XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

Geometría dinámica, implicación y abducción: un estudio de caso

Resumen

En esta comunicación reportamos algunos resultados de un estudio investigativo[1] relacionado con el aprendizaje de la demostración. Éste se centró, especialmente, en identificar formulación de implicaciones (Arzarelo, 2007) y procesos abductivos que llevan a cabo estudiantes cuando, apoyados en un programa de geometría dinámica, resuelven un problema cuyo fin es descubrir un hecho geométrico, formular una conjetura y demostrarla. Apoyados en los registros de audio y video, y en la trascripción de los mismos, se describió e interpretó la actividad de un grupo de estudiantes en relación con dichos procesos. Describimos el papel de la geometría dinámica no sólo como entorno que permite exploraciones de tipo empírico, sino como potenciador de procesos abductivos relacionados con la implicación.

Palabras clave: demostración, implicación, abducción, geometría dinámica.

Introducción

Es ampliamente reconocido el potencial del programa de geometría dinámica para favorecer la conexión entre la exploración dinámica de figuras geométricas, la formulación de condicionales a manera de conjeturas y la producción de cadenas deductivas, lo mismo que para propiciar la interacción de los estudiantes en estos procesos (Laborde, 2000; Olivero, 2002; Cerulli y Mariotti, 2003; Mariotti, 2007; Arzarello, Olivero, Paola y Robutti 2007). En dicho proceso, como lo revela nuestro estudio, tanto la formulación de implicaciones como la argumentación abductiva juegan un papel primordial. Desde nuestro punto de vista, el uso frecuente del programa permite a los estudiantes reconocer que la geometría dinámica es un modelo de la teoría, que cualquier resultado obtenido con su uso es posiblemente válido en dicha teoría y aprovechar esta circunstancia para buscar la justificación del enunciado en ella.

En los análisis de los procesos de resolución de problemas, estos autores han señalado el papel de la argumentación abductiva como punto de contacto entre la producción de una conjetura y la producción de una demostración. Sin embargo, desde nuestro punto de vista, falta mayor evidencia investigativa del papel de la geometría dinámica para orientar la búsqueda de núcleos temáticos específicos al interior de una teoría, lo que consideramos como formular implicaciones, para identificar aquellas propiedades que pueden utilizarse para justificar una conjetura. Esta carencia nos llevó a prestar especial atención a los argumentos de los estudiantes en los diferentes momentos de la resolución del problema, al efecto del uso de la geometría

[1] Este artículo es resultado de una investigación que pudo realizarse gracias al apoyo de Colciencias.

dinámica en dichos argumentos y a la relación entre la formulación de implicaciones y los procesos abductivos.

A continuación, hacemos mención de nuestros referentes teóricos y precisamos la terminología utilizada. Mostramos la asociación entre la exploración dinámica, la formulación de conjeturas, la formulación de implicaciones y la argumentación matemática abductiva que los estudiantes ponen en juego cuando interactúan al resolver el problema, justificar su solución y comunicar los resultados de su trabajo. Después, sintetizamos brevemente la metodología con la que abordamos el estudio. Luego, presentamos el estudio de caso centrándonos en la descripción general de la actividad matemática desarrollada por tres estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), quienes en el primer semestre de 2008 estaban inscritos en un curso de geometría euclidiana que hace parte de la línea de matemáticas de un programa de formación inicial de profesores; mostramos algunos ejemplos de formulación de implicaciones y procesos abductivos que ellos llevaron a cabo. Finalmente, exponemos algunas conclusiones relacionadas con la importancia de la generación de implicaciones que permiten procesos abductivos que se constituyen en el germen de cadenas deductivas.

Marco teórico

A continuación precisamos el uso que damos a las nociones de exploración dinámica, implicación y abducción. Consideramos la exploración, en general, como una actividad de tipo heurístico que se puede llevar a cabo en dos niveles diferentes: en el mundo de los fenómenos, es decir, en el mundo que está al alcance de nuestros sentidos; y en el mundo de la teoría. En el mundo de los fenómenos, la exploración, generalmente impulsada por la resolución de problemas abiertos, se realiza sobre representaciones de figuras geométricas y tiene un carácter empírico. Nos referimos entonces a una *exploración empírica*. Cuando ésta se lleva a cabo en un entorno dinámico, como por ejemplo el que se tiene usando un programa de geometría dinámica, el objetivo es detectar invariantes y formularlos como regularidades en calidad de propiedades, a partir de argumentos inductivos. Llamamos a esta actividad *exploración dinámica*. En el mundo de la teoría, la exploración se realiza sobre los enunciados que conforman el conocimiento individual. Nos referimos a ella como una *exploración teórica*. Se lleva a cabo con el propósito de reconocer o encontrar enunciados que permitan justificar una afirmación o tomar decisiones sobre hacia dónde dirigir la exploración empírica.

