XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática

Representações de objetos espaciais por professores em ação de formação continuada

José Carlos Pinto **Leivas**
Centro Universitário Franciscano– UNIFRA
Brasil
leivasjc@yahoo.com.br
Elisabete Zardo **Búrigo**
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
Brasil
elisabete.burigo@ufrgs.br

Resumo

Este trabalho é um relato de experiência de ação de formação continuada realizada com 27 professores do ensino fundamental e médio. A ação consistiu na realização de uma oficina envolvendo quebra-cabeças geométricos espaciais, cortes em moldes de poliedros confeccionados em isopor e atividades em ambiente computacional. O objetivo da oficina foi desenvolver habilidades de visualização, de representação de cortes em secções planas determinadas nos sólidos geométricos e de cálculos de volumes. A oficina foi motivada por uma pesquisa realizada com professores participantes de cursos de pós-graduação em Educação Matemática de universidades gaúchas, que analisou erros cometidos na resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento matemático e constatou a existência de dificuldades por parte dos investigados quanto à visualização de operações com figuras tridimensionais. Os resultados mostraram que, partindo de experimentações com objetos concretos e computacionais, os indivíduos podem desenvolver a habilidade de visualização e construir o seu espaço representativo.

Palavras chave: educação matemática, geometria, erros, visualização, formação continuada de professores.

Introdução

Um grupo de professores de Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul, Brasil, preocupados com dificuldades apresentadas por professores em formação continuada, propôs-se a avaliar o desempenho desses docentes na solução de problemas de Álgebra, Análise, Geometria, Probabilidade e Estatística. Com o objetivo de analisar os erros cometidos nessas resoluções, foi desenvolvido o projeto "Análise de erros em problemas resolvidos por professores de Matemática em cursos de formação continuada", financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Especificamente no que diz respeito a questões relacionadas à Geometria Espacial, os resultados da pesquisa mostraram dificuldades na representação e interpretação de operações com sólidos geométricos. A partir desses resultados, os dois professores responsáveis pela elaboração e análise das questões dessa área, juntamente com a coordenação, optaram pela realização de uma oficina que, de um lado, oportunizasse aos professores participantes o desenvolvimento de suas próprias habilidades de visualização e representação, e que, de outro lado, oferecesse atividades possíveis de serem adaptadas e reproduzidas por esses professores com seus alunos do Ensino Fundamental e Médio, em sala de aula. Uma motivação adicional para a oficina foi a da revisão do estudo de volumes, considerando-se que as dificuldades frequentemente levam professores, no ensino desse tema, a se limitarem ao simples uso de fórmulas conhecidas, sem a análise das relações envolvidas entre os sólidos.

Com esses objetivos, os proponentes deste relato realizaram a Oficina "Quebra-Cabeças com Sólidos Geométricos". Dela participaram 27 professores do Ensino Fundamental e Médio das redes estadual, municipal, federal e privada de Porto Alegre e Canoas, no Rio Grande do Sul. Pela manhã, foram desenvolvidas atividades de quebra-cabeças espaciais com materiais manipulativos. À tarde, foram realizadas experimentações em ambientes computacionais e com objetos de aprendizagem da geometria dinâmica.

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma análise de algumas representações realizadas pelos participantes, além de aspectos relativos à formação de professores em ação continuada detectados pelos pesquisadores.

O aporte teórico

Experimentos com materiais manipulativos, visualização e representação estão, no nosso entender, intimamente relacionados e devem estar presentes na ação pedagógica, a fim de que se alcance uma melhoria na qualidade do ensino de Geometria nos diversos graus de escolaridade, especialmente na formação de professores de Matemática para a escola básica. É bem sabido, por todos que atuam na formação de professores de Matemática, que há muitas dificuldades em renovar os currículos da Licenciatura em Matemática, eliminando alguns conteúdos ultrapassados e introduzindo outros recentes, bem como metodologias diferenciadas.

Para Freudenthal (1973), a Geometria não é apenas uma parte irresistível de uma ciência dedutiva, ela é o exemplo mais antigo e mais explícito da didática. Para o autor, "Se hoje há motivos para se preocupar com o futuro do ensino da Geometria e, mesmo temer que ela possa desaparecer do currículo, em primeiro lugar os culpados são aqueles que, ativa ou passivamente, têm resistido em inovar o ensino da Matemática." (p. 402). Se a Geometria, como um sistema lógico, deve ser imposta aos estudantes, então, para Freudenthal, muito melhor seria aboli-la, pois ela só pode ter significado se for explorada sua relação com o espaço experimentado pelos aprendizes. O autor diz ainda que a "Geometria é uma das melhores oportunidades que existe para aprender como matematizar a realidade." (p. 407). Portanto, a Geometria oferece inúmeras oportunidades de o estudante fazer descobertas matemáticas.

