http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i3p037-053

Estudo dos quadriláteros enquanto conceitos geométricos com o GeoGebra

Study of the quadrilaterals as geometric concepts with GeoGebra

JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES[1]

0000-0003-2015-160X

RESUMO

Neste artigo estuda-se o processo de construção de diversos quadriláteros com o GeoGebra, analisando-se, de seguida, os elementos dos conceitos (nome, atributos essenciais, atributos não essenciais, exemplos positivos, exemplos negativos e regra) correspondentes a esses quadriláteros. Concretamente, recorrendo ao ambiente geométrico dinâmico GeoGebra, exploram-se duas construções do quadrado, do paralelogramo e do papagaio, seguida da análise dos elementos desses conceitos. Em termos da construção dos quadriláteros e da análise da construção salienta-se que o GeoGebra mostrou ser uma ferramenta com elevado potencial para a construção dos diversos quadriláteros e da análise dessas construções verificou-se que foram aplicados os principais elementos dos respetivos conceitos, especialmente os atributos essenciais, os quais são usados na composição da regra, os atributos não essenciais e os exemplos positivos. Face a tais potencialidades, considera-se que o GeoGebra constitui uma ferramenta muito adequada para explorar a construção dos quadriláteros e promover a aprendizagem de conceitos.

Palavras-chave: *quadriláteros; aprendizagem de conceitos; GeoGebra*.

ABSTRACT

In this article, the construction process of several quadrilaterals with GeoGebra is studied, analysing, then, the elements of the concepts (name, essential attributes, non-essential attributes, positive examples, negative examples and rule) corresponding to these quadrilaterals. Specifically, using the dynamic geometric environment GeoGebra, two constructions of the square, the parallelogram and the kite are explored, followed by the analysis of the elements of these concepts. In terms of the construction of the quadrilaterals and the analysis of the construction, it should be noted that GeoGebra proved to be a tool with high potential for the construction of the different quadrilaterals and the analysis of these constructions verified that the main elements of the respective concepts were applied, especially the essential attributes, which are used in the composition of the rule, non-essential attributes, and positive examples. Given such potential, it is considered that GeoGebra is a very suitable tool to explore the construction of quadrilaterals and promote the learning of concepts.

Keywords: *quadrilaterals; concept learning; GeoGebra*.

[1] Universidade do Minho – jfernandes@ie.uminho.pt

Introdução

Segundo Fernandes e Viseu (2006), a relação entre a matemática e as tecnologias digitais tem assumido um carácter bidirecional, influenciando-se reciprocamente, o que destaca a relevância da sua utilização nesta disciplina. Por outro lado, tal uso também pode contribuir para alterar a visão negativa da matemática que ainda hoje se mantém e difunde entre alguns alunos e, portanto, promovendo a motivação desses alunos.

Após a introdução das tecnologias digitais no ensino da matemática, a sua utilização e influência não mais têm deixado de aumentar. Num estudo sobre a referência às Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no currículo de matemática do ensino secundário após a reforma curricular de 1986, em Portugal, Fernandes, Alves, Viseu e Lacaz (2006) concluíram que:

> em cada um dos momentos de alteração dos programas da área de Matemática verifica-se um aprofundamento e aumento das referências às TIC, podendo genericamente afirmar-se que o desenvolvimento das TIC e a sua utilização na sociedade se têm repercutido cada vez mais no currículo de matemática. (p. 325)

Esta tendência na utilização das tecnologias digitais prevalece nos atuais programas de matemática portugueses do ensino básico (Ministério da Educação, 2021) e do ensino secundário (Ministério da Educação, 2023) e na Base Nacional Comum Curicular do Brasil (Brasil, 2018), em que se prescrevem as orientações curriculares brasileiras do ensino fundamental e do ensino médio.

Nas tecnologias digitais destacam-se os chamados Ambientes Geométricos Dinâmicos (AGD), de que o GeoGebra é um exemplo e que usaremos no presente estudo. Estes ambientes geométricos dinâmicos têm características que recomendam o seu uso no ensino e aprendizagem da matemática, em especial no âmbito da Geometria. De entre essas características, Junqueira, (1996) destaca a possibilidade de, através do arrastamento de um elemento da figura, gerar facilmente muitos exemplos da figura, conferindo-lhe um carácter dinâmico, e construir figuras geométricas resistentes, isto é, em que se garante a obtenção de uma figura do mesmo tipo, o que significa que se mantêm invariantes os seus atributos. Ainda segundo esta autora, estas características revelam o maior potencial da exploração das figuras através do AGD do que com o tradicional papel e lápis.

No presente artigo estudam-se as potencialidades do GeoGebra para construir quadriláteros e analisar a aplicação dos elementos dos conceitos correspondentes. No caso dos conceitos, tendo por referência a aprendizagem de conceitos (Joyce & Weil, 1996; Skemp, 1993), pretende-se mostrar o potencial do GeoGebra na exemplificação, na aplicação dos atributos e no estabelecimento da regra ou definição dos quadriláteros.

Finalizada a secção de introdução, onde enunciámos a problemática e justificámos a importância do estudo, segue-se a secção do referencial teórico, onde revemos e discutimos a problemática da aprendizagem de conceitos envolvendo figuras geométricas com recurso ao GeoGebra. Na próxima secção explora-se, com o GeoGebra, a construção de quadriláteros e analisa-se a exemplificação, os atributos e a regra ou definição desses quadriláteros. Por fim, na última secção sintetizam-se as principais conclusões e implicações do estudo.