Desde el punto de vista matemático, una implicación es una narrativa en la que se expresa que un enunciado es consecuencia lógica de una teoría (Arzarello, 2007) y por lo tanto, si se admite que dicha teoría, o la parte de ella que interesa, es válida, entonces el enunciado también lo es, una vez se ha producido la demostración de la validez de ésta. En otras palabras, un enunciado condicional $p \rightarrow q$ es consecuencia lógica de una teoría si se llegó a q, a partir de p, valiéndose de la teoría. En el ámbito educativo, al enfocar la atención en el proceso mediante el cual los estudiantes producen implicaciones con el apoyo de geometría dinámica y avanzan en su aprendizaje de la demostración, nos interesa identificar las posibles manifestaciones, incluso aquellas incipientes, del establecimiento de implicaciones desde aquellas en las que apenas evocan un término asociado a un tema estudiado previamente, hasta aquellas en donde se remiten a una porción de una teoría con la seguridad de encontrar allí la manera de justificar la condicional, sea que estén o no en lo correcto. Queremos ver si las manifestaciones de implicaciones dirigen la exploración empírica o teórica. En ese sentido, se tienen en cuenta las manifestaciones ligadas a la identificación de un *espacio de trabajo* en el cual concentrar los esfuerzos para hallar una vía para justificar la condicional y poder afirmar que es consecuencia lógica de la teoría, aunque no se tenga un camino claro para construir la justificación.

Por ejemplo, decimos que los estudiantes formulan una implicación si al tratar de justificar por qué cierto resultado experimental es válido aluden a un campo temático, como, en nuestro caso, la semejanza de triángulos, que los lleva a establecer asociaciones con razones, proporciones, congruencia de ángulos, etc., aunque no tengan una idea muy clara de cuáles triángulos son semejantes o por qué lo son.

Una vez ubicados en un espacio de trabajo, evocar enunciados condicionales con el mismo consecuente de la conjetura que se quiere demostrar, para obtener un posible antecedente cuya consecuencia sea el resultado, es lo que denominamos un *proceso abductivo*, noción compatible con la de abducción de Peirce (Arzarello, Olivero, Paola y Robutti 2007); evidenciar esto nos permite asegurar que la evocación del espacio de trabajo realmente sí dio lugar al establecimiento de una implicación. Diferenciamos el proceso de establecer una implicación del de formular una abducción porque en el primer caso se hace referencia a una teoría o a una parte de ella, y en el segundo, a una regla o enunciado específico que posteriormente se pueda conectar con el hallazgo. Por ejemplo, si como resultado de una exploración se tiene una conjetura de la forma $p \to q$ cuyo consecuente es q: dos ángulos son congruentes, y se está buscando cómo poder demostrar la congruencia, se puede hacer alusión, entre otras cosas, a la congruencia o semejanza de triángulos o al paralelismo de las rectas que determinan los ángulos. De esta forma, se vincula el hallazgo experimental con una teoría y esto apenas sería una posible manifestación de implicación. Pero esta asociación por sí sola no es suficiente para poder elaborar una cadena deductiva y asegurar que efectivamente se establece una implicación. Se han de buscar enunciados condicionales específicos en el espacio de trabajo delimitado por la teoría mencionada que tengan como consecuente la congruencia de ángulos. Esta búsqueda es la que asociamos con un proceso abductivo ya que se pone en juego el razonamiento plausible y se plantean hipótesis asociadas a lo que pudo traer como consecuencia la congruencia de los dos ángulos; $r \to q$: si fueran ángulos opuestos por el vértice, serían congruentes; $s \to q$: si fueran ángulos alternos internos entre paralelas, serían congruentes; $t \to q$: si fueran ángulos opuestos a los lados congruentes de un triángulo isósceles, serían congruentes. De esta forma se busca establecer un puente entre p y q por medio de los enunciados.

