MODELAGEM DE OBJETOS CAMPEIROS: INVESTIGAÇÃO CENTRADA NAS IDEIAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALISTA

Modeling of pampas objects: Investigation centered in the ideas of education mathematics realistic

Herton Caminha Goerch
Vanilde Bisognin

Resumo

Este trabalho teve como objetivo investigar sobre as possibilidades que a Modelagem Matemática oferece à aprendizagem de conceitos matemáticos em uma turma de Ensino Médio de uma escola pública federal localizada na cidade de Alegrete/RS. A atividade proposta foi: a modelagem de objetos campeiros, com o auxílio do *software GeoGebra*, usados no trabalho do tropeiro que vive no Estado do Rio Grande do Sul. A pesquisa foi ancorada nas ideias da Educação Matemática Realista e sua aproximação com as ideias da Modelagem Matemática. Tiveram-se por base os pressupostos teóricos, as reflexões próprias e os objetivos da pesquisa. Estabeleceu-se a análise dos dados, a partir da qual foi possível perceber que o trabalho com Modelagem Matemática originário de um tema que faz parte do cotidiano dos alunos e com o auxílio de ferramenta computacional despertou o interesse e a motivação para estudar conteúdos matemáticos, além do desenvolvimento de habilidades para a investigação e a compreensão do papel sociocultural da Matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Educação Matemática Realista. Objetos Campeiros.

Abstract

This work focuses on research into the possibilities that offers Mathematical Modeling learning of mathematical concepts in a class of high school from a public school located in Alegrete/RS. The proposed activities were modeling pampas objects used in the work of the drover who lives in the state of Rio Grande do Sul, with the help of software *GeoGebra*. The research was grounded on the ideas of realistic mathematics education and their approach to the ideas of Mathematical Modeling. Based on the theoretical assumptions, the own reflections and research objectives, set up the data analysis it was possible to realize that working with mathematical modeling, from a subject that is part of the daily life of students and with the help computational tool, aroused the interest and motivation to study math concepts beyond the development of skills for research and understanding the sociocultural role of mathematics.

Keywords: Mathematical Modeling. Realistic Mathematics Education. Field Objects.

Introdução

A Matemática é uma ciência utilizada para resolver problemas advindos do contexto social e para explicar e compreender inúmeros fenômenos. Em muitos casos, modelos são elaborados para tentar compreender o problema e perceber que ações devem ser previstas para atuar em determinadas situações. Historicamente, o desenvolvimento da Matemática tem ocorrido a partir da busca de respostas a problemas intrínsecos a ela e advindos de outras áreas de conhecimento. A busca de respostas aos problemas conduziu à proposição de modelos que levaram à construção de novos saberes, ou seja, constituíram-se em ponto de partida para a construção de novos campos do saber matemático e que foram sendo incorporados a ela através dos tempos.

Por outro lado, de acordo com D'Ambrósio (1999), o papel da educação é preparar cidadãos para viver num mundo em constante transformação e diversificado culturalmente. Nessa direção, o autor destaca a Modelagem Matemática como uma estratégia capaz de revelar, por meio da construção de modelos, o papel da Matemática que está presente no cotidiano das pessoas, o que pode ser a motivação inicial para estudá-la.

Essas ideias constam também dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, PCN, (BRASIL, 1997). No documento, destaca-se que os professores, ao trabalharem com alunos de diferentes níveis de ensino, precisam levar em consideração o contexto em que seus alunos vivem, valorizar a história dos povos, os hábitos e costumes, pois podem se constituir em importantes subsídios para a sala de aula, conforme a leitura:

> A construção e a utilização do conhecimento matemático não são feitas apenas por matemáticos, cientistas ou engenheiros, mas, de formas diferenciadas, por todos os grupos socioculturais que desenvolvem e utilizam habilidades para contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar e explicar, em função de suas necessidades e interesses. Valorizar este saber matemático, intuitivo e cultural, aproximar o saber escolar do universo cultural em que o aluno está inserido, é de fundamental importância para o processo de ensino e aprendizagem. (BRASIL, 1997, p.34)

Assim, entendemos que trabalhar, em sala de aula, questões relacionadas com o dia a dia dos alunos, as quais fazem parte do trabalho de suas famílias e da história de suas origens, é fundamental para que eles compreendam a importância da Matemática e, com isso, sintam-se motivados para o seu estudo.

Neste trabalho, descrevem-se os resultados de uma pesquisa em que se propôs modelar os diferentes objetos campeiros usados pelo tropeiro (pessoa que trabalha nas lidas do campo no arreamento da encilha) juntamente com os alunos de um curso Técnico de Agropecuária do Instituto Federal Farroupilha, localizado na cidade de Alegrete/RS. A pesquisa desenvolvida buscou relacionar a Matemática presente na construção dos objetos da encilha do tropeiro, ainda presente na vida do gaúcho, por meio da Modelagem Matemática e alicerçada nas ideias da Matemática Realista de Freudenthal. A questão norteadora da pesquisa foi: de que forma a modelagem de objetos campeiros relacionados com a encilha, por meio da manipulação desses objetos concretos, ajuda os alunos a descobrir a Matemática envolvida num problema da realidade e a representá-la na forma de modelos matemáticos?