1. Referencial teórico

A aquisição de conceitos matemáticos é um processo complexo que envolve uma diversidade de variáveis, submetidas a fatores internos e externos, que se combinam de formas variadas a partir tanto de interações sociais como da atividade individual.

No processo de progressão do concreto ao abstrato, Skemp (1993) classifica os conceitos em dois tipos: primários e secundários. Os conceitos *primários* são adquiridos a partir das nossas experiências sensoriais do mundo exterior, resultando, portanto, das ações dos sujeitos sobre os objetos, os fenómenos e os acontecimentos. Já os acontecimentos *secundários* são adquiridos através das ações dos sujeitos sobre outros conceitos. Face a esta dualidade, pode-se considerar que a generalidade dos conceitos matemáticos são conceitos secundários porque estão para além da realidade tangível.

Segundo Skemp (1993), no processo de formação de conceitos intervêm certos fatores, designadamente: a frequência, o contraste e os não exemplos. Naturalmente, a *frequência* com que experimentamos exemplificações do conceito influi na sua formação. A este respeito, pode referir-se os inúmeros conceitos que as crianças aprendem de modo natural, isto é, independentemente da implementação de um plano intencional e explícito. No caso do *contraste*, quanto mais contrastantes (ou mais diferentes em termos psicológicos) forem as exemplificações de um conceito relativamente a outro mais fácil será a formação de tais conceitos comparativamente com outros conceitos menos contrastantes. Finalmente, os *não exemplos* desempenham um papel preponderante na classificação – enquanto atividade de agrupamento das nossas experiências em classes – particularmente na definição das fronteiras de tais classes.

A atribuição de um nome a um conceito, para além de torná-lo mais facilmente 'manipulável', ajuda-nos a: 1) classificar objetos através da evocação do conceito, em que o sujeito procura ligá-lo com a nova experiência a partir da perceção — "Trata-se de uma nova figura geométrica" ou "É uma diagonal do hexágono"; 2) classificar objetos através da associação do mesmo nome a objetos diferentes; e 3) separar classes, em que a associação de nomes diferentes a classes ligeiramente diferentes do ponto de vista psicológico facilita a classificação correta dos exemplos-limite — "Figuras geometricamente iguais" e "Figuras semelhantes mas não geometricamente iguais".

Ainda em relação ao processo de formação de conceitos, Skemp (1993) distingue dois princípios a ter em conta na aprendizagem de conceitos matemáticos: 1) os conceitos de ordem mais elevada do que aqueles que os alunos já possuem não podem ser simplesmente comunicados através de uma definição, antes, deve ser encontrada uma coleção apropriada de exemplos a partir de uma combinação de conceitos que já possuem; 2) como em matemática os exemplos dos conceitos de ordem mais elevada são quase sempre outros conceitos, deve estar-se seguro de que estes últimos estão presentes na mente do aprendiz aquando do ato de ensino-aprendizagem, ou seja, deve-se estar ciente de que os conceitos pré-requisito implicados na aquisição de um outro conceito estão disponíveis no aluno.

No caso da metodologia baseada no contraste entre os exemplos e os não exemplos de um conceito, Joyce e Weil (1996) propuseram um modelo de ensino para a aquisição de conceitos, que designaram por Modelo de Desenvolvimento Conceptual. Para estas autoras, há seis elementos importantes a considerar num conceito: o nome, os atributos essenciais, os atributos não essenciais, os exemplos positivos, os exemplos negativos e a regra. Seguidamente, explicita-se cada um destes elementos e exemplifica-se a partir do conceito de triângulo.

• O *nome* do conceito é a etiqueta ou rótulo que se associa ao conceito e que pode ser uma palavra ou símbolo — no conceito de triângulo o nome é a palavra "triângulo" e convém notar que neste caso a palavra "triângulo" pode constituir o nome do conceito ou o próprio conceito.

• Os *atributos essenciais* são as propriedades específicas do conceito e que o distinguem dos demais conceitos — no caso do triângulo os atributos essenciais são: (1) é um polígono e (2) tem três lados.

• Os *atributos não essenciais* são propriedades que não são decisivas para a distinção do conceito de outros conceitos — no caso do triângulo podem considerar-se como atributos não essenciais, por exemplo: (1) a posição do triângulo no plano; (2) as dimensões do triângulo e (3) o tipo de triângulo (acutângulo, retângulo, obtusângulo, escaleno, isósceles e equilátero). A não consideração de atributos não essenciais poderá ter como resultado a aquisição superficial do conceito, senão mesmo causa de erros sistemáticos ou de conceções erradas acerca do conceito. Compreende-se o que foi dito se pensarmos num professor que, relativamente ao conceito de triângulo retângulo, desenha sempre os triângulos com os catetos paralelos aos lados do quadro ou da folha de papel. Neste caso, o aluno perante triângulos retângulos desenhados noutras posições diferentes poderão não identificar tais figuras geométricas como sendo triângulos retângulos, pois, a sua experiência diz-lhe que o triângulo retângulo tem de ter os catetos paralelos aos limites da folha de papel.