En síntesis, establecido un espacio de trabajo a través de la implicación, los procesos abductivos se generan en el refinamiento, cada vez mayor, de la mirada a la teoría, en busca de una regla, o unas reglas que podrían conectarse con el caso para poder obtener el hecho observado como consecuencia lógica de ellas. Dichos procesos son útiles para una posterior producción de una cadena deductiva, pues se van descartando los hechos que no resultan útiles, para así enfocarse en los que se ajustan a la situación estudiada.

Aspectos Metodológicos

En nuestro estudio investigativo adoptamos una metodología cualitativa situada dentro de la tradición descriptiva-interpretativa. Recogimos datos que fueron interpretados mediante categorías de análisis que surgieron del estudio de los datos y de la conceptualización que íbamos adelantando. Bajo la guía del marco teórico buscamos evidencias de las conexiones que hacen los estudiantes entre su actividad experimental y el reconocimiento de que una propiedad es consecuencia lógica de una teoría, dando lugar a posibles implicaciones a lo largo del proceso de resolución del problema.

Suponíamos que los estudiantes cuya actividad vamos a describir tenían un bagaje teórico en geometría que les permitiría interpretar los fenómenos de la representación, fruto de la construcción de figuras geométricas y de la exploración de éstas. Adicionalmente, suponíamos que, en general, los estudiantes tenían suficiente experiencia con el manejo del software de geometría dinámica, por lo cual lo utilizarían idóneamente para resolver el problema.

Los estudiantes fueron invitados a resolver el siguiente problema: *Usando geometría dinámica, construya una* $\odot C$ *y un punto fijo P en el interior de tal circunferencia. ¿Para qué cuerda* $\overline{AB}$ *de la misma circunferencia, que contenga a dicho punto, se tiene que el producto de AP por BP es máximo?*

Este problema pone en juego dos aspectos relacionados con el aprendizaje de la demostración. Uno es que los estudiantes reconozcan que para poder establecer teóricamente la no existencia de un valor máximo es necesario usar las relaciones determinadas por dos cuerdas que contienen a P. Otro es que reconozcan que para elaborar uno de los pasos de deducción no tenían, en la teoría con la que contaban en ese momento, el garante correspondiente; en relación con éste, queríamos que descubrieran el siguiente teorema: Ángulos inscritos en una circunferencia que subtienden el mismo arco son congruentes.

Consideramos que el problema tiene características óptimas para poner en evidencia el reconocimiento de consecuencia lógica: (i) es similar a otros problemas propuestos a nuestros estudiantes en cursos previos, en los que se pide encontrar condiciones para que se cumpla cierta propiedad; (ii) los estudiantes habían estudiado temas de geometría básicos para poder enfrentar la resolución del problema; (iii) una primera aproximación al problema generalmente favorece el anticipar un resultado que posteriormente se descarta o ratifica con la exploración y por lo tanto se impulsa el interés por justificar lo que encuentran con esa exploración; (iv) el uso de geometría dinámica como entorno de exploración para establecer una regularidad que da lugar a una conjetura.

Los estudiantes dispusieron de una hora y media, aproximadamente, para resolver el problema, establecer una conjetura y demostrarla. Cada grupo estuvo acompañado por un miembro del equipo de investigación quien intervenía para incentivar el diálogo entre los estudiantes, la comunicación de las ideas y la argumentación frente a la toma de algunas decisiones. Por medio de una cámara de video y una grabadora de audio registramos la interacción y las acciones que los estudiantes realizaron con geometría dinámica o sobre figuras hechas con papel y lápiz. Además, los registros que los estudiantes hicieron en papel se recogieron al finalizar la sesión.

Estudio de Caso

Para dar cuenta de nuestros hallazgos investigativos escogimos al grupo conformado por Susana (S), Juan (J) y Felipe (F) quienes formularon una implicación correcta, llevaron a cabo un trabajo rico en abducciones y lograron avanzar en la demostración de su conjetura.

Descripción general de la actividad matemática de los estudiantes

El proceso realizado por el grupo es el siguiente. S hace la primera representación en geometría dinámica, construyendo inicialmente una cuerda que contuviera tanto a *P* como a *C*, el centro de la circunferencia, y calculando el producto de las medidas de los dos segmentos determinados por *P*. Tan pronto tiene ese producto, S expresa que lo que debieron haber hecho era construir un segmento "cualquiera" que contuviera a *P* para poder comparar resultados. Por ello, construye otro segmento sin borrar el que ya tenían, mecanismo que usan para realizar la exploración de la situación. Finalmente, para validar que el producto de las medidas de los dos segmentos determinados por *P* en las cuerdas realmente siempre es el mismo, usan el arrastre. Surge una explicación de validación, al observar cómo cambian las medidas de esos segmentos bajo el arrastre, aumentando una de ellas al disminuir la otra, sin cambiar el producto.