Dentre essas inúmeras possibilidades de fazer descobertas em Geometria, encontram-se os experimentos com materiais concretos ou manipulativos e, mais recentemente, as tecnologias computacionais, tais como os softwares de Geometria Dinâmica. Nesse sentido, o próprio Freudenthal (1973) refere-se à teoria de van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio por meio de uma Geometria Experimental afirmando: "É perfeitamente natural que o ensino de Geometria com material concreto começa no espaço" (p. 408).

Segundo Nasser (1992), o modelo de van Hiele combina estruturas cognitivas e pedagógicas do ensino de Geometria, dando, portanto, algumas sugestões sobre o modo como esse ensino pode ser melhorado. Uma vez que nem todas as pessoas têm formas de pensar iguais, proporcionar atividades diferenciadas que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio é uma das prováveis maneiras de melhorar a desempenho em Geometria. Para Van de Walle (2009, p. 440), "atualmente, a teoria dos van Hiele se tornou o fator mais influente no currículo de Geometria norte-americano e de diversos países".

No primeiro nível do modelo, que os autores chamam visualização, os objetos do pensamento são as formas e aquilo que elas podem parecer, e a utilização de recursos como quebra-cabeças, em que os estudantes podem, pelo manuseio dos objetos, estabelecer relações e tirar conclusões. A partir dessa perspectiva entende-se a importância da oficina em apreço na tentativa de contribuir para a construção mental de futuras representações.

Para Van de Walle (2009, p. 439), "O senso espacial pode ser definido como uma intuição, ou uma sensibilidade, sobre formas e as relações entre formas". Além disso, para o autor, esse senso inclui a habilidade de visualização, a qual é um dos quatro objetivos indicados nos Padrões em Geometria, constantes nos Princípios e Padrões americanos.

Entendemos que a habilidade de visualização é muito mais do que "ver com os olhos", isto é, perceber determinado objeto com o órgão físico da visão, e essa habilidade tem sido estudada por autores como (Costa (2000), Zimmermann e Cunningham (1991), Guzmán (1997), Arcavi (1999), Fischbein (1987)). Leivas (2009, p. 22) assim define essa habilidade: "Visualização é um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos".

A relação entre intuição e visualização é um aspecto relevante que não pode deixar de ser aqui considerada. Para tal, nos reportamos ao que nos ensina Fischbein (1987), ao identificar visualização com o conhecimento intuitivo, uma vez que intuições são imediatas e aparentemente são auto-evidentes: "É uma afirmação trivial que se tende naturalmente a pensar em termos de imagens visuais e que o que não se pode imaginar visualmente é difícil de conceber mentalmente" (p. 103). Para o autor, imagens como modelos podem propiciar relações e propriedades não pertinentes a determinada estrutura conceitual. "Entretanto, visualização, envolvida em uma atividade cognitiva adequada, continua a ser um fator fundamental contribuindo para uma compreensão intuitiva." (p. 103).

Além disso, Fischbein (1987, p. 104) acrescenta:

> Representações visuais não somente auxiliam na organização da informação em representações como constituem um importante fator de globalização. Por outro lado, a concretude de imagens visuais é um fator essencial para a criação de um sentimento de auto-evidência e imediatez. Uma

> imagem visual não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas é também um fator importante para orientar o desenvolvimento de uma solução analítica; representações visuais são essenciais dispositivos antecipatórios.

Portanto, desenvolver representações de objetos espaciais é uma habilidade que vai muito além de produzir um mero desenho do objeto. É necessário que, na representação, estejam envolvidas as relações entre os componentes do objeto, como, por exemplo, uma aresta que liga um vértice a outro consecutivo num poliedro, a qual pode ou não aparecer em verdadeira grandeza, ser visível ou se apresentar oculta, da mesma forma que duas faces. Por outro lado, duas arestas que não são consecutivas devem ser traduzidas sem uma ligação contínua, bem como duas faces. Tais relações devem ser bem explícitas na representação, o que não se percebe, muitas vezes, na atividade do professor que apresenta grande dificuldades a respeito, talvez pela ausência de disciplinas como Geometria Descritiva e Desenho Geométrico em muitos cursos de Licenciatura em Matemática.