As questões relacionadas com o fazer do tropeiro são fortes no Rio Grande do Sul, especialmente nas regiões da Campanha e Fronteira Oeste deste Estado, onde predominam grandes estâncias, as quais têm como foco a criação de gado. Os hábitos e costumes dos antigos tropeiros são cultuados e seguidos por grande parte dessas comunidades.

A maioria dos alunos com quem o trabalho foi desenvolvido é proveniente de cidades da região Sul do Rio Grande do Sul, cujas famílias, em sua maioria, trabalham com os afazeres campeiros. Assim, a motivação deste trabalho surgiu do fato de os objetos campeiros fazerem parte da realidade dos alunos e, também, do fato de cultivarem os hábitos e os costumes dos antigos tropeiros.

Modelagem Matemática

Pesquisas na área de modelagem têm crescido muito no Brasil e em diversos países de todos os continentes nas últimas décadas. Elas são atestadas por inúmeras publicações e congressos realizados como, por exemplo, a Conferência Internacional de Modelagem e Aplicações Matemáticas no Ensino (ICTMA-XVI Edição 2013) e a Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM-VIII Edição 2013), entre outros. Essas pesquisas envolvem diferentes concepções e, em decorrência disso, Kaiser e Sriraman (2006) e Blomhoej (2008) desenvolveram um estudo no qual tentaram categorizar as várias perspectivas emergentes da investigação em Modelagem Matemática no ensino, de forma a organizar e sistematizar as várias abordagens presentes nos trabalhos com Modelagem Matemática voltadas ao ensino de Matemática. Segundo os autores, essas perspectivas foram apenas uma forma de organização e sistematização, mas elas não são estanques e separadas, mas sim cada trabalho pode ter características de mais de uma perspectiva. Nessa direção, os autores referem-se, em geral, a seis perspectivas categorizadas pelos seus objetivos relacionados ao processo de modelagem, que são: a perspectiva realista, a contextual, a educacional, a sociocrítica, a epistemológica e a cognitiva.

A perspectiva realista está alicerçada na resolução de problemas do mundo real, na compreensão do mundo e no desenvolvimento de competências de modelagem. Ela está relacionada com a modelagem de problemas advindos de situações do mundo real e mediados pelo uso de tecnologias. Ou seja, nessa perspectiva, a principal preocupação é proporcionar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de aplicar a Matemática na resolução de problemas da vida real. A modelagem é vista como uma atividade interdisciplinar de resolução de problemas.

A perspectiva contextual está relacionada com a base filosófica da noção de modelo matemático e sua conexão com teorias de aprendizagem. Essa perspectiva tem a preocupação central de trabalhar a modelagem na sala de aula por meio de situações-problema advindas do interesse dos alunos e, desse modo, promover a aprendizagem da Matemática.

A perspectiva educacional está relacionada com a preocupação de integrar a modelagem no ensino da Matemática, ou seja, nessa perspectiva a modelagem é entendida como um meio para aprender Matemática. De acordo com Blum e Niss (1991), nessa abordagem, têm-se como objetivos centrais a implementação da modelagem nas práticas dos professores e a avaliação dos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem. As ideias centrais estão relacionadas com a estrutura e o desenvolvimento dos processos de aprendizagem, com o desenvolvimento de novos conceitos, já estudados pelos alunos e, também, com a introdução de novos conceitos.

A perspectiva epistemológica está alicerçada em teorias gerais aplicadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática. A preocupação central está no desenvolvimento de teorias matemáticas e, nessa concepção, destaca-se a Matemática Realista de Hans Freudenthal, entre outras.

A perspectiva cognitiva tem como base a compreensão das funções cognitivas que estão na base da atividade de Modelagem Matemática. Aqui ganham importância os processos seguidos pelos alunos enquanto desenvolvem atividades de modelagem e os processos de desenvolvimento do pensamento matemático pelo uso de modelos, como a abstração e a generalização.

A perspectiva sociocrítica tem como objetivo predominante da Modelagem Matemática para o ensino tornar os estudantes cidadãos autônomos, independentes e críticos com capacidade de interagir e tomar decisões através da análise de modelos matemáticos. Destacam-se os trabalhos de D'Ambrósio (1986, 1999), que tem discutido e investigado dentro dessa perspectiva, pois, para ele, numa sociedade do conhecimento, educar para a cidadania "exige uma 'apreciação' do conhecimento moderno, impregnado de ciência e tecnologia" (D'AMBRÓSIO, 1998, p.87), e a ciência moderna está sedimentada na Matemática. Destacam-se ainda, nessa perspectiva, os trabalhos de Skovsmose (2005), Barbosa (2003) e Araújo (2009), entre outros.

Analisando-se alguns trabalhos apresentados em congressos e outros publicados em revistas sobre Modelagem Matemática no ensino, é possível perceber que algumas perspectivas entrelaçam-se uma com as outras ou mesmo complementam-se.