Este grupo tiene lo que consideramos la configuración clave para llegar a relacionar el hecho de que el producto es constante con la semejanza de triángulos: dos cuerdas que contenían al punto *P*. Tempranamente introducen la comparación de razones como mecanismo para hallar una vía hacia la justificación de su descubrimiento, idea expresada por J: "Miremos la razón a ver qué pasa". Debido a que las medidas que encontraron para los segmentos las colocaron a un lado de la pantalla sin etiquetarlas, no sabían a qué segmento correspondía cada una. Sólo hasta cuando realizan un análisis algebraico de la situación, a partir de la igualdad $AP \times PB = RP \times PS$, descubren cuáles son las razones adecuadas para obtener una proporción.

Una vez la geometría dinámica les valida el resultado deducido algebraicamente, arrojando el mismo valor para las dos razones, S establece una implicación al evocar la teoría de semejanza de triángulos. En ese momento, sienten que ya pueden escribir su conjetura. Como el problema indaga sobre el momento en que un producto es mínimo, establecen que su conclusión debe versar sobre el producto y no sobre las razones "porque lo que nos están pidiendo es de lo que tenemos que hablar". Terminado este fragmento, deciden atender su necesidad de encontrar una demostración para entender por qué el producto es constante. Eso hace que retomen la geometría dinámica para estudiar esa variación.

Habiendo establecido la semejanza de triángulos como teoría en la cual se debe encontrar los elementos para demostrar el hecho descubierto y teniendo claro que demostrar que dos triángulos son semejantes requiere la congruencia de dos pares de ángulos, centran su atención en encontrar elementos que permitan establecer eso. Ya tienen un par de ángulos congruentes porque son opuestos por el vértice y por ello todo lo que sigue gira alrededor de poder demostrar la congruencia de otro par de ángulos. Para ello estudian el efecto posible de varias construcciones auxiliares como paralelas y alturas después de que S concluye que en la Teoría de circunferencias con la que cuentan "no tenemos nada de circunferencia así como que nos sirva".

De cierta forma, J da en el clavo con respecto a qué es lo que no les permite progresar hacia la determinación del otro par de ángulos congruentes y la correspondiente justificación, cuando dice: "No vemos los triángulos semejantes o sea, parecieran triángulos semejantes pero lo único que tenemos es, en este momento, dos ángulos". El análisis de la situación hecho por los estudiantes es tan teórico que no visualizan matemáticamente la figura, la forma de los triángulos, para así encontrar la correspondencia de los vértices que dan lugar a la semejanza. A ésta llegan a partir de la teoría, como lo explica S: "O sea [triángulo] *BPS* con [triángulo] *RPA*, porque las razones son de éste a éste [*BP* a *RP*] como éste a éste [*PS* a *PA*] y como tenemos el ángulo…".

Rápidamente, S descarta varias de estas propuestas porque por ejemplo, los ángulos alternos internos determinados por las rectas paralelas no corresponden a los ángulos que deben asegurar como congruentes, o las alturas propuestas determinan otros triángulos diferentes a aquellos cuya semejanza quieren garantizar. Finalmente, construyen una demostración incompleta de la validez de su conjetura pues no logran identificar qué garantiza la congruencia del otro par de ángulos necesaria para asegurar la semejanza de los triángulos identificados teóricamente.

Implicaciones

Identificamos dos implicaciones en la actividad de los estudiantes: en el proceso para establecer las razones constantes que surgen del hecho de tener productos constantes, y cuando aluden a la posible existencia de triángulos a partir de la proporción obtenida.

Inicialmente, quizá debido a la sorpresa que les ha producido el resultado obtenido con la exploración dinámica de la situación, los estudiantes comienzan a buscar justificaciones para éste. Proceden a hacer una exploración con la geometría dinámica dirigidos por la sugerencia de J pero no obtienen los resultados esperados. Sus constantes esfuerzos infructuosos los lleva a analizar la situación desde el álgebra.