• Os *exemplos positivos* (ou apenas exemplos) são exemplificações do conceito ─ no caso do triângulo é exemplo positivo qualquer tipo de triângulo.

• Os *exemplos negativos* (ou não exemplos) não são exemplificações do conceito ─ são exemplos negativos do conceito de triângulo, por exemplo, exemplificações do conceito de quadrado, de paralelogramo, de trapézio, de pentágono e de hexágono.

• A *regra* é a definição do conceito, ou seja, é uma afirmação sintética e precisa elaborada a partir dos atributos essenciais e que caracteriza o conceito ─ tendo em conta os atributos essenciais, anteriormente especificados, podemos definir o conceito de triângulo como sendo "Um polígono com três lados".

Antes classificámos os conceitos em primários e secundários (Skemp, 1993), consoante são formados a partir da ação sobre objetos, fenómenos ou acontecimentos ou a partir da ação sobre outros conceitos, respetivamente. Agora podemos classificar os conceitos a partir dos seus atributos (Joyce & Weil, 1996).

• Conceitos *conjuntivos* são definidos pela presença simultânea de todos os atributos. No caso do conceito de paralelogramo, um seu exemplo positivo tem de verificar simultaneamente os atributos: (1) é um quadrilátero e (2) tem dois pares de lados paralelos.

• Conceitos *disjuntivos* requerem a presença de alguns atributos e a ausência de outros. No caso do conceito de nacionalidade, uma pessoa pode ser portuguesa porque nasceu em Portugal ou porque em alguma altura da sua vida adquiriu a nacionalidade portuguesa (por exemplo, através do casamento).

• Conceitos *relacionais* são aqueles em que os seus atributos mantêm algum tipo de relação entre si. É o caso dos conceitos de pai e de filho, por exemplo.

• Conceitos *concretos* podem ser apreendidos através dos sentidos. Na medida em que os seus atributos são objetos, ações físicas ou afirmações verbais, eles são também conceitos primários.

• Conceitos *inferidos* são aqueles em que os seus atributos têm de ser inferidos através dos sentidos. Pela exigência de abstração inerente à sua formação, estes conceitos são também conceitos secundários.

• Conceitos *tipo-ideal* são conceitos complexos que não têm uma representação real e que estão presentes em fenómenos perfeitos. Neste tipo de conceitos, de que são exemplos os conceitos de justiça e de democracia, os seus atributos não são universalmente estabelecidos no seu tipo e no seu número. Por exemplo, no caso do conceito de democracia, a Inglaterra para uns é um exemplo de democracia, enquanto para outros já o não é.

De todos os tipos de conceitos considerados, os *conjuntivos* são os mais importantes pois são os mais frequentes na nossa cultura e também na matemática.

As relações entre conceitos traduzem uma perspetiva dinâmica e realista da matemática pois, por um lado, na resolução de um problema geralmente intervêm vários conceitos e, por outro lado, a própria matemática organiza-se a partir de estruturas. Em termos de aprendizagem, a importância das relações entre conceitos é destacada pelo conceito de esquema que, segundo Skemp (1993), constitui uma função integradora e é um instrumento que desenvolve a compreensão. Também integrando a ideia de esquema, com base na teoria da aprendizagem significativa, Novak e Gowin (1996) desenvolveram os chamados mapas de conceitos com o objetivo de representar, hierarquicamente, relações significativas entre conceitos.

A aprendizagem a partir de esquemas apresenta vantagens em relação à aprendizagem baseada na memorização (Moreira & Buchweitz, 1993; Novak & Gowin, 1996), visto que permite uma aprendizagem mais eficiente, desenvolve um instrumento mental passível de ser utilizado em futuras aprendizagens e possibilita a consolidação do conteúdo do esquema. Por outro lado, na aprendizagem a partir de esquemas, a nova informação interage com conceitos existentes na estrutura cognitiva do aluno e torna-se significativa quando essa informação interage com conceitos relevantes preexistentes nessa estrutura (Moreira & Buchweitz, 1993).

Num estudo da unidade didática de Estatística, realizado por Viseu, Fernandes, Fernandes, Faria e Duarte (2009), concluiu-se que quase todos os alunos de uma turma do 10.º ano, do ensino profissional, apreciaram usar o programa CmapTools (http://cmap.ihmc.us) para construir os seus mapas de conceitos, tendo apresentado trabalhos interessantes e revelado possuir conhecimentos sobre os conceitos estatísticos tratados.

Mais recentemente, Fernandes (2022) estudou as relações existentes entre os objetos matemáticos intervenientes na realização, com o GeoGebra, das operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e raiz quadrada de números positivos, tendo-se evidenciado a existência de relações relevantes entre as diferentes operações.

2. Exploração quadriláteros com o GeoGebra

Nesta secção exploramos vários quadriláteros, vistos como conceitos, começando por construí-los no GeoGebra e prosseguindo com a análise dos elementos importantes desses conceitos, na perspetiva de Joyce e Weil (1996), que se revelam na sua construção.

2.1. Explorar a construção do quadrado

Nesta atividade vamos construir um quadrado no GeoGebra. Para tal, é dado um segmento de reta, de medida de comprimento a, e pretende-se construir um quadrado de lado a. Na Figura 1 mostra-se a construção geométrica do quadrado.