Buscou-se, a partir deste trabalho, oportunizar aos alunos o contato com problemas situados em um contexto do mundo real, a partir da modelagem de objetos campeiros usados no trabalho do tropeiro, ou seja, do homem que vive e trabalha nas lidas do campo, do Estado do Rio Grande do Sul, com o auxílio do *software Geo-*

Gebra. Entende-se que a pesquisa desenvolvida possui fortes características das perspectivas realista, epistemológica e educacional, uma vez que, segundo Blomhoej (2008), as fronteiras entre essas categorias são tênues e uma complementa a outra.

As ideias da Matemática Realista e sua aproximação com as ideias de modelagem

A Educação Matemática Realista (EMR) é uma teoria de ensino e aprendizagem que foi introduzida e desenvolvida, primeiramente, pelo Instituto Freudenthal, na Holanda, e reconhece Hans Freudenthal (1905-1990) como seu criador. Suas ideias deram início, na década de 70, a uma reforma da Educação Matemática naquele país. A teoria está centrada na concepção da Matemática como uma "atividade humana" que é caracterizada como uma atividade de resolução de problemas, de procura de problemas e de organização de um assunto da Matemática ou do mundo real. A ideia central é determinar como a Matemática pode ser apresentada aos alunos de forma a facilitar a reinvenção da própria Matemática, o que, segundo Freudenthal, significa dar ênfase ao processo evolutivo da aprendizagem. O autor afirma que quando a matematização é estabelecida como um dos objetivos da Educação Matemática, significa considerar a matematização da Matemática e a matematização da realidade, levando em consideração a interação social que acontece no processo de ensino e de aprendizagem. A EMR envolve não só a matematização de uma situação real, mas também generalizações e formalizações, a modelagem, o uso de símbolos, de esquemas e definições.

O autor defende que, ao matematizar situações da realidade, deve-se começar por problemas do dia a dia dos alunos, pois possibilita que estes utilizem conhecimentos prévios para tentar compreender o fenômeno próximo a eles.

Ao tratar da matematização, Treffers (1987, apud BAIOA, 2011) caracteriza-a como matematização horizontal e vertical. A primeira refere-se ao processo de descrever o contexto de um problema em termos matemáticos, ou seja, refere-se à passagem do mundo real para o mundo da Matemática, e a segunda refere-se ao trabalho dentro do mundo da Matemática.

Ao trabalhar no mundo da Matemática, a partir de um problema do mundo real, o aluno avança progressivamente construindo e reconstruindo a Matemática. Esse processo de matematização progressiva envolve a matematização horizontal e vertical.

De acordo com Treffers (1987, apud BAIOA, 2011), o processo de matematização engloba os seguintes princípios:

a) Princípio da atividade, que é caracterizado como o processo de extrair um conceito a partir de uma situação concreta;
b) Princípio da realidade, que significa que o ponto de partida das experiências dos alunos deve ser do conhecimento dos mesmos, ou seja, pertencer ao seu cotidiano;
c) Princípio dos níveis, que significa que, para aprender Matemática, se deve passar por vários níveis desde a busca de soluções simples e informais dentro do contexto do problema até a criação de modelos, esquemas, busca de conceitos e o estabelecimento de relações;
d) Princípio da conectividade, que é caracterizado pela integração de vários conceitos;
e) Princípio da interatividade, que é caracterizado pela interação entre alunos e professores como sendo uma parte essencial no processo de ensino e de aprendizagem;
f) Princípio da reinvenção guiada, que significa dar oportunidade aos alunos de reinventarem a Matemática, que deve ser possibilitado pelo professor. Segundo Baioa (2011, p.28),

> Um requisito é a capacidade de os professores preverem onde e como podem antecipar a compreensão e as habilidades dos alunos que estão prestes a despontar. Sem esta perspectiva não é possível guiar a aprendizagem dos alunos.

Neste contexto, Freudenthal destaca a importância do papel do professor e dos currículos no processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

A EMR preconiza que o trabalho do professor com os alunos visa a gerar experiências que tenham significado para os mesmos de modo que a Matemática surja a partir do processo de matematização e que eles próprios sejam responsáveis pela criação do conhecimento matemático. Assim, o trabalho deve ter início a partir de situações contextualizadas em que os alunos busquem soluções que façam sentido para eles e, aos poucos, vão avançando no conhecimento até atingirem níveis de abstração e formalização.

No contexto das ideias da EMR, o uso da Modelagem Matemática desempenha um papel central com vistas ao desenvolvimento da Matemática porque um modelo emerge de uma situação problematizadora a partir do contexto dos alunos. Por modelo matemático entendem-se uma figura, um esquema, uma tabela, uma relação de igualdade ou desigualdade. No processo de matematização, a partir de uma situação-problema, inicialmente, o modelo que surge pode ser algo simples, mas por um processo de generalização e formalização pode-se chegar a modelos mais complexos. Ao tratar de atividades práticas inseridas nas ideias da EMR, Baioa (2011) destaca quatro níveis de modelos:

a) Nível situacional, em que as estratégias e as soluções dependem da interpretação dos alunos para o problema que, em geral, está associado a um contexto fora da escola;

b) Nível referencial, em que os modelos e as estratégias dependem da interpretação de como agir em relação ao problema;

c) Nível geral, em que predomina a atividade matemática com uso de linguagem formal e informal;

d) Nível da Matemática formal, em que cada aluno trabalha com procedimentos que envolvem a Matemática formal sem levar em consideração o modelo inicialmente proposto.