141. J: [Alborozado] ¡Constante!

142. S: Si, uhum.

143. J: No sé. Talvez es porque cada vez que uno mueve, éste se disminuye y éste aumenta, ¿cierto? [Muestra $\overline{PR}$ y $\overline{PS}$]

[…]

148. J: Pero disminuye proporcionalmente

[…]

153. S: … [Dirigiéndose a J] ¿Pero por qué disminuye proporcionalmente? Es que esa es la duda. Porque entonces siempre es, o sea disminuyen y aumentan la misma cantidad. [Se refiere a las longitudes de los dos subsegmentos.]

154. J: Miremos la razón a ver qué pasa, ahhh, ¿cuál era cuál?

[…] [Dado que no logran la combinación adecuada para obtener razones iguales, deciden hacer un análisis algebraico de los factores del producto constante.]

270. J: No, porque no, uhmmm, hasta ahí ¿qué tenemos? De lo que tiene S ahí, nosotros encontramos que AP por BP nos daba una constante ¿cierto?

271. S: Ajá.

272. J: Y que RP y SP nos daba la misma constante, o sea que son iguales.

273. S: ¿PA sobre PS… PR? [Escribe en el cuaderno: $PA \cdot PB = PR \cdot PS$; $\frac{PA}{PS} = \frac{PR}{PB}$]

[…]

317. J: Estamos asumiendo que esta razón siempre se cumple

318. S: Pues, es que en teoría debería cumplirse.

J observa que al arrastrar uno de los extremos de la cuerda $\overline{RS}$, $\overline{RP}$ aumenta de longitud cuando $\overline{PS}$ disminuye. Esa observación causa extrañeza a S por lo que J aventura una primera explicación: “se disminuye proporcionalmente” [143]. Inicialmente, J se refiere a la disminución y aumento de longitud de los dos segmentos en una sola cuerda y parece que la mención a la proporción no es, en ese momento, porque está pensando en la teoría de proporciones. Sin embargo, la acción que realizan con geometría dinámica lleva a J conectar las ideas de producto constante con razón constante. Sin mencionar explícitamente una definición, un teorema o un postulado del cual pueda derivarse el hecho, J invita a sus compañeros a buscar razones para ver si logran encontrar alguna proporción de la cual se deriva el producto constante [154].

Su propuesta de examinar las razones nos lleva a determinar que ello es una implicación sobre todo porque, en lo que sigue, los estudiantes se dedican a formar razones entre las medidas que han encontrado de los segmentos (proceden a verificar que lo que tienen es válido en esa teoría). Recurrentemente, mencionan que su conclusión debe ser consecuencia lógica de la teoría, lo que consideramos como otro factor para asegurar que hay una manifestación de implicación. Posteriormente, la geometría dinámica se convierte en el instrumento para determinar cuáles son las razones que permiten establecer la teoría evocada como el fundamento teórico del resultado que establecieron. Inicialmente, no hacen un razonamiento teórico para determinar esas razones sino que proceden de manera empírica. Como la geometría dinámica sigue arrojando resultados que chocan con lo que ellos esperan obtener debido a la teoría, ello los impulsa a determinar un criterio para la exploración y deciden hacer un análisis teórico. La manifestación de implicación, se esquematiza así:

Teoría A:	Proporciones
Hecho que se quiere concluir:	Producto de medidas de las longitudes en que queda dividida la cuerda es constante (q)

Luego, cuando los estudiantes al fin logran establecer las razones correctamente, se da el primer proceso de implicación geométrica, pues evocan la semejanza de triángulos.

324. S: ¿Sí dio? En teoría tendríamos ahí triángulos semejantes ¿no?

325. J: ¿Triángulos?

326. S: Triángulos semejantes

327. J: Sí, sí, sí

328. S: O sea lo que tenemos dibujados son triángulos semejantes

329. J: En teoría, sí.

330. S: Bueno, no hemos dibujado triángulos como tal, ¿sí? Pero implícitamente hay triángulos semejantes.

[…] [En el lapso subsiguiente discuten sobre cómo expresar en la conjetura que el producto es el mismo sin importar cuál de las cuerdas que contiene a P se escoge. Deciden que para ello, es necesario mencionar dos cuerdas.]