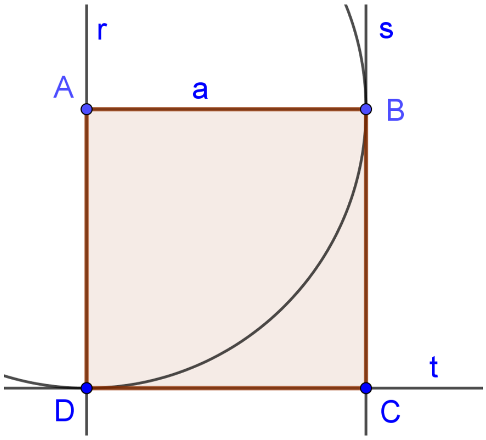

FIGURA 1: Construção do quadrado a partir dos lados e dos ângulos
FONTE: Elaboração do autor

Definido o lado a do quadrado, que na Figura 1 corresponde ao segmento de reta $[AB]$, conduzem-se pelos pontos A e B retas perpendiculares ao segmento de reta $[AB]$, as retas r e s. De seguida, desenha-se a circunferência de centro em A e raio a, tendo em vista manter a medida do comprimento a, o que permite definir o ponto D, que é um outro vértice do quadrado. Finalmente, conduz-se pelo ponto D uma reta perpendicular ao lado $[AD]$ do quadrado, a reta t, definindo-se, assim, o vértice C, interseção das retas s e t. Deste modo, para definir o quadrado, basta usar a opção polígono e percorrer os quatro vértices A, B, C e D, obtendo-se o quadrado $[ABCD]$.

Analisando a construção do quadrado no GeoGebra, tendo por referência os elementos do conceito quadrado, obtém-se o resultado registado no Quadro 1.

Elementos do conceito	Conceito de quadrado	Construção no GeoGebra
Nome	Quadrado.	O nome é uma convenção, não decorre da construção.
Atributos essenciais	(1) quadrilátero; (2) lados congruentes; (3) ângulos retos (ou congruentes).	Todos os atributos essenciais estão presentes na construção.
Atributos não essenciais	(1) tamanho do quadrado; (2) posição do quadrado.	Arrastar um elemento do quadrado para variar o seu tamanho e a sua posição.
Exemplos positivos	Qualquer tipo de quadrado.	Obtêm-se por arrastamento de um elemento do quadrado.
Exemplos negativos	Qualquer figura que não seja quadrado.	Todos os exemplos são quadrados, logo não se podem definir exemplos negativos.
Regra	É um quadrilátero com os lados e ângulos congruentes.	A partir dos atributos essenciais pode-se estabelecer a regra.

Quadro 1. Análise da construção do quadrado no GeoGebra tendo por referência os elementos do conceito de quadrado

Em alternativa, pode-se construir o quadrado considerando-se outros atributos essenciais e outra regra. De seguida, exemplifica-se uma dessas possibilidades construindo o quadrado tendo em conta as propriedades das suas diagonais. Para tal, nesta atividade vamos construir um quadrado no GeoGebra a partir das suas diagonais, como se mostra na Figura 2.

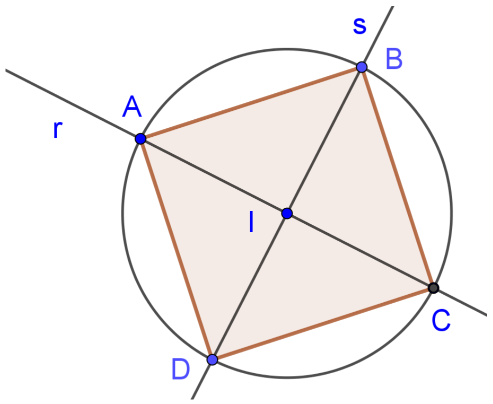

FIGURA 2: Construção do quadrado a partir das diagonais
FONTE: Elaboração do autor

Porque as diagonais do quadrado são perpendiculares, começamos por desenhar duas retas perpendiculares, as retas r e s, que se intersetam no ponto I. Por outro lado, como as diagonais do quadrado são congruentes e se bissetam, desenhamos uma circunferência de centro em I e qualquer raio. Ora, a circunferência interseta as retas em quatro pontos, A, B, C e D, que são os vértices do quadrado. Deste modo, para definir o quadrado, bastar usar a opção polígono e percorrer os quatro vértices A, B, C e D, obtendo-se o quadrado $[ABCD]$.

Analisando a construção do quadrado no GeoGebra, tendo por referência os elementos do conceito quadrado, obtém-se o resultado registado no Quadro 2.

Elementos do conceito	Conceito de quadrado	Construção no GeoGebra
Nome	Quadrado.	O nome é uma convenção, não decorre da construção.
Atributos essenciais	(1) quadrilátero; (2) diagonais congruentes; (3) diagonais perpendiculares; (3) diagonais bissetam-se.	Todos os atributos essenciais estão presentes na construção.
Atributos não essenciais	(1) tamanho do quadrado; (2) posição do quadrado.	Arrastar um elemento do quadrado para variar o seu tamanho e a sua posição.
Exemplos positivos	Qualquer tipo de quadrado.	Obtêm-se por arrastamento de um elemento do quadrado.
Exemplos negativos	Qualquer figura que não seja quadrado.	Todos os exemplos são quadrados, logo não se podem definir exemplos negativos.
Regra	É um quadrilátero em que as suas diagonais são congruentes, perpendiculares e se bissetam.	A partir dos atributos essenciais pode-se estabelecer a regra.

Quadro 2. Análise da construção do quadrado no GeoGebra tendo por referência os elementos do conceito de quadrado

2.2. Explorar a construção do paralelogramo

Nesta atividade vamos construir um paralelogramo no GeoGebra. Para tal, são dados dois segmentos de reta, de medidas de comprimento a e b, e pretende-se construir um paralelogramo de lados a e b. Na Figura 3 mostra-se a construção geométrica do paralelogramo.

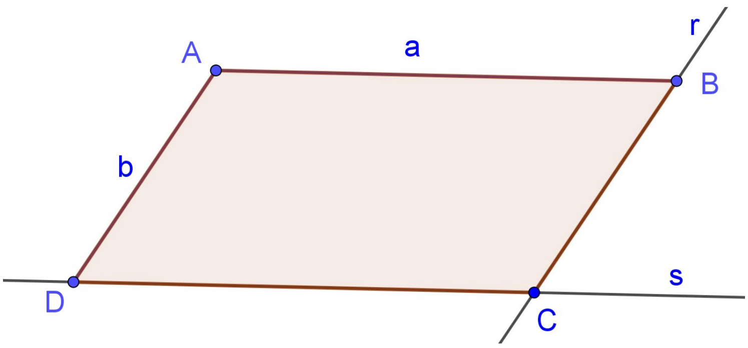

FIGURA 3: Construção do paralelogramo a partir do paralelismo dos lados
FONTE: Elaboração do autor

Definidos os lados a e b do paralelogramo, que na Figura 3 correspondem aos segmentos de reta $[AB]$ e $[AD]$, respetivamente, conduz-se pelo ponto B uma reta paralela ao segmento de reta $[AD]$, a reta r, e pelo ponto D uma reta paralela ao segmento de reta $[AB]$, a reta s. Ora, essas retas intersetam-se no ponto C, que é o vértice em falta do paralelogramo. Deste modo, para definir o paralelogramo, bastar usar a opção polígono e percorrer os quatro vértices A, B, C e D, obtendo-se o paralelogramo $[ABCD]$.

Analisando a construção do paralelogramo no GeoGebra, tendo por referência os elementos do conceito paralelogramo, obtém-se o resultado registado no Quadro 3.

Elementos do conceito	Conceito de paralelogramo	Construção no GeoGebra
Nome	Paralelogramo.	O nome é uma convenção, não decorre da construção.
Atributos essenciais	(1) quadrilátero; (2) lados opostos paralelos.	Todos os atributos essenciais estão presentes na construção.
Atributos não essenciais	(1) tamanho do paralelogramo; (2) posição do paralelogramo.	Arrastar um elemento do paralelogramo para variar o seu tamanho e a sua posição.
Exemplos positivos	Qualquer tipo de paralelogramo.	Obtêm-se por arrastamento de um elemento do paralelogramo.
Exemplos negativos	Qualquer figura que não seja paralelogramo.	Todos os exemplos são paralelogramos, logo não se podem definir exemplos negativos.
Regra	É um quadrilátero com os lados opostos paralelos.	A partir dos atributos essenciais pode-se estabelecer a regra.

Quadro 3. Análise da construção do paralelogramo no GeoGebra tendo por referência os elementos do conceito de paralelogramo

Em alternativa, pode-se construir o paralelogramo considerando-se outros atributos essenciais e outra regra. De seguida, exemplifica-se uma dessas possibilidades construindo o paralelogramo tendo em conta a propriedade de congruência dos lados do paralelogramo. Para tal, nesta atividade vamos construir um paralelogramo de lados a e b no GeoGebra a partir da congruência dos lados do paralelogramo, como se mostra na Figura 4.

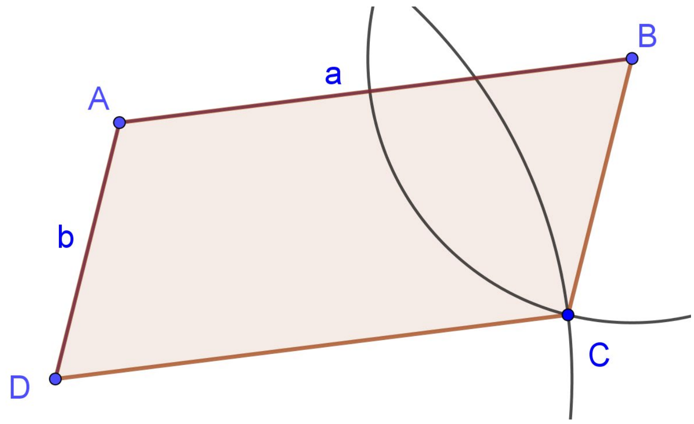

FIGURA 4: Construção do paralelogramo a partir da congruência dos lados
FONTE: Elaboração do autor

Começámos por definir os lados a e b do paralelogramo, que na Figura 4 correspondem aos segmentos de reta $[AB]$ e $[AD]$, respetivamente. Seguidamente, tendo em conta que os comprimentos dos lados opostos do paralelogramo são congruentes, desenhamos uma circunferência de centro em B e raio b e outra circunferência de centro em D e raio a. Obteve-se, assim, o ponto C, ponto de interseção das duas circunferências, que é o vértice em falta do paralelogramo. Deste modo, para definir o paralelogramo, bastar usar a opção polígono e percorrer os quatro vértices A, B, C e D, obtendo-se o paralelogramo $[ABCD]$.

Analisando a construção do paralelogramo no GeoGebra, tendo por referência os elementos do conceito paralelogramo, obtém-se o resultado registado no Quadro 4.

Elementos do conceito	Conceito de paralelogramo	Construção no GeoGebra
Nome	Paralelogramo.	O nome é uma convenção, não decorre da construção.
Atributos essenciais	(1) quadrilátero; (2) lados opostos congruentes.	Todos os atributos essenciais estão presentes na construção.
Atributos não essenciais	(1) tamanho do paralelogramo; (2) posição do paralelogramo.	Arrastar um elemento do paralelogramo para variar o seu tamanho e a sua posição.
Exemplos positivos	Qualquer tipo de paralelogramo.	Obtêm-se por arrastamento de um elemento do paralelogramo.
Exemplos negativos	Qualquer figura que não seja paralelogramo.	Todos os exemplos são paralelogramos, logo não se podem definir exemplos negativos.
Regra	É um quadrilátero de lados opostos congruentes.	A partir dos atributos essenciais pode-se estabelecer a regra.

Quadro 4. Análise da construção do paralelogramo no GeoGebra tendo por referência os elementos do conceito de paralelogramo

2.3. Explorar a construção do papagaio[2]

Nesta atividade vamos construir um papagaio no GeoGebra. Para tal, são dados dois segmentos de reta, de medidas de comprimento a e b, e pretende-se construir um papagaio de lados a e b, como se mostra na Figura 5.

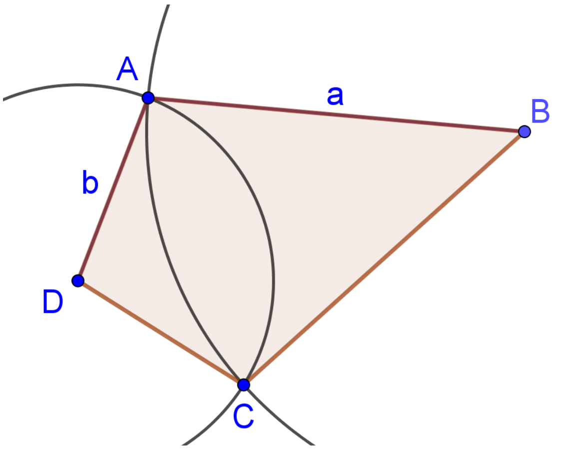

FIGURA 5: Construção do papagaio a partir dos lados
FONTE: Elaboração do autor

Começámos por definir os lados a e b do paralelogramo, que correspondem aos segmentos de reta $[AB]$ e $[AD]$, respetivamente. De seguida, considerando que o papagaio tem dois pares de lados consecutivos congruentes, desenhou-se uma circunferência de centro em B e raio a e outra circunferência de centro em D e raio b. Obteve-se, assim, o vértice C em falta do papagaio, definido pela interseção das duas circunferências. Agora, para definir o paralelogramo, bastar usar a opção polígono e percorrer os quatro vértices A, B, C e D, obtendo-se o papagaio $[ABCD]$.

Analisando a construção do paralelogramo no GeoGebra, tendo por referência os elementos do conceito papagaio, obtém-se o resultado registado no Quadro 5.

Elementos do conceito	Conceito de papagaio	Construção no GeoGebra
Nome	Papagaio.	O nome é uma convenção, não decorre da construção.
Atributos essenciais	(1) quadrilátero; (2) dois pares de lados consecutivos congruentes.	Todos os atributos essenciais estão presentes na construção.
Atributos não essenciais	(1) tamanho do papagaio; (2) posição do papagaio.	Arrastar um elemento do papagaio para variar o seu tamanho e a sua posição.

[2] Papagaio é um quadrilátero que tem dois pares de lados consecutivos congruentes ou, em alternativa, é um quadrilátero em que as diagonais são perpendiculares e pelos menos uma bisseta a outra.

Exemplos positivos	Qualquer tipo de papagaio.	Obtêm-se por arrastamento de um elemento do papagaio.
Exemplos negativos	Qualquer figura que não seja papagaio.	Todos os exemplos são papagaios, logo não se podem definir exemplos negativos.
Regra	É um quadrilátero com dois pares de lados consecutivos congruentes.	A partir dos atributos essenciais pode-se estabelecer a regra.

Quadro 5. Análise da construção do papagaio no GeoGebra tendo por referência os elementos do conceito de papagaio

Em alternativa, tal como nos casos anteriores, pode-se construir o papagaio considerando-se outros atributos essenciais e outra regra. De seguida, exemplifica-se uma dessas possibilidades construindo o papagaio tendo em conta a propriedade das suas diagonais. Para tal, nesta atividade vamos construir um papagaio no GeoGebra a partir da propriedade das diagonais do papagaio, como se mostra na Figura 6.

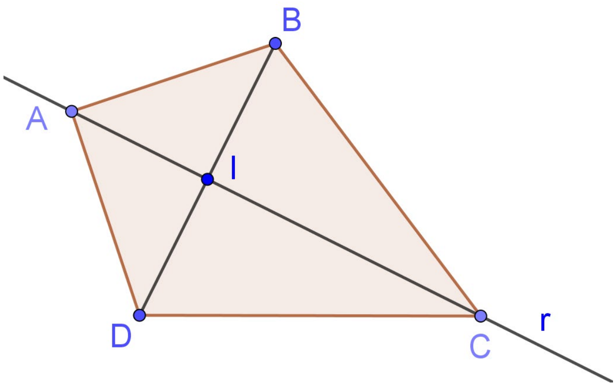

FIGURA 6: Construção do papagaio a partir das suas diagonais
FONTE: Elaboração do autor

Começámos por definir uma das diagonais do papagaio, a diagonal $[BD]$, e definiu-se o seu ponto médio, o ponto I. Seguidamente, porque as diagonais são perpendiculares, conduziu-se pelo ponto I uma reta r perpendicular à diagonal $[BD]$ e definiu-se sobre essa reta o segmento de reta $[AC]$, que é a outra diagonal do papagaio. Portanto, os pontos extremidade das duas diagonais, os pontos A, B, C e D, são os quatro vértices do papagaio. Deste modo, para definir o papagaio, bastar usar a opção polígono e percorrer os quatro vértices A, B, C e D, obtendo-se o papagaio $[ABCD]$.

Analisando a construção do papagaio no GeoGebra, tendo por referência os elementos do conceito paralelogramo, obtém-se o resultado registado no Quadro 6.

Elementos do conceito	Conceito de Papagaio	Construção no GeoGebra

Nome	Papagaio.	O nome é uma convenção, não decorre da construção.
Atributos essenciais	(1) quadrilátero; (2) diagonais perpendiculares; (3) uma das diagonais bisseta a outra.	Todos os atributos essenciais estão presentes na construção.
Atributos não essenciais	(1) tamanho do papagaio; (2) posição do papagaio.	Arrastar um elemento do papagaio para variar o seu tamanho e a sua posição.
Exemplos positivos	Qualquer tipo de papagaio.	Obtêm-se por arrastamento de um elemento do papagaio
Exemplos negativos	Qualquer figura que não seja papagaio.	Todos os exemplos são papagaios, logo não se podem definir exemplos negativos.
Regra	É um quadrilátero de diagonais perpendiculares e em que uma delas bisseta a outra.	A partir dos atributos essenciais pode-se estabelecer a regra.

Quadro 6. Análise da construção do paralelogramo no GeoGebra tendo por referência os elementos do conceito de paralelogramo

2.4. Orientações para o estudo dos quadriláteros na sala de aula

Explorados os conceitos dos diferentes quadriláteros, conforme foi relatado antes, interessa sugerir orientações para a sua exploração pelos estudantes na sala de aula. Para tal, propõem-se três momentos para a realização desse estudo.

No primeiro momento, é fornecido aos estudantes o desenho do quadrilátero que eles devem construir com o GeoGebra, no qual são registadas as propriedades de lados, ângulos ou diagonais, ou seja, os atributos que são relevantes para a construção. Poderão ser fornecidos dois ou mais desenhos do quadrilátero, em que se destaque num deles propriedades dos lados, noutro propriedades dos ângulos e noutro propriedades das diagonais ou, ainda, combinando propriedades de lados, ângulos e diagonais.

No segundo momento, os estudantes estabelecem os atributos essenciais do quadrilátero que contruíram e a regra ou definição desse quadrilátero. Os atributos essenciais e a regra poderão ser distintos consoante as propriedades que foram registadas no desenho do quadrilátero que foi disponibilizado aos estudantes.

No terceiro momento, os estudantes apresentam as conclusões obtidas e discutem entre si e com o professor tendo em vista estabelecer todos os elementos do conceito em estudo (nome, atributos essenciais, atributos não essenciais, exemplos positivos, exemplos negativos e regra). Trata-se, portanto, de institucionalizar o conhecimento adquirido pelos estudantes nos momentos anteriores.

Em termos organização da sala de aula, nos dois primeiros momentos, que se pretende que sejam de trabalho autónomo, recomenda-se que os estudantes trabalhem em pares ou em pequenos grupos de modo que eles se possam entreajudar em situações de dificuldade. Já no terceiro momento, o trabalho deve desenvolver-se no grupo-turma para que os estudantes, com a supervisão do professor, apresentem e discutam as conclusões que obtiveram nos momentos anteriores, tendo em vista o estabelecimento do conhecimento normativo.

Conclusões e implicações

No presente estudo explorámos a construção de três tipos de quadriláteros no GeoGebra, especificamente o quadrado, o paralelogramo e o papagaio. Após a construção dos quadriláteros, analisámos a construção tendo por referência os vários elementos dos respetivos conceitos relativos a cada quadrilátero, ou seja, o nome, os atributos essenciais, os atributos não essenciais, os exemplos positivos, os exemplos negativos e a regra. Finalmente, apresentámos algumas sugestões para o trabalho dos estudantes em sala de aula.

Observando os vários Quadros em que se regista a análise do processo de construção dos quadriláteros no GeoGebra, verifica-se que os principais elementos dos respetivos conceitos se evidenciam nessa construção. Evidenciam-se, sobretudo, os atributos essenciais e não essenciais, os exemplos positivos e, portanto, explicitam-se os elementos que permitem estabelecer a regra do conceito respetivo. No caso do elemento nome, embora sendo importante (Skemp, 1993), trata-se de uma convenção, quer a construção seja efetuada com papel e lápis quer no GeoGebra. Já os exemplos negativos não se evidenciaram na construção dos quadriláteros no GeoGebra, pois os exemplos que se produzem por arrastamento cumprem os atributos essenciais do conceito e, portanto, são sempre positivos. Conclui-se, assim, que na construção dos quadriláteros no GeoGebra se revelam os principais elementos dos correspondentes conceitos.

Outro resultado importante evidenciado no presente estudo consiste na possibilidade de construir um mesmo quadrilátero envolvendo atributos essenciais distintos e uma regra (ou definição) do conceito também distinta. No caso dos quadriláteros aqui explorados apresentámos para cada um deles duas construções distintas, embora sejam possíveis outras construções. Estas diversas construções do mesmo quadrilátero assumem-se como um importante aspeto da aprendizagem dos alunos ao permitir-lhes aprofundar o seu conhecimento acerca dos quadriláteros (Skemp, 1993), possibilitando-lhes reconhecer outras propriedades e novas definições.

Apesar de não ter sido explicitamente tratado no estudo, as relações entre quadriláteros são tratadas indiretamente, ao permitir comparar os elementos dos correspondentes conceitos. Neste caso, o estudo dos diferentes quadriláteros constitui uma fase prévia ao estabelecimento de relações entre os conceitos, entre as quais se destaca a relação de inclusão (Crowley, 1987), sendo que essas relações constituem outra dimensão importante da aprendizagem dos quadriláteros (Novak & Gowin, 1996; Skemp, 1993).

Perante o que foi referido anteriormente, conclui-se que as tarefas aqui exploradas sobre os diversos quadriláteros afiguram-se como tendo muito interesse para a aprendizagem de alunos do 2.º e 3.º ciclo do ensino básico português[3] (do 5.º ao 9.º ano). Por um lado, trata-se de um conteúdo que é central dos programas escolares de matemática, que se desenvolve ao longo de toda a escolaridade, numa vertente mais intuitiva nos primeiros anos escolares (do 1.º ao 4.º ano) e posteriormente numa vertente mais formal (a partir do 5.º ano) (Ministério da Educação, 2021, 2023). Por outro lado, o GeoGebra, enquanto ferramenta informática, mantém forte ligações com a própria matemática e promove a motivação dos alunos para aprenderem (Fernandes & Viseu, 2006).

Por fim, realça-se que, embora o estudo se tenha desenvolvido a partir da exploração de três tipos de quadriláteros, se pode extrapolar as conclusões obtidas para qualquer tipo de quadrilátero ou mesmo para outras figuras geométricas planas, o que aumenta a abrangência e a importância do estudo.

Referências

Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular — Educação é a Base*. Brasília: Ministério da Educação.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In Mary M. Lindquist, & Albert P. Shulte (Eds.), *Learnig and Teaching Geometry, K-12* (1987 Yearbook, pp. 1-16). Reston, VA: NCTM.

Fernandes, J. A. (2022). Operar com números positivos no GeoGebra: implicações didáticas. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, *11*(2), 72-91.

Fernandes, J. A., & Viseu, F. (2006). Implicações das novas tecnologias para o currículo de matemática. In A. F. Moreira, J. A. Pacheco, S. Cardoso, & A. C. Silva (Orgs.), *Actas do VII Colóquio sobre questões curriculares – III colóquio luso-brasileiro. Globalização e (des)igualdades: os desafios curriculares* (pp. 993-1007). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade Minho.

[3] Em Portugal, o ensino básico desenvolve-se entre o 1.º e o 9.º ano de escolaridade, e organiza-se nos três seguintes ciclos: 1.º ciclo, do 1.º ao 4.º ano; 2.º ciclo, 5.º e 6.º anos; e 3.º ciclo, do 7.º ao 9.º ano; já o ensino secundário desenvolve-se entre o 10.º e o 12.º ano de escolaridade.

Fernandes, J. A., Alves, M. P., Viseu, F. & Lacaz, T. M. (2006). Tecnologias de informação e comunicação no currículo de matemática do ensino secundário após a reforma curricular de 1986. *Revista de Estudos Curriculares*, *4*(2), 291-329.

Joyce, B., & Weil, M. (1996). *Models of teaching*. Boston: Allyn and Bacon.

Junqueira, M. (1996). Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. *Quadrante*, *5*(1), 61-108.

Ministério da Educação (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática: Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2023). *Aprendizagens Essenciais de Matemática: Ensino Secundário*. Lisboa: Autor.

Moreira, M. A., & Buchweitz, B. (1993). *Novas estratégias de ensino e aprendizagem: os mapas conceptuais e o Vê epistemológico*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1996). *Aprender a aprender*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

Skemp, R. R. (1993). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Viseu, F., Fernandes, J. A., Fernandes, M. C., Faria, M. S., & Duarte, P. (2009). Os mapas de conceitos na aprendizagem de Estatística por alunos do 10.º ano do ensino profissional. In P. Dias, & A. Osório (Eds.), *VI Conferência Internacional de TIC na Educação: Challenges 2009* (pp. 873-885). Braga: Centro de Competência da Universidade do Minho.