Analisando-se os quatro níveis descritos pela autora, é possível identificar a matematização horizontal e vertical. A matematização horizontal acontece na passagem do nível situacional para o nível referencial, e a vertical acontece na passagem do nível referencial para o geral.

De acordo com Gravenmeier (1994, apud BAIOA, 2011), os níveis não são estanques e nem hierárquicos. O aluno pode tanto avançar um nível sem passar pelo anterior como também pode retornar a um nível anterior ou, ainda, pode misturar o nível geral e o formal.

Na Modelagem Matemática, a matematização está associada, em geral, aos esquemas de modelagem, os quais são formas de visualização do processo de modelagem, pois explicitam as etapas e as transições entre elas. Nela, a passagem de um problema não matemático para um problema matemático está associada ao processo de matematização e, mais especificamente, ao processo de matematização horizontal. De acordo com as ideias da Modelagem Matemática preconizadas por Bassanezi (2002), os alunos, a partir de um tema proposto pelo professor ou em conjunto com os alunos, exploram a temática, problematizam, encontram e identificam conceitos e relações matemáticas, esquematizam, fazem conjecturas, descobrem regularidades e estabelecem um modelo, propõem soluções, analisam e refletem sobre o resultado obtido fazendo comparações com a situação inicialmente proposta. Neste processo de matematização os alunos passam pelos vários níveis preconizados pela EMR.

A matematização, segundo as ideias de Freudenthal (1991), tem uma aproximação com os esquemas e fundamentos da Modelagem Matemática, uma vez que é possível identificar as características como as já descritas anteriormente. Analisando-se os esquemas de Modelagem Matemática, estes iniciam, em geral, uma situação do mundo real, e os esquemas de matematização partem de um problema real, que é a segunda etapa do processo. Portanto, é possível observar que existe uma boa aproximação entre o processo de modelagem e o processo de matematização da EMR, ou seja, as ações nesta perspectiva buscam a organização dos dados, definição de hipóteses, transição da linguagem natural para a linguagem matemática, análise das variáveis envolvidas no problema, a formulação de um problema matemático e a esquematização; assemelham-se assim às ações no processo horizontal. Além disso, as ações no processo de modelagem como definição de um modelo, domínio de técnicas matemáticas para a criação do modelo, uso de linguagem simbólica e formal, as diferentes representações do modelo e generalização se aproximam da matematização vertical.

Procedimentos metodológicos

Nesta investigação, a abordagem da pesquisa foi qualitativa e a metodologia adotada teve como procedimentos de coleta de dados a observação participante, visto que o pesquisador esteve presente durante todo o desenvolvimento da mesma. Houve uma entrevista com o historiador Flávio Poitevin, responsável pelo museu do gaúcho – Ícaro Ferreira da Costa –, da cidade do Alegrete. A entrevista baseou-se na origem dos objetos campeiros utilizados pelo homem do campo do Rio Grande do Sul. Outrossim, foi aplicado um questionário aos alunos no término das atividades de modelagem para indagar sobre o trabalho realizado e as produções dos alunos.

Conforme Lüdke e André (1986, p.11), “a pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra, através do trabalho intensivo de campo”. Participaram da pesquisa 18 alunos de uma turma de 2º ano do curso de Agropecuária do Instituto Federal da cidade de Alegrete/RS, sendo o primeiro autor professor. O trabalho desenvolveu-se numa duração de nove horas.

A observação participante é um tipo de estudo em que o pesquisador coleta dados em relação ao comportamento dos participantes, quando esses estão realizando as tarefas, individualmente ou em grupo. Segundo Lüdke e André (1986), essa forma de pesquisa requer o registro de tudo o que está ocorrendo durante a realização do trabalho. Esses registros foram realizados no diário de campo do pesquisador.

O questionário, conforme Fiorentini e Lorenzato (2006, p.116), “é um dos instrumentos mais tradicionais de coleta de informações”. Pode constituir-se de perguntas abertas ou fechadas e tem por função coletar informações sobre um indivíduo ou grupo, relacionadas a um determinado fato, situação ou fenômeno. Para esta pesquisa, foi elaborado um instrumento contendo perguntas com a finalidade de saber a opinião dos alunos sobre o trabalho de modelagem, envolvendo o estribo. A seguir, foi proposta a realização de uma oficina, com duração de aulas, cujo objetivo foi o desenvolvimento de atividades de modelagem de objetos campeiros, especialmente o freio, o estribo e a espora. Durante a aplicação da atividade, os alunos trabalharam em grupos de até 4 alunos, designados por A, B, C, D, E, F e G, e os componentes de cada grupo por A_1, A_2,....,G_1, G_2, G_3,G_4.

Neste artigo, escolhemos os dados obtidos com a modelagem do estribo e, para isso, usamos, inicialmente, lápis e papel e, num segundo momento, o *software GeoGebra*, para ilustrar o trabalho realizado.