529. S: Productos y razones… Pues construyan los triángulos porque es que…

Sin haber representado triángulos en la figura construida, S alude a la posibilidad de tener triángulos semejantes. Así, hay una manifestación de implicación y no abducción porque no evocan una regla específica sino una teoría y no saben qué usar de ella. Además, esta teoría se convierte en el espacio de su futuro trabajo. Una vez terminado el proceso de escribir la conjetura para que en ella se exprese claramente la generalidad de lo encontrado, S vuelve a evocar la teoría de semejanza de triángulos, reiterando que ese es el marco en que pueden encontrar una explicación.

Para S, la conjetura tiene la connotación de hecho aceptado, desde una perspectiva teórica, porque no tienen representados los triángulos y empíricamente no han verificado la semejanza.

En la intervención [529], S hace explícito por qué establece la implicación con la semejanza de triángulos. El esquema representa lo anterior:

Teoría B:	Semejanza de triángulos
Hecho que se quiere concluir:	Razones entre las medidas de las longitudes de los segmentos en que queda dividida la cuerda son iguales (q)

Procesos abductivos

Los estudiantes han descubierto el hecho que quieren reportar: el producto de las medidas de la longitud de los segmentos determinados en las cuerdas que contienen a P por el punto P es constante. Habiendo determinado, de manera autónoma, que deben llegar a una justificación del hecho, proceden a escribir su conjetura como condicional, elemento necesario para poder realizar una abducción.

375. S: No, espere, ¿cómo lo vamos a formular bien?

[…]

386. S: No, no. Seria que para cualquier cuerda AB, que contiene al punto P, se cumple que PA por PB es igual a un valor constante.

[…]

400. S: O pongamos… deberíamos mencionar dos cuerdas, diría yo, ¿no?, que contenga a ese punto P, para poder decir que la relación es la misma.

[…]

409. S: Porque tenemos una constante y ¿cómo nombramos un constante ahí? Para nombrar que son constantes tendríamos que nombrar por lo menos dos cuerdas, no le parece, porque….

[…]

441. F: Entonces necesitamos otra cuerda para que hubiese proporción con relación a algo

442. S: Sí, claro, entonces tendríamos que enunciar la conjetura nombrando dos cuerdas, por lo menos dos

El consecuente de la conjetura está bien definido: el producto es constante. También tienen seguridad de que ello es consecuencia de igualdad de razones. Es el establecimiento del antecedente de la conjetura lo que les está causando problemas. Evidenciamos un proceso de abducción algebraica realizado por S [409] y F [441]. Es proceso abductivo porque ellos implícitamente mencionan que no puede haber una proporción si no se tienen cuatro términos para formar las razones. Se están refiriendo a la definición de proporción. El proceso abductivo se puede esquematizar así:

Hecho que quieren justificar:	$BP \times PA$ es constante.
Respaldo teórico:	Definición de proporción
Producto del proceso abductivo:	Se deben tener dos cuerdas para poder formar dos razones y de ello la proporción

Luego, comienzan un proceso de abducción geométrica pues empiezan a mencionar cosas de la teoría que podrían tener relación con el hecho geométrico descubierto. Traen a colación un teorema que tiene consecuente igual al que han establecido en su conjetura.

423. S: Encontremos una relación de esto con el radio, o con la distancia del punto P, o… [Comienzan a arrastrar una de las cuerdas.]

424. J: Es que…

425. F: Pero ahí ¿qué? ¿Por Thales?

Habiendo establecido que producto constante corresponde a razones iguales, no es importante si el primero o el segundo es el consecuente de su conjetura. Nombrar el Teorema de Thales, cuyo consecuente involucra razones iguales, es aludir a un hecho específico y por ello es un proceso abductivo en donde no explicitan el antecedente. Finalmente, descartan esta posibilidad. El esquema de este proceso abductivo es:

Hecho que quieren justificar:	Razones iguales
Posible respaldo teórico:	Teorema de Thales

Teniendo la semejanza como teoría de base, los estudiantes deciden simplificar el problema en aras de encontrar una justificación de su conjetura. En ese marco, establecen que la razón de las medidas de los dos segmentos es 1 cuando el punto P y el centro C de la circunferencia coinciden. Teniendo como consecuente que las razones son iguales a 1, los estudiantes evocan teoremas en los que se mencionan elementos igualados a 1.

426. S: Porque está claro, porque donde llegue a ser P igual a C, la relación sería 1.

[…]

505. S: De poder… se puede. Pero es que, bueno el ejemplo cuando P es igual a C tendría r [radio] por r, r cuadrado y r por r, r cuadrado. El problema seria cuando P es otro punto distinto a C, como lo dice el problema original.