Para Piaget e Inhelder (1993, p. 19), "as estruturas perceptivas ou sensório-motoras constituem, inicialmente, o ponto de partida e, após, a subestrutura de toda a construção representativa do espaço". Para os autores, "A percepção é o conhecimento dos objetos resultante de um contato direto com eles. A representação consiste, ao contrário - seja ao evocar objetos em sua ausência, seja quando duplica a percepção em sua presença -, em completar seu conhecimento perceptivo referindo-se a outros objetos não atualmente percebidos. (p. 32).

Assim entendemos que, sendo o espaço perceptivo construído antes do representativo, a exploração de recursos manipulativos ou concretos pode e deve ser um facilitador. Isso vale mesmo para indivíduos com grau de escolaridade mais elevado do que os estudados pelos autores, uma vez que etapas no ensino e na aprendizagem em Geometria, segundo nosso entendimento, são "queimadas" ao longo da escolaridade, prejudicando o desenvolvimento do pensamento geométrico tanto em alunos quanto em professores, que se limitam, muitas vezes, à utilização de fórmulas e algoritmos prontos.

As atividades da oficina

A oficina "Quebra-Cabeças com Sólidos Geométricos" foi realizada na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, com duração de 8 horas. Participaram vinte e sete professores, com atuação profissional distribuída como segue: 51,9% atuam como professores do Ensino Fundamental; 7,4% atuam no Ensino Fundamental e no Médio; 3,7% atua no Ensino Fundamental, no Ensino Médio e EJA; 3,7% atua no Ensino Médio e no Superior como substituto; 3,7% atua no Ensino Médio; 3,7% atua na EJA; 7,4% atua em função administrativa; 18,5 não informaram.

A oficina desdobrou-se em três momentos. Na primeira parte foram utilizados quebra-cabeças espaciais com o objetivo de proporcionar a obtenção de relações entre volumes de sólidos geométricos e sua representação geométrica, a partir de jogos geométricos. Para a realização da atividade, foram distribuídos kits de peças de quebra-cabeças para que os participantes trabalhassem em duplas.

As duplas deveriam, em primeiro lugar, identificar os modelos apresentados e, na sequência, esboçar representações de: tetraedro regular [4 cm de aresta]; não regular [duas faces como as do regular e duas faces formadas por regiões limitadas por triângulos retângulos isósceles cujos catetos têm a mesma medida da aresta do tetraedro regular]; pirâmide de base quadrada [formada pela justaposição de dois tetraedros não regulares e cuja base é dada por uma região quadrada cujo lado tem a mesma medida da aresta do tetraedro regular]. A partir desses, outros quebra-cabeças foram indicados para montagem e representação até a montagem de uma estrela de oito pontas, resultante da intersecção de dois tetraedros regulares idênticos, e finalizando com o completamento de um cubo a partir dessa estrela e utilizando outros tetraedros. Com esse, pretendia-se estabelecer a relação entre o volume da pirâmide ou tetraedro regular e o volume do cubo, isto é, de que o volume do tetraedro regular inscrito num cubo é um terço do volume desse cubo.

Na segunda parte foram utilizados cortes em sólidos (prismas), com o objetivo de identificar as secções feitas no prisma por planos que seccionem arestas e faces e, também, familiarizar os participantes com o uso de estiletes e sólidos confeccionados com isopor. Foram distribuídos pequenos prismas [sobras de recortes dos prismas maiores] a fim de que os participantes experimentassem recortar, utilizando estiletes, por planos que seccionam as arestas/faces do prisma e, posteriormente, fossem feitas as identificações das secções realizadas por planos que interceptam as faces de prismas de base retangular.

Os participantes deveriam, em duplas, discutir os resultados obtidos, identificando similaridades e diferenças encontradas e anotá-las na folha distribuída. De forma similar, deveriam realizar as atividades com outros modelos fornecidos.

Por fim, foi proposta uma discussão no grande grupo sobre os resultados obtidos, incluindo o questionamento sobre o número máximo e mínimo de lados das regiões poligonais resultantes dos cortes.

Na finalização das atividades correspondentes às duas primeiras etapas, foi solicitado que os participantes respondessem, por escrito, aos seguintes itens: “1. Faça considerações que julgar convenientes sobre os cortes realizados. 2. Considerando sua experiência no ensino de Geometria, quais possibilidades você percebe que essas atividades podem oferecer para a melhoria do ensino dessa disciplina?”

Na terceira parte da oficina, foram realizadas atividades em ambiente computacional, no sentido de desenvolver habilidades de visualização por meio de rotações, seccionamentos e planificações de sólidos. Na primeira atividade dessa parte, foram utilizados objetos de aprendizagem disponíveis em http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/objetos/visualizacoes.htm: os participantes deveriam resolver quebra-cabeças tridimensionais virtuais, girando peças para descobrir ou testar se “encaixavam” adequadamente umas nas outras. Para a segunda atividade dessa parte, estava prevista a utilização da “Pletora de Poliedros” disponível no site http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html. Entretanto, como o site não estava acessível, decidiu-se recorrer ao software Poly. Foi solicitado aos participantes que escolhessem um sólido arquimediano, a partir de uma lista disponível no software, e que fosse explicado como esse pode ser obtido a partir de um sólido platônico, com seccionamentos ou justaposições. O mesmo exercício foi realizado a partir da escolha de um “sólido de Johnson”. Na finalização dessa atividade, foi solicitado aos participantes que estabelecessem relações de volumes entre alguns sólidos disponíveis no programa Geospace. Com essas atividades, pretendeu-se estabelecer comparativos com as atividades desenvolvidas nas duas primeiras partes da oficina, a fim de verificar o desenvolvimento em termos de estabelecimento de relações entre os volumes de sólidos, bem como a evolução das representações.

Análise das atividades realizadas

Ao fazerem representações do tetraedro não regular, do regular e da pirâmide de base quadrada, num primeiro registro, na primeira parte da oficina, observou-se uma grande dificuldade, uma vez que a maioria não conseguiu representar a terceira dimensão do objeto. Por exemplo, no primeiro desenho da Figura 1, não é representada uma aresta e não ficam caracterizadas duas das faces do tetraedro. Vale ressaltar que duas faces do tetraedro fornecido eram triângulos equiláteros e duas eram triângulos retângulos isósceles. Na representação do tetraedro regular, percebe-se o prolongamento da aresta não visível até o ponto médio da aresta oposta e visível, o que não faz sentido, uma vez que essas arestas, no objeto, não se interseccionam. Além disso, nenhuma face aparece em verdadeira grandeza, dando a ideia da regularidade das faces, ou seja, regiões triangulares equiláteras. Na representação da pirâmide de base quadrada, não se tem noção do que é visível e do que não é visível. O recomendado seria que arestas não visíveis fossem representadas por linhas tracejadas, o que não é feito em nenhuma das três representações.

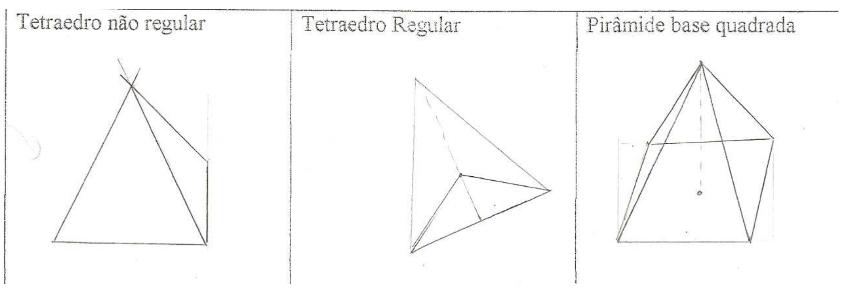

Figura 1. Representação do tetraedro regular, do não regular e da pirâmide de base quadrada, feita por uma das participantes.

Quanto à figura 2, podemos observar que um dos professores nem sequer conseguiu representar o tetraedro não regular e representou o regular de forma bastante precária, não explicitando em sua representação a noção de quatro regiões triangulares equiláteras. Por sua vez, na pirâmide de base quadrada, visivelmente esse é um retângulo com lados paralelos dois a dois, entretanto parecem distintos.

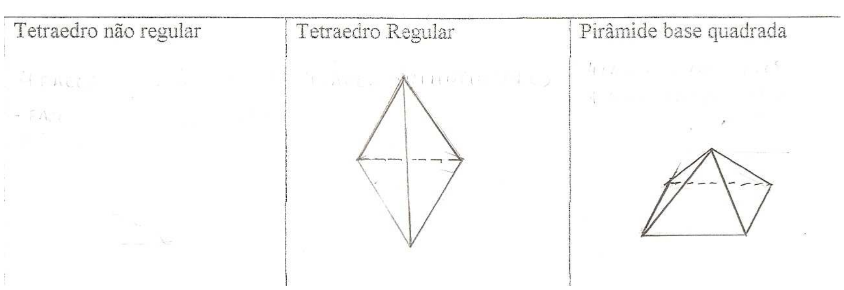

Figura 2. Representação do tetraedro regular, do não regular e da pirâmide de base quadrada, por outro professor.

As atividades tiveram nível de dificuldade crescente, tanto para a montagem do quebra-cabeças quanto para a representação. Entretanto, observou-se que, a medida em que as atividades iam se desenvolvendo, as relações iam sendo estabelecidas e as representações sendo aperfeiçoadas. Inclusive, na representação da estrela de oito pontas, obtida pela intersecção de dois tetraedros regulares, os indivíduos encontraram alternativas que facilitavam a visualização na representação, colorindo, sombreando ou mesmo hachurando partes dessa. A figura 3, a seguir, exemplifica a evolução das representações, muito embora, já de imediato, o participante comece a representação com muita propriedade ao indicar as medidas das arestas. No conjunto de quebra-cabeças 2, foram fornecidos dois tetraedros não regulares congruentes para a montagem de uma pirâmide de base quadrada e, na sequência, duas pirâmides de base quadrada congruentes para a montagem de um octaedro regular. No conjunto de quebra-cabeças 3, foi solicitado montar um tetraedro regular maior constituído de um octaedro e quatro tetraedros regulares. Observe o cuidado do participante em indicar, com linhas tracejadas, os pontos médios onde os tetraedros menores se encontram com o octaedro. Por fim, o sombreado utilizado dá uma melhor dimensão dos objetos espaciais e a profundidade exigida.

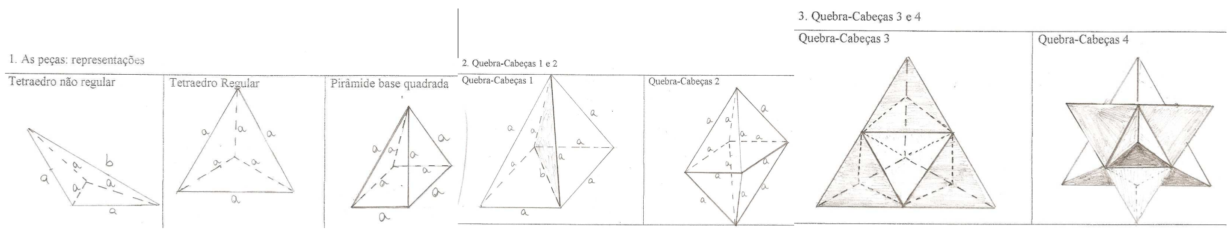

Figura 3. Sequência de representação dos quebra-cabeças feita por uma das professoras.

Como culminância, havia o desafio de colocar a estrela de oito pontos num cubo cuja planificação era fornecida em cartolina e completar o cubo com mais doze peças de tetraedros não regulares. O desafio foi grande, pois a totalidade dos participantes não acreditava que isso seria possível. Quando, finalmente, conseguiram colocar todas as peças no interior do cubo, houve uma grande alegria.

Na discussão sobre os volumes das peças, os participantes haviam concluído, inicialmente, que cada tetraedro regular pequeno tinha o mesmo volume de um tetraedro não regular, pois tinham uma base em comum (região triangular equilátera) e a mesma altura em relação a essa base. A partir daí, puderam concluir que o volume de cada octaedro montado correspondia ao volume de quatro tetraedros regulares pequenos e que, portanto, o volume de cada tetraedro regular maior (ver Figura 3) correspondia ao volume de oito tetraedros regulares pequenos. O volume da estrela de oito pontas correspondia, portanto, ao volume de doze tetraedros pequenos e, com o completamento do cubo, os participantes puderam concluir que o volume do cubo correspondia ao de vinte e quatro tetraedros pequenos ou três tetraedros maiores. Portanto, concluíram que o volume de cada tetraedro maior correspondia a um terço do volume do cubo (sendo cada aresta desses tetraedros igual à diagonal de cada face do cubo).

Quanto às atividades de seccionamentos planos, feitas com os estiletes fornecidos, nos moldes em isopor, as dificuldades foram maiores para vencer o desafio de descobrir qual o maior número de lados que poderia ser obtido nas secções poligonais. Apenas dois participantes conseguiram concluir, sem intervenção dos ministrantes da oficina, a possibilidade de obtenção de regiões de cinco e de seis lados. Foi promovido um fechamento da atividade solicitando àqueles que tinham conseguido que mostrassem aos demais a forma como haviam raciocinado para obter os resultados.

Nos registros dessa atividade, os participantes deveriam nomear os sólidos, identificar o número de faces e de arestas seccionadas e a secção obtida por cada corte e esboçar uma pequena representação do seccionamento.

A tabela 1, a seguir, traz um resumo das respostas dos participantes à primeira solicitação feita por escrito: "Faça considerações que julgar convenientes sobre os cortes realizados." Optamos por nomear os professores por P1, P2, etc, para resguardar suas identidades.

Tabela 1

Considerações dos professores a respeito de cortes realizados em moldes de isopor.

PARTICIPANTE	Considerações feitas pelos professores[1]
P1	Cortes paralelos só produzem faces de 4 lados.
P2	Senti no primeiro momento uma certa dificuldade, e posteriormente observei que é possível através dos cortes obter figuras com números de faces diferentes.
P3	Não respondeu.
P4	Buscamos desde o início cortar um pentágono, escolhemos buscá-lo sem nenhuma justificativa teórica, apenas por uma convicção de que era possível. Nesta busca encontramos o triângulo e retângulo primeiro e por fim encontramos o pentágono e um quadrilátero irregular. Um colega encontrou um hexágono, que depois da justificativa, tornou mais fácil de enxergar o corte.
P5	A possibilidade da construção e visão dos cortes e das figuras construídas.
P6	O número de figuras cortadas será igual ao número de lados do polígono.
P7	O que limita os cortes é a nossa limitação visual dos planos. O mais visível são os planos paralelos e perpendiculares, logo tudo que difere disto, nos trás dificuldades.
P8	Como foi comentado, os cortes que geraram figuras de 3 e 4 lados foram facilmente identificados já os de 5 e 6 lados exigiram um pouco mais de observação para serem percebidos.
P9	Não respondeu.
P10	- Nossa imaginação é limitada. - Sempre pensamos em secções planas paralelas as faces. - Dificuldade de fazer os cortes pois o estilete não torna preciso o corte. - Talvez se marcasse com uma caneta o corte, depois, ficaria mais fácil.
P11	Não respondeu.
P12	Foram fundamentais para conseguirmos relacionar o número de lados do polígono do corte com o no. de faces e arestas. Haviam alguns cortes que não eram de fácil compreensão, sendo apenas imaginados, o recurso do corte em isopor auxiliou nesta compreensão.

[1] As considerações constantes nas tabelas são transcrições literais das respostas dos professores.

P13	Inicialmente tinha entendido que cada corte era isolado, como se a peça (bloco) não tivesse sido cortado. Após os relatos e apresentação dos colegas vi que os cortes (cada devia ser considerado), seis faces logo o máximo de lados é 6. Número de faces igual a número de arestas cortadas.
P14	Não respondeu.
P15	Os 3º. Primeiros cortes foram tranqüilos do 2º últimos mais difícil de perceber. O desafio do tetraedro foi percebido depois da montagem com o material concreto da atividade anterior.
P16	É interessante, pois os cortes geram diversas figuras planas.
P17	Para encontrar o pentágono e o hexágono temos que fazer cortes “complicados”.
P18	Fiz os cortes + simples, pq estava um pouco atrapalhada.
P19	Considero uma grande dificuldade imaginar planos que não sejam perpendiculares a uma face.
P20	Conforme o ângulo que cortávamos o isopor encontrávamos figuras diferentes.
P21	Se corto no sentido da fig. fica com os mesmos sólidos menores. Se corto no sentido contrário fica também com um sólido de quatro lados. Se corto na perpendicular fica com um fig. de 4 faces também. Não imaginei o corte na mediana de cada ponta p/ conseguir outras faces.
P22	Relacionar as faces do objeto a ser cortado com o no. de lados da face a ser obtida com um corte. A possibilidade de mostrar associação c/ Geometria plana e espacial.
P23	Temos que cuidar os vértices e lados paralelos para obtermos o máximo de lados na fig.
P24	Os cortes paralelos a arestas ou faces nos dão figuras com 4 lados. Os cortes não paralelos possibilitam um maior número de lados para as figuras planas obtidas. As figuras pentágono e hexágono são mais difíceis de serem feitas, na minha opinião.
P25	Foi complicado enxergar cortes que não resultassem em áreas poligonais triangulares e quadrangulares.
P26	Cortes paralelos a arestas origina polígonos de 4 lados. Cortes paralelos as faces. Cortes transversais originam polígonos com outro número de faces.
P27	Não respondeu.

Das respostas constantes na tabela acima se pode verificar a importância de uma didática adequada à Geometria e seu ensino, como apontado por Freudenthal (1973), na medida em que os aprendizes possam obter significado dos entes geométricos pela experimentação. Como destacado por P5, os aspectos visuais obtidos pela experimentação tendem a desenvolver as estruturas cognitivas e pedagógicas como indicado por Nasser (1992), bem como o desenvolvimento do senso espacial e a habilidade de visualização de acordo com Van de Walle (2009).

A tabela 2, a seguir, traz as considerações dos indivíduos a respeito da segunda solicitação feita: “Considerando sua experiência no ensino de Geometria, quais possibilidades você percebe que essas atividades podem oferecer para a melhoria do ensino dessa disciplina?”

Tabela 2

Considerações dos professores a respeito de possibilidades de uso da oficina em sua prática.

PARTICIPANTE	Considerações feitas pelos professores
P1	Para visualização e compreensão de cortes equivalentes de.
P2	Através das atividades de manipulações das peça os alunos terão mais facilidade decompreensão das relações entre as figuras.
P3	Não respondeu.
P4	A construção do sólidos e comparação e combinação para a composição de outro, sempre achei ótimas, mas o que vai modificar é a ideia do objeto que cabe dentro de qual, porquê. E fazer cortes no isopor faz com que o aluno tenha que adiantar ao corte o raciocínio, seria bom, pensarei em outros materiais que possam produzir o mesmo efeito, do isopor e estilete.
P5	Não respondeu.
P6	Despertar a curiosidade e cooperação entre os alunos. E claro a construção do conhecimento.
P7	Melhor visualização dos planos que seccionam os sólidos.
P8	Com certeza, todas as atividades práticas contribuem para uma melhor percepção, compreensão dos conhecimentos a serem trabalhados.
P9	Consegui visualizar e identificar os sólidos.
P10	Maior dificuldade para geometria, é a visualização, ou seja, os alunos não conseguem imaginar as construções espaciais, revoluções. O material manipulativo é uma alternativa para driblar essa dificuldade.
P11	Não respondeu
P12	Eu costumo trabalhar muito com geometria com diversos conteúdos, pois acredito que a geometria é uma base fundamental para construção da lógica, raciocínio e visão espacial que auxilia na aprendizagem de diversos conteúdos, como por exemplo a Álgebra. Então as possibilidades são diversas e com certeza melhora muito o ensino pelo que tenho de experiência.
P13	A manipulação ajuda na construção do conhecimento e relação dos conceitos.
P14	Não respondeu.
P15	O material concreto sempre é mais fácil de colocar o conteúdo. Penso que trabalhar com essa montagem de sólidos e sua relação é um ponto de partida para vários conteúdos que podemos relacionar com a álgebra e aritmética.
P16	Penso que através de atividades lúdicas, os alunos podem aumentar sua visão espacial e plana. Pois através dos cortes, visualizam-se figuras planas.
P17	Fazer com que os alunos experimentem concretamente para depois construírem conceitos.
P18	A troca de ideias entre os colegas, bem como uma atualização dos nossos saberes. Gostei muito dessa atividade e gostaria de poder participar de outras oficinas também.
P19	A possibilidade de trabalhar no concreto planos não perpendiculares.

P20	Achei muito válida essas atividades, pois o aluno visualiza e concretiza comprovando o que os livros didáticos nos ensinam. Isto faz com que o aluno possa deduzir e comprovar suas hipóteses.
P21	Muitas, porém com o material adaptado p/ a realidade do nosso aluno. Adorei.
P22	A visualização e a construção permitem perceber relações geométricas que não são tão óbvias no quadro.
P23	Muitas, pois explorou a visualização de maneira concreta e bem diversificada.
P24	Acho muito importante a manipulação dos objetos e as perguntas feitas pelo prof/profa. Para que os conceitos possam ser elaborados e até aperfeiçoados. A dinâmica da aula em duplas também é importante para a comparação de ideias e cooperação. Muito legal essa oficina.
P25	A construção de conceitos como face, aresta, vértice, áreas poligonais, polígonos...
P26	Enormes possibilidades de manipular para aprender e de uma maneira lúdica e desafiadora
P27	Não respondeu

A tabela 2, acima, dá alguns indicativos de como atividades concretas e manipulativas podem auxiliar na construção das estruturas perceptivas ou sensório-motoras, de acordo com Piaget e Inhelder (1993), como nas indicações de P8 e numa consequente habilidade de representação, como apontado por Fischbein (1987), o que pode se percebido na fala de P10. Assim, mesmo indivíduos com formação matemática obtida na Licenciatura, podem desenvolver as habilidades intuitivas e visuais por meio de atividades como as propostas e desenvolvidas na oficina de acordo com os registros feitos pelos participantes.

Na terceira parte da atividade, os participantes não tiveram dificuldades com a solução dos quebra-cabeças virtuais. Também mostraram relativa desenvoltura ao elaborar descrições verbais dos sólidos arquimedianos e dos sólidos de Johnson, a partir de cortes ou justaposições de sólidos platônicos. Para atender aos limites estabelecidos para os trabalhos, optamos por não detalhar os comentários sobre esse momento da atividade.

Ao final, os participantes foram solicitados a responder a questão: “Que tipo de construção de conhecimento geométrico é propiciado pelas atividades desenvolvidas na oficina?”. Seguem alguns dos comentários apresentados pelos participantes: a oficina “fez nós professores repensar como estamos construindo os conceitos, a geometria dos movimentos faz com que tenhamos vários ângulos de visão”; “a possibilidade de construção do conhecimento com atividades concretas”; “o conhecimento baseado na visualização, enxergar o que se está fazendo”; “o programa propicia o movimento das figuras, diferentemente das figuras dos livros, que são estáticas”; “construímos as propriedades geométricas dos sólidos estabelecendo as principais relações”, “sem preocupações com ‘receitas’ para alunos”.

Conclusões

Foi possível observar, durante a realização da oficina, que atividades com materiais concretos ou manipulativos permitiram aos participantes desenvolver o senso espacial e as representações planas de objetos espaciais. A partir dos questionamentos propostos e na medida em que os objetos puderam ser manuseados e os participantes debateram entre si e com os orientadores das atividades, perceberam a necessidade de organizar as relações entre os elementos constituintes dos sólidos. Ao dialogarem com seus pares sobre as representações que ~~se~~ realizavam, sentiram a necessidade de melhorá-las a fim de que se estabelecesse a comunicação. Isso é algo que, geralmente, não é feito na escola quando o professor, na maioria das vezes, indica o que deve ser feito ao aluno, e esse, passivamente, aceita o que o professor lhe indica como verdade.

Podemos afirmar que visualização não é algo nato, que não é imediata e que pode ser construída mediante o uso de recursos apropriados, de modo que os indivíduos possam fazer sua construção mental. Segundo autores como Piaget e Inhelder (1993), abstrair é invocar um objeto na ausência dele e, assim, a partir da construção das estruturas mentais a representação em papel flui naturalmente, pois o desenho não é exatamente aquilo que se vê e sim a ideia que se produz do objeto.

Por fim, cabe salientar o grande interesse pela aprendizagem e inovações em Geometria, haja vista a excelente participação dos professores de forma voluntária.

Bibliografia e referências

Arcavi, A..(1999). *The role of visual representation in the learning of mathematics*. In: NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME, 1999. Proceedings… Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>. Acesso em: 30 set. 2008.

Costa, C.. (2000). *Visualização, veículo para a educação em geometria*. Disponível em: <httpwww.spce.org.ptsemCC.pdf.pdf> . Acesso em: 29 jul. 2007

Fischbein, Efraim. (1987) *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, Hans. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company.

Guzmán, Miguel de. (1997). *El rincón de la pizarra, ensayos de visualização en análisis matemática: elementos básicos del análise*. Madrid: Pirámide.

Nasser, Lilian. (1992). *Using the van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil*. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – London: King’s College London, Centre for Education Studies, University of London.

Leivas, José C. P. (2009*). Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009.* Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 294 p.

Piaget, J.; Inhelder, Bärbel. (1993). *A representação do espaço na criança.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Van de Walle, John, J. A. (2009). *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. 6. ed. Porto Alegre: Artes Médicas.

Zimmermann, W.; Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics: a project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of The Mathematical Association of America*. Washington, USA: Mathematical Association of America.