Análise e interpretação dos resultados

O desenvolvimento da oficina foi realizado em horário extraclasse e contou com a participação de 18 estudantes. No primeiro encontro, foi apresentada e debatida com os alunos a entrevista gravada com o historiador que versou sobre os hábitos e os costumes do homem que vive e trabalha na lida do campo e as origens dos objetos campeiros. Após o debate, os alunos foram convidados a descrever os objetos usados no arreamento da encilha utilizados pelo tropeiro. Os alunos selecionaram os seguintes objetos: o freio, o estribo e a espora. Após a seleção dos objetos, os alunos foram convidados a descrever matematicamente com lápis e papel cada um dos objetos. Neste trabalho, descreve-se o processo seguido pelos alunos na modelagem do estribo. A atividade foi proposta tendo em vista a teoria da EMR.

Após a explanação inicial, foi apresentado aos alunos, reunidos em grande grupo, o objeto que seria estudado: o estribo.

Figura 1 – O estribo.

Fonte: criação do autor.

A seguir, os alunos foram divididos em três grupos, compostos por seis elementos e, após a apresentação, foi solicitado que cada grupo tentasse modelar o objeto, usando apenas lápis e papel. Essa atividade caracteriza-se por uma situação real, ou seja, modelar um objeto conhecido dos alunos. Além disso, é proposta a exploração do mesmo, recorrendo a relações matemáticas que envolvem conhecimentos e conceitos de álgebra e geometria.

A primeira tentativa dos grupos foi fazer um desenho do estribo sem se preocupar com a modelagem em si, usando os conteúdos da Matemática. Essa fase é identificada na teoria da EMR como a matematização horizontal, em que os alunos buscam, a partir do objeto concreto, estabelecer um problema. Nesse caso, o problema foi fazer a identificação do objeto a ser modelado em termos de relações matemáticas e não estabelecer um desenho do mesmo.

Com a proposição da construção do estribo, pretendia-se que os alunos conseguissem trabalhar conceitos algébricos como os diferentes tipos de funções linear, constante, quadrática, inversa, trigonométricas, além dos conceitos de escalas. Para modelar esse objeto, é sempre fundamental que se parta, primeiramente, da construção dos elementos mais simples que o compõem.

Após refletir sobre o que tinha acontecido, o professor pesquisador, em seu registro da observação do trabalho, assim se pronunciou: "achei que deveria intervir e instigar os alunos para a utilização de relações matemáticas". Assim, indagou:

P: Quais os elementos que compõem o estribo? Qual o elemento que serve de apoio aos demais elementos? A ideia é procurar representar o objeto usando os conhecimentos de Matemática. Portanto, sugiro que vocês pensem em cada parte do objeto e tentem buscar uma representação matemática.

Após a intervenção do professor-pesquisador, um aluno questionou:

$B_{4:}$ Então é pensar em uma função que pode representar a base, por exemplo?

P: Exatamente, escolha uma das partes e tente representá-la matematicamente. Que figuras geométricas vocês identificam no objeto? Tentem encontrar uma expressão matemática que descreva cada parte identificada.

A pergunta do aluno é comum e frequente por parte dos estudantes que não estão habituados com a reflexão mais criteriosa, mas sempre aguardando as respostas do professor. O desafio colocado pelo professor-pesquisador foi claro e foi o ponto de partida para o trabalho. Nesse aspecto, concorda-se com Barbosa (2001) quando afirma que, no trabalho com modelagem, há a *tensão* do primeiro passo. Para superar essa tensão, o papel do professor é de fundamental importância, pois ele não pode dar respostas prontas, mas apenas questionar, sugerir, propor conjecturas de modo a levar o aluno a pensar.

Nesse momento, o professor-pesquisador, como responsável pela condução do trabalho, também se questionou: os alunos saberiam quais conceitos matemáticos utilizar na modelagem do objeto? Aí foi quando o professor-pesquisador também passou por um momento de tensão. Isso está de acordo com as ideias de Oliveira e Barbosa (2010) quando se referem à tensão do professor no trabalho com modelagem.

Depois das observações e dos questionamentos do professor-pesquisador, os alunos começaram o processo de modelagem e perceberam que, para modelá-lo, era preciso escolher uma escala. Isso ficou claro na questão colocada pelo aluno B_1:

B_1: A construção deve ser do mesmo tamanho do objeto real?

P: É possível representar o tamanho real do objeto em uma folha de papel?O que é preciso estabelecer para que todas as partes tenham um tamanho proposicional?

B_1: Deve-se pensar em uma escala para manter a mesma proporção entre as partes.

P: Sim, exatamente. Ao modelar, é preciso levar em consideração esse fato: quais as medidas reais do objeto e qual a proporção das partes que deve ser mantida?

A partir da questão colocada, os alunos realizaram a medição de cada parte do estribo e verificaram que a medida real da base era de 15cm e 22cm de altura, o suficiente para apoiar os pés, de qualquer tamanho dos cavaleiros.

Nas discussões nos grupos, o professor-pesquisador percebeu o quanto eles questionavam-se entre si:

C2: Observando as partes do estribo, acredito que poderíamos, inicialmente, procurar uma forma de modelar a alça que prende o estri-

bo. É preciso pensar que relações matemáticas podem ser usadas.

C_1: Que função pode representar a base?

B_3: Podemos usar retas e uma parábola. O problema é como achar esta função?

B_2: Podemos pensar em encontrar uma função quadrática e uma função constante.

B_1: O problema é como encaixar uma função na outra?

Nesse momento, os alunos conseguiram perceber o que poderiam fazer para modelar o objeto. A identificação do problema a ser modelado e a transposição para o uso de relações matemáticas significam que os alunos passaram da matematização horizontal para iniciar o processo de matematização vertical, isto é, passaram a buscar elementos dentro da própria Matemática para modelar o objeto.

O grupo C compreendeu a sugestão e começou a construção do objeto. Ao mesmo tempo, o grupo B apresentava sinais de dificuldade para iniciar a modelagem e buscou informações com o grupo C:

B5: Como vocês iniciaram a construção da modelagem do objeto?

C4: Vocês devem tentar aplicar os conhecimentos que sabem sobre função afim e constante.

Após discussões entre os elementos do mesmo grupo e dos grupos entre si, os três grupos procuraram desenvolver o trabalho, até que surgiu uma nova indagação por parte de um componente do grupo A:

A2: Professor, a parte de cima do estribo parece um retângulo, mas, para ser retângulo, falta um lado. Como construo essa parte?

P: Sugiro que busquem por outros conceitos matemáticos que possam ser aplicados na construção dessa parte do objeto, não necessariamente a figura de um retângulo.

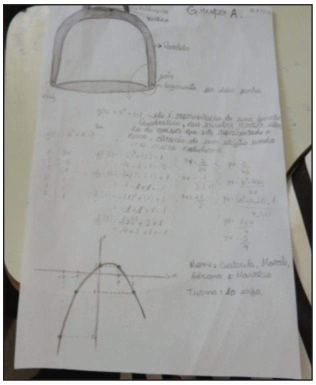
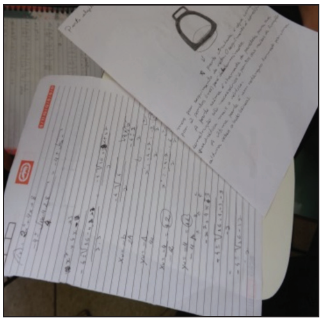
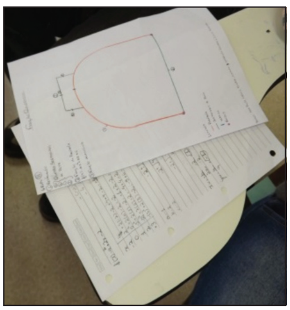
Durante a realização do trabalho, cada grupo trabalhou separadamente e fizeram as suas construções. O grupo A partiu da ideia de buscar um ponto de partida para modelar o objeto, identificando a parte que representasse um conceito matemático mais simples. Assim, iniciaram a construção pela base do objeto, que pode ser identificado por uma reta através do uso de uma função linear. Após essa construção, os alunos identificaram o ponto médio X desta reta como sendo o mesmo X do vértice da parábola que forma o "arco" do estribo. A partir disso, passaram a usar a função quadrática para construir o "corpo" do objeto. Constataram ainda, que o ponto médio X da reta que forma a base do estribo, independentemente da altura da parábola, tem sempre o mesmo valor do X do vértice da parábola. Para a parte superior, chamada de "passa loro", o grupo utilizou segmentos de reta, com intervalos definidos.

O grupo B, analisando o objeto e manuseando-o, focou sua atenção, no primeiro momento, na curvatura do estribo e identificou as semelhanças existentes com uma das parábolas. O aluno B_3 comentou, num determinado momento: *[...] se a concavidade dessa parte é voltada para baixo, significa que o valor do coeficiente "a" da função quadrática é negativo.* A partir desse comentário, o grupo passou a buscar uma função quadrática que melhor identificasse a parte do objeto. Prosseguindo, os alunos buscaram um conceito matemático para concluir a modelagem do objeto na sua base e parte superior e entenderam que, para isso, poderiam usar segmentos de reta representados por funções lineares.

No grupo C, os integrantes tiveram maior facilidade no entendimento do trabalho proposto e iniciaram a modelagem pela parte chamada "passa loro", utilizando segmentos de reta, com o uso de funções lineares. Verificaram, imediatamente, que a "parte curva" do estribo poderia ser representada através de uma parábola, usando para tal objetivo a função quadrática e que a base do objeto poderia ser construída também com segmentos de reta, em intervalos determinados, de acordo com a abertura da "boca" da parábola.

Com o conhecimento adquirido em aulas anteriores sobre funções, cada grupo conseguiu estabelecer, com lápis e papel, um modelo para o objeto. Na Tabela 1, são apresentados os resultados de cada grupo, na qual está exposta a relação matemática que cada um utilizou.

Tabela 1 – Construção dos alunos.

Grupo	Construção dos alunos	Construção
A		Função quadrática $-x^2 - x + 1$ Segmentos de reta passando pelos pontos: X = -1/2 e Y = 5/4
B		Função quadrática $-2x^2 - 4x + 3$ Segmentos de reta passando pelos pontos: X = -1 e Y = 5
C		Função quadrática $- x + 2x - 2$ Segmentos de reta passando pelos pontos: X = 1 e Y = -1

Analisando-se as produções de cada grupo, infere-se que os alunos conseguiram problematizar, a partir do objeto escolhido e, ao mesmo tempo, conseguiram modelá-lo, usando os conhecimentos da Matemática. Embora a passagem da matematização horizontal para a vertical não tenha sido um processo fácil, o fato de poderem manipular o objeto, que faz parte do dia a dia dos mesmos, contribuiu para com o trabalho.

No segundo encontro com a turma, passou-se ao processo de modelagem do mesmo objeto, mas, agora, usando o *software GeoGebra*. Os alunos foram conduzidos ao laboratório de informática, onde cada um ocupou um computador, no qual já se encontrava instalado o *software*.

Os alunos, mesmo trabalhando individualmente nos computadores, trocavam informações entre si, sobre o processo de construção do estribo. Alguns estudantes, com maior domínio do aplicativo, questionaram:

A5: Professor, tenho que usar os mesmos passos da modelagem com lápis e papel?

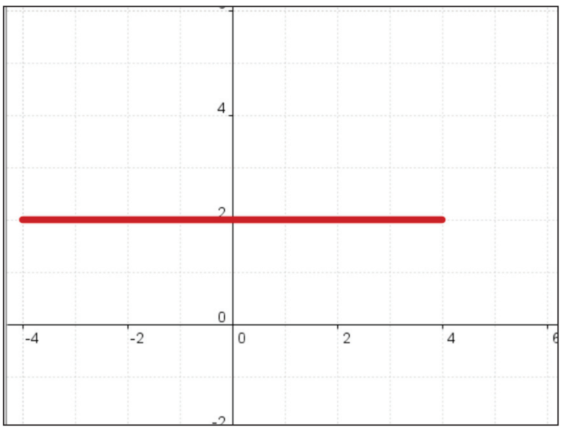
P: Existem outras formas de construir o objeto, diferentemente do que foi feito com lápis e papel?

$A_{2:}$ Sim, o software apresenta vários comandos e posso usar o que achar mais conveniente.

Todos os grupos conseguiram transpor o que haviam feito com lápis e papel para o computador usando, convenientemente, os comandos do *GeoGebra*. A seguir, descreve-se o trabalho e os passos seguidos pelos componentes do grupo A.

O grupo iniciou o trabalho representando a base do estribo, como mostrado na Figura 2, e usou uma escala 1:1/2, que corresponde a 8cm de largura e com altura partindo do ponto y = 2 .

Figura 2 – Representação para a base do estribo.

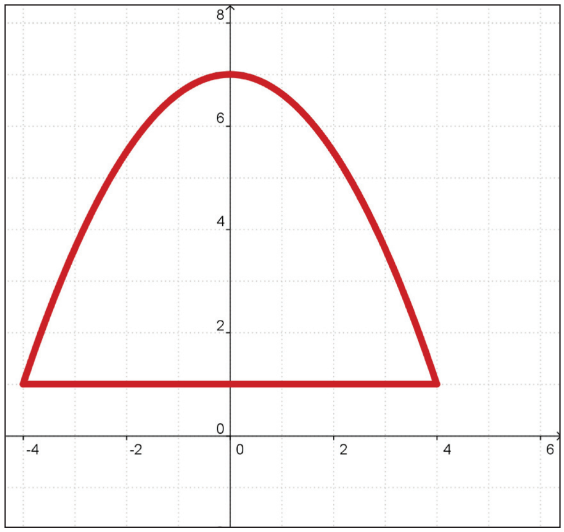


Fonte: a pesquisa.

Após a construção da base, o grupo passou a representar os demais elementos do objeto. Por meio de questionamentos, o professor conduziu o processo de modelagem.

Com base nos questionamentos do professor, os alunos propuseram representar o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e buscaram determinar, por meio de um sistema de equações construído a partir da escolha de três pontos, os coeficientes da mesma. Após cálculos, obtiveram $a = -\frac{3}{8}$, $b = 0$ e $c = 7$ e, assim, determinaram a função $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 7$ que representa o que é chamado o bocal do estribo. Com essa determinação, o grupo obteve a representação mostrada na Figura 3.

Figura 3 – Representação da parte central do estribo.

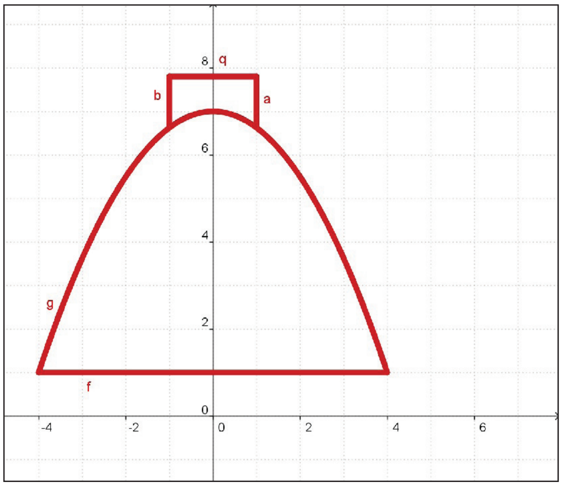


Fonte: a pesquisa.

Para completar o modelo do estribo, o grupo partiu para a construção da parte denominada "passa loro", que é a parte superior do objeto, local destinado à colocação da correia (loro) que prende ao arreio para dar sustentação e permitir a montagem do cavaleiro.

Nessa parte, os alunos sentiram dificuldade, pois tiveram de usar um comando do *GeoGebra* identificado como as características da função inversa. Esse comando não está definido no *software* e, assim, foi necessário a intervenção do professor. Este, em grande grupo, explanou que, sempre que necessário *plotar* a função inversa, é necessário usar o comando: "Se[<Condição>, <Então>]". Usar o comando: "Curva[<Expressão>, <Expressão>, <Variável>, x(Canto[1]), x(Canto[2])]". Com essa sugestão, os alunos conseguiram concluir a modelagem da parte "passa loro", como é mostrado na Figura 4.

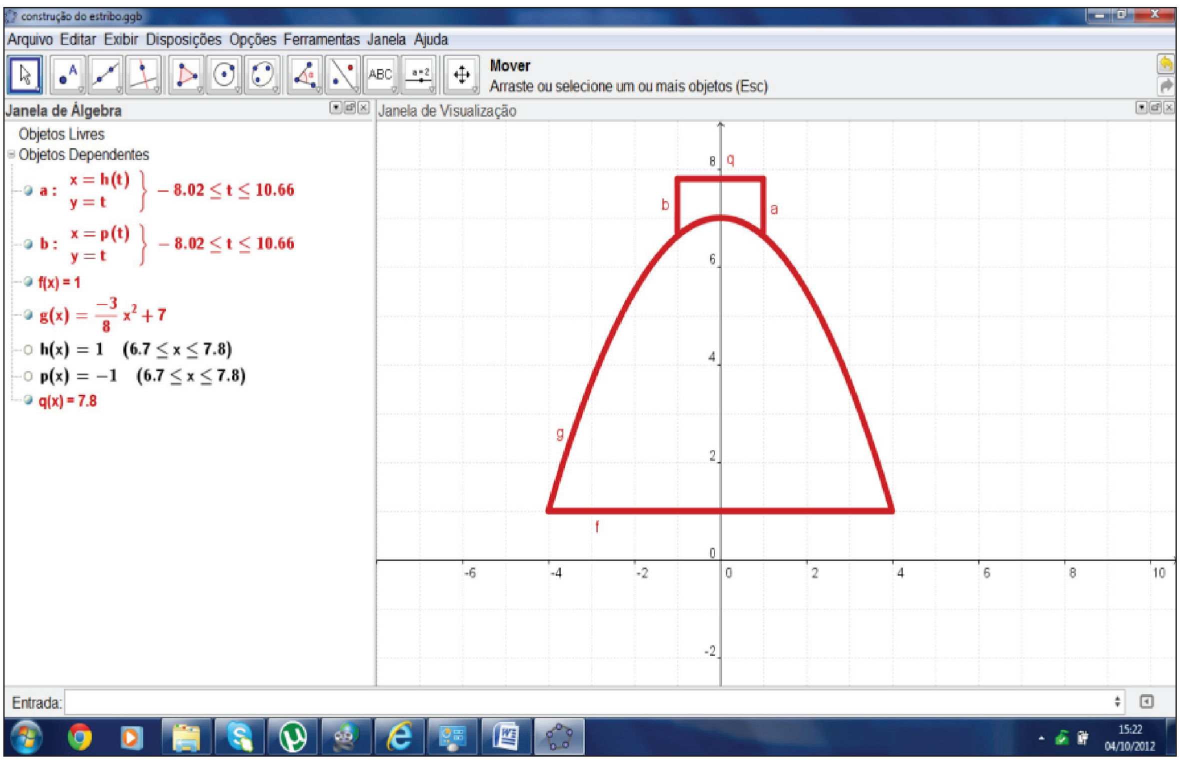
Figura 4 – Representação do estribo construído pelo grupo A.



Fonte: a pesquisa.

Para encerrar a atividade, o professor-pesquisador estabeleceu, em grande grupo, um resumo dos passos seguidos pelo grupo A para modelar o estribo, como mostra a Figura 5.

Figura 5 – Página do *software* – passos da construção do estribo.



Fonte: a pesquisa.

Para encerrar a primeira parte da oficina, no terceiro encontro, foi realizada uma avaliação do trabalho e foram dados os encaminhamentos para a modelagem de outros objetos campeiros que foram deixados como sugestão de trabalhos futuros, mas que não estão descritos neste trabalho. O professor-pesquisador aplicou um questionário, contendo perguntas abertas, para saber a opinião dos estudantes sobre o trabalho realizado.

$A_{2:}$ Pra mim, foi algo novo, nunca tinha tido aulas dessa forma.

$B_{3:}$ A aula ficou mais interessante, parece que dessa forma enxergamos a Matemática presente.

P: Qual foi o momento mais difícil?

$A_{3:}$ Pra mim, o momento mais difícil foi iniciar a construção com lápis e papