das características da pesquisa qualitativa em educação é que ela "tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal elemento; os dados coletados são predominantemente descritivos; a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto [...]" (Lüdke e André, 1986, p.11). Assim, a pesquisa realizada com professores e estudantes, em uma oficina durante um evento científico, oportuniza o contato entre o pesquisador e os indivíduos investigados, o que caracteriza nossa pesquisa como qualitativa.

Para Patton (Alves-Mazzotti, 2002), uma característica da pesquisa qualitativa é ela ser "compreensiva" ou interpretativa, o que significa para Alves-Mazzotti (2002) que [...] essas pesquisas partem do pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem sempre um sentido, um significado que não se dá a conhecer de modo imediato, precisando ser desvendado. (p. 131).

Entendemos que, por termos compreensão sobre diversos currículos de Licenciatura em Matemática, uma vez que atuamos nessa em disciplinas específicas de conteúdo e de metodologia, dificuldades com interpretação de problemas de Cálculo e Análise Matemática são inúmeras e, portanto, a oficina foi momento de realizar um experimento com uma abordagem indutiva o que, para Alves-Mazzotti (2002, p. 131), significa "O pesquisador parte de observações mais livres, deixando que dimensões e categorias de interesse emirjam progressivamente durante o processo de coleta e análise de dados".

A oficina envolveu professores da Educação Básica e Superior, estudantes da Licenciatura em Matemática e de Programas de Pós-Graduação. Desses, apenas 9 encaminharam aos pesquisadores o que foi solicitado. A duração da oficina foi de 4 horas e realizada em laboratório de computação com o software previamente instalado.

Numa primeira etapa foi proposta a situação-problema "Considerações sobre o caso das duas circunferências", já enunciado na introdução, e solicitado aos participantes que fizessem um registro por escrito num documento do Word, de forma intuitiva, de uma possível solução, ou seja, enunciar uma conjectura de solução.

A partir do registro feito, os pesquisadores fizeram uma rápida explanação sobre o software GeoGebra e indicaram que poderiam "brincar" por algum tempo com o mesmo. Transcorrido o tempo disponibilizado foi solicitado que fizessem investigações no ambiente computacional sobre a solução do problema, isto é, como os indivíduos representam geometricamente, no software, o problema enunciado algebricamente. Deveriam testar as conjecturas feitas anteriormente e registrar suas conclusões no mesmo documento do Word. Durante essa etapa, os pesquisadores acompanhavam o trabalho dos participantes especialmente se conseguiam representar corretamente C_1, C_2, a reta PQ, a partir dos pontos P e Q e como acontecia a intersecção dessa reta com o eixo horizontal.

Na próxima etapa foi proporcionada uma socialização das resoluções e conclusões obtidas em grande grupo.

A oficina teve continuidade com outras atividades que não são objeto do presente trabalho. Ao final das atividades, utilizando recursos de correio eletrônico, nove participantes encaminharam aos pesquisadores suas soluções, as quais constituem objeto de análise e discussão nessa comunicação científica.

A questão de pesquisa

Partindo dos pressupostos teóricos aqui apresentados, formulamos a seguinte questão de pesquisa:

Existe mudança de concepção na resolução de uma situação problema de limites com o uso do software GeoGebra?

No que segue, apresentamos uma descrição dos atores do processo a fim de que possamos, posteriormente, verificar se houve ou não uma mudança em suas concepções com o uso do software na resolução de uma atividade de Cálculo ou Análise Matemática. A fim de preservar a identidade desses atores na pesquisa, os mesmos foram identificados por letras maiúsculas seguidas de um índice.

Tabela 1

Dados dos atores da pesquisa que enviaram soluções por correio eletrônico.

Nome	**idade**	**Localidade**	**Função**	**Conhece/usa**
A_1	27	Santiago/RS	Educação Básica e Superior	Sim/as vezes
A_2			Ensino Superior	Não
A_3	19	Bento Gonçalves / São Leopoldo – RS	Estudante de Licenciatura em Matemática da UNISINOS e bolsista de iniciação científica na área de educação matemática.	Sim/para estudos [não atua como professor]
A_4	41		Prof. Ensino Básico	Um pouco/não [não realizou a primeira atividade]
A_5			Prof. – Ensino médio em POA – escola particular	Sim/ [Uso o programa para explicar trigonometria, através de uns exercícios realizados por outro colega da área. Demonstração da função seno, cosseno, tangente, secante, cossecante]
A_6		Santa Maria – RS.	Professor de Matemática de Ensino Fundamental e Médio	Sim/não
A_7	29	Santa Maria-RS	Aluna mestrado profissionalizante em Ensino de Física e Matemática	Sim
A_8	27	Rio Claro-SP	Doutoranda e Professora do nível superior	Sim/não [não é conhecimento profundo]
A_9	40		Professor de Matemática do Ensino Médio	Sim/sim [trabalha a 4 anos com o software]
A_{10}	36	Rio Claro –SP	Professor do Ensino Médio	Sim/sim

A partir dos dados da tabela 1, podemos dizer que, apenas um dos participantes não atua ou atuou como professor de Matemática em algum nível de ensino, mas o utiliza como objeto de estudos; há representação de diversas cidades e estados da federação; apenas um diz não ter nenhum conhecimento do software GeoGebra e, quatro não utilizam o GeoGebra em suas aulas. Um dos participantes não realizou a atividade por ter chegado atrasado.

No que segue, apresentamos uma análise das conjecturas iniciais e finais dos participantes.

Análise das falas dos indivíduos

A partir dos dados coletados podemos analisar a conjectura feita pelos participantes, antes e depois do uso do GeoGebra.

A_1 e A_2, que realizaram a atividade em conjunto, consideraram que a reta PQ tende a coincidir com o eixo horizontal na medida em que o raio R da circunferência aumenta. Após o uso do software, entretanto, se deram conta de que essa reta coincidiria apenas quando o raio pertencesse ao intervalo [2,4] e que, nesse caso, o raio r de C_1, tendendo a zero, conduziria R a tender a 4.

Por ser estudante da Licenciatura e ainda possuir pouco conhecimento de Geometria Analítica, A_3 diz que, inicialmente consegue apenas usar a imaginação para perceber o “movimento da figura”, mas de forma pouco concreta, não conseguindo localizar C_1. Ao utilizar o GeoGebra, percebeu que o raio R tende a 4.

A_4 não pode tirar conclusões uma vez que chegou após a realização dessa atividade.

A_5, que utiliza o GeoGebra em suas aulas, faz uma síntese, reunindo os dados do problema. Entretanto, não faz nenhuma conjectura sobre a solução e não explicita qualquer tipo de análise posterior ao uso do software.

Para A_6, que, embora conheça, mas não use o GeoGebra, o desenho em papel lhe permite conjecturar que, quando r tende a zero pela direita, R se aproxima da origem. Conclui que sua conjectura foi errada, após o uso do software, pois havia marcado o ponto P em lugar errado e daí percebe que esse ponto P se aproxima do ponto de coordenada 4, no eixo horizontal.

A_7, aluna de mestrado, faz conjectura de que o ponto R se aproxima da origem do sistema, pois, ao construir a atividade em papel, o faz de maneira errada. Ao utilizar o software, conclui de forma correta que R se aproxima de 4.

Para A_8, aluna de doutorado e professora do ensino superior, não tendo conhecimento profundo do software em sua prática profissional, diz que é difícil verificar visualmente a situação, pois, na medida em que C_2 vai se contraindo o ponto R parece ir se aproximando da origem, mas também os pontos P e Q vão ficando cada vez mais próximos, com coordenadas muito próximas. Depois da construção com a ferramenta computacional percebe que R se situa no eixo horizontal entre as abscissas 2 e 4. Então, quando r tende a zero pela direita, o valor de R tende a 4.

A_9, que trabalha a 4 anos com o GeoGebra, não faz uma conjectura inicial. Analisa para $r < 2$, dizendo que existe o ponto Q de intersecção das circunferências e o ponto R, intersecção da reta PQ com o eixo OX, tende a 4. Afirma que *a atividade é produtiva com a utilização do software, pois com seu dinamismo ele nos possibilita observarmos situações na tela do computador que seria impossível com lápis e papel.*

Por fim, A_{10} afirma que sua intuição lhe diz que R tende a infinito, isto é, R= (a,0) com a tendendo a mais infinito. Após a construção no GeoGebra, afirma ter a impressão de que a medida em que r tende a zero pela direita, a tende a 4 pela esquerda. Ainda diz que o software o leva a crer que $2 \leq a \leq 4$.

A seguir, teceremos as conclusões a que chegamos e nossas considerações finais.

Conclusões

Até onde foi possível perceber, a oficina elaborada, com base no construcionismo, proporcionou aos participantes da pesquisa uma reconstrução de um conceito, iniciado nos cursos de Cálculo e aprofundado na disciplina de Análise Matemática, utilizando os aspectos visuais no sentido apontado por Leivas (2009) uma vez que houve uma mudança na concepção deles. Inicialmente, ao levantarem conjecturas sobre a tendência do ponto R, acreditavam haver uma coincidência do segmento PQ com o eixo horizontal. A visualização do problema, obtida na tela do computador ocasionada pelo dinamismo do software GeoGebra, propiciou que, a grande maioria, reelaborasse sua conjectura inicial e concluísse que a abscissa do ponto R não ultrapassava o ponto do eixo OX de abscissa 4, nem tão pouco em pontos de abscissa menor do que 2, definindo assim o intervalo [2,4] de variação da abscissa do ponto R e, quando o valor de r tendeu a zero, a abscissa do ponto R tendeu a 4.

No que segue, apresentamos algumas considerações de participantes da oficina a respeito da atividade.

Na escrita de A_3 *Eu consigo imaginar o "movimento" da figura, mas de forma pouco concreta. Porém, com o auxílio do software consegui visualizar a situação*, pode-se inferir que, mesmo para alguém que não tenha um conhecimento elementar sobre Cálculo e Geometria Analítica, a imaginação e a intuição presentes no indivíduo na resolução do problema são facilmente referendadas e aperfeiçoadas com o uso da ferramenta computacional. O depoimento de A_3 corrobora o apontado por Tall (1991).

Ao procurar responder ao questionamento: O que acontecerá com R quando C_2 se contrair, isto é, r tender a zero pela direita? A_5 assim se manifesta: *Se desloca para direita na medida do raio de C_2. R se desloca tendendo de 2 a 4 na reta da abcissa*. Observa-se na escrita dele que os aspectos visuais propiciados pelo software deram uma noção dos valores das abscissas do ponto de intersecção da reta PQ com o eixo horizontal sem, entretanto, chegar a uma conclusão sobre a tendência quando o raio r da circunferência C_2 tende a zero.

A_7 manifesta que *No primeiro momento quando construímos a atividade no papel construímos de forma errada as circunferências, com o auxilio do software foi possível percebermos o nosso erro e reformular a conjectura que formulamos errada no primeiro momento*. Sua reflexão mostra a importância do segundo aspecto considerado por Papert (1994) no que diz respeito à depuração, quando o indivíduo busca compreender sua representação inicial em papel e lápis e, posteriormente, no ambiente computacional no qual ocorre sua aprendizagem de forma ativa e interativa na compreensão das causas em que ocorreram os erros na sua construção.

A_8 assim se manifestou a respeito do problema e da oficina: *Após essa verificação, um colega e eu fomos trabalhar com o problema algebricamente. Resolvendo o sistema das duas equações das circunferências, encontrando o coeficiente angular, por fim, encontramos a equação da reta PQ. Como o ponto R pertence ao eixo x e também pertence a esta reta, poderíamos encontrar o valor de sua abscissa x em função do raio r. Assim, podemos calcular o limite dessa função encontrada com r tendendo a zero, e encontramos que o valor de x do ponto R(x,0) é 4.* Esse indivíduo ainda expressa avaliação sobre a oficina realizada afirmando: *O CURSO FOI BASTANTE PRODUTIVO. PROVOCOU DISCUSSÕES E REFLEXÕES DE CERTAS PROPRIEDADES DAS AULAS DE CÁLCULO. O USO DO SOFTWARE FOI FUNDAMENTAL PARA DESPERTAR ESSAS DISCUSSÕES.*

Questionada pelos investigadores sobre a forma como resolveu com lápis e papel o problema, utilizando conhecimentos de Geometria Analítica e de Cálculo, A_8 respondeu que é professora dessas disciplinas e, portanto, tem os conceitos presentes em sua memória o que não é comum aos estudantes em final de Cursos de Licenciatura, quando cursam a disciplina de Análise Matemática, geralmente distanciada dos cursos de Cálculo na grade curricular. A conclusão feita por ela, entretanto, reafirma a importância do uso de Geometria Dinâmica na resolução de problemas algébricos e analíticos.

Acreditamos que, as manifestações dos participantes da oficina aqui descritas permitem que concluamos afirmando que o uso do GeoGebra auxiliou de forma significativa a resolução do problema proposto, sendo um recurso que pode ser empregado tanto nas disciplinas de Cálculo quanto na de Análise Matemática, na construção do conceito de limite. Portanto, geometrizar disciplinas da Licenciatura em Matemática é uma opção que pode produzir uma melhoria na qualificação dos professores de Matemática, especialmente no que diz respeito ao gosto pela Geometria.

Bibliografia e referências

Almeida, Maria Elizabeth de. (2000). *Proposta de uma teoria, Duas grandes linhas para a Informática na Educação, Abordagem instrucionista x abordagem construcionista*. Disponível em http://escola2000.net/eduardo/textos/proinfo/livro09-Elizabeth%20Almeida.pdf> Acesso em: 10 abril 2008

Alves-Mazzotti, A.J. (2002)*O método nas ciências sociais: pesquisa qualitativa e quantitativa.* 2 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

Borba, M.C.; Villarreal, M.E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication, technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer.

Gutiérrez, A. Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.

Leivas, José C. P. (2009*). Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009.* Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 294 p.

Lüdke, Menga; André, Marli E.D. A. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Papert, Seymour. (1994). *A Máquina das Crianças: repensando a escola na era da informática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Princípios e Normas para a Matemática Escolar. (2008). Lisboa: APM. Tradução dos Principles and Standards for School Mathematics, NCTM.

Tall, David. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.