[…]

509. F: Cuando P es igual a C, es igual a 1 ¿cierto?

[…]

521. F: Estábamos tratando de ver si encontrábamos alguna relación, de tal manera que nos diera como uno, o una cosa así, más fácil para mirar. [Está arrastrando un punto sobre la circunferencia. En un momento hace que las cuerdas sean perpendiculares.]

522. Obs: ¿Por qué? ¿Qué el producto te diera uno o qué?

523. F: Si, pero….

524. Obs: Pero, ¿por qué va a ser más fácil?

525. F: Porque pues, tenemos unos teoremas de proporcionalidad que están igualados a uno. Entonces pensé que por ahí podríamos hacer la demostración, bueno.

526. Obs: ¿Han estado trabajando eso [en clase], dices?

527. S: Pues Ceva y Menelao, la multiplicación…

528. F: Los productos con igualdad uno, para ver que nos da.

F claramente expresa [521] que están en la búsqueda de posibles antecedentes que se correspondan con el consecuente que han establecido para el caso simplificado: razón igual a 1. Por ello, este episodio corresponde a un proceso abductivo aun cuando F ha establecido erróneamente una relación entre razón igual a 1 y el consecuente de los teoremas de Ceva y Menelao, en los que se establece que el producto de unas razones es igual a 1. S le aclara la necesidad de tener productos de razones para que el consecuente de la conjetura coincida con los de estos teoremas. F, quien no ha descartado su idea original, propone realizar una construcción para asegurar el consecuente de esos teoremas. Este proceso, se esquematiza así:

Hecho que quieren justificar: Razones iguales a 1

Posible respaldo teórico: Teoremas de Ceva o Menelao

Descartada la idea anterior, comienza la búsqueda de los argumentos que en la Teoría de Semejanza de triángulos garanticen que esta relación existe para un par de triángulos. Están haciendo una búsqueda eminentemente teórica (en una vía abductiva) para garantizar la semejanza y poder hacer una deducción. Aluden a elementos más específicos para garantizar la semejanza, como el Criterio ángulo-ángulo, y proponen una construcción auxiliar para tal efecto: la construcción de una recta paralela a uno de los lados del triángulo, dado que necesitan establecer la congruencia de otro par de ángulos, diferentes a los opuestos por el vértice.

514. J: Para semejanza ¿qué tenemos que hacer?

515. S: Para semejanza tenemos los criterios…

516. J: Si

517. S: el teorema de…

518. J: Pero, ¿aquí qué tenemos? o sea…

519. S: Es que aquí sólo tenemos dos ángulos congruentes y pare de contar. [Han marcado en la representación en papel, la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice.]

[…]

543. S: Necesitamos otro ángulo por lo menos.

[…] [En este intervalo, los estudiantes exploran teóricamente posibles construcciones auxiliares para obtener la congruencia del otro par de ángulos, todas infructuosas.]

Aun cuando los estudiantes no mencionan explícitamente el Criterio ángulo-ángulo de semejanza de triángulos, se están refiriendo a él, pues S alude al par de ángulos que ya pueden asegurar como congruentes [519] y menciona la necesidad de poder establecer la congruencia de otro par de ángulos [543]. Este proceso se esquematiza así:

Hecho que quieren justificar: Triángulos semejantes

Respaldo teórico: Criterio de semejanza ángulo-ángulo

Producto de la abducción: La necesidad de dos parejas de ángulos correspondientes congruentes

544. J: Pero no veo nada.

545. J: No, no hay [Pasan unos segundos de silencio.]

546. J: El ángulo….

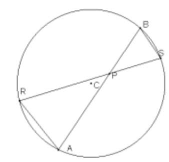
547. F: Construir una paralela…

548. J: Pero ¿paralela a quién? ¿A ésta? [El lado del triángulo pequeño que no contiene a P.]

549. S: Se necesitaría paralela a ésta [el mismo lado antes mencionada] por este [el punto P].

[…]

651. J ¿Si hacemos una paralela a esta por acá [No se ve por donde es la paralela], ahí, esto nos daría ¿qué?, Nos daría solo este ángulo con este [el ángulo ARP y BSP] ¿cierto?[Hace referencia al gráfico en la hoja]



Los estudiantes tienen claro cuál es el consecuente de la condicional que quieren establecer pero no tienen identificados los ángulos específicos. F sugiere la construcción de una recta paralela [547], y S y J aceptan la idea y especifican el punto por donde debe pasar la paralela y a cuál recta debe ser paralela. Hay proceso abductivo porque mencionan el antecedente posible, se refieren a ángulos alternos internos [651], para poder concluir el consecuente establecido. Este proceso se esquematiza así:

Hecho que quieren justificar:	La existencia de otro par de ángulos congruentes (alternos internos)
Posible respaldo teórico:	Paralelismo
Producto del proceso abductivo:	Existencia de una recta paralela a un lado del triángulo

Conclusiones

Nuestro interés investigativo se centró principalmente en la búsqueda que hacen los estudiantes del nexo entre la teoría con cuentan, la información que les provee la calculadora, el establecimiento explícito de implicaciones y procesos abductivos que conducen eventualmente a una demostración. Presuponemos que la evocación del espacio de trabajo dirige la exploración en busca de una explicación de por qué un enunciado es válido y que la construcción de la demostración puede incluir una mezcla de deducciones y abducciones con las que se va avanzando hasta lograr encontrar la vía apropiada.

Cuando se está aprendiendo a demostrar, generalmente la argumentación sobre la que descansa el proceso de construcción de una justificación es de carácter abductivo. En el entorno de geometría dinámica, los estudiantes llevaron a cabo exploraciones empíricas, no sólo para establecer la conjetura (i.e., formar asociaciones, generalmente formuladas como dependencias tácitas o explícitas, entre la regularidad detectada y las condiciones dadas por la situación), sino para trabajar dentro del marco de la teoría que evocaron en sus procesos de implicación y determinar la viabilidad de las ideas que surgen de sus procesos abductivos. Vale la pena precisar que este tipo de entorno jugó un papel importante en la evocación de teorías; las primeras exploraciones realizadas por los estudiantes los indujo a enmarcarse en la teoría de las razones, hecho que los encaminó hacia la teoría de semejanza de triángulos.

En cuanto a la argumentación abductiva, ésta es frecuente en el grupo de estudiantes. Tenemos dos explicaciones al respecto. Primera, los estudiantes tienen elementos teóricos en dónde buscar y por ello tienen más opciones para presuponer enunciados teóricos que se correspondan con la situación; en ese sentido, aunque no necesariamente a partir de la exploración empírica, los estudiantes hacen una búsqueda legítima de los elementos teóricos que requieren. Segundo, los estudiantes han tenido experiencia en la argumentación abductiva dado que con cierta frecuencia esa práctica se constituye en una estrategia estimulada en clase por los profesores como medio para hacer explícita una vía para construir una demostración; es decir, ellos saben que es una manera efectiva de proceder cuando se está buscando cómo justificar. Quizá con grupos de estudiantes que tengan un buen bagaje teórico en geometría pero que no hayan experimentado una aproximación metodológica como la que proponemos, no se encontraría tal riqueza.

Este estudio retrata bien la naturaleza usualmente oculta de la actividad matemática genuina y creadora en la que se involucra un matemático cuando pretende justificar una afirmación que cree verdadera. Si bien el producto esperado puede ser una cadena deductiva que permita sustentar la validez del enunciado, el camino para lograrlo involucra otro tipo de procesos relativos a la búsqueda de generalizaciones (argumentos inductivos) y a la búsqueda de ideas o reglas que sean garantes en la justificación de una propiedad que se ha inducido (argumentos abductivos).

Referencias y bibliografía

Arzarello, F. (2007). The proof in the 20th century. *From Hilbert to automatic theorem proving introduction*. En P. Boero (Ed.), Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice (pp. 43-59). The Netherlands: Sense Publishers.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2007). The transition to formal proof in geometry. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 305-323). The Netherlands: Sense Publishers.

Cerulli, M. y Mariotti, A. (2003). Building theories: Working in a microworld and writing the mathematical notebook. En N.A. Pateman, B.J. Dougherty y J.T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 181-188). Honolulu: University of Hawaii.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics,* 44(1-3), 151-161.

Mariotti, M.A. (2007). Geometrical proof. The mediation of a microworld. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 285-304). The Netherlands: Sense Publishers.

Olivero, F. (2002). The proving process within a dynamic geometry environment. *Tesis doctoral no publicada*. University of Bristol, Graduate School of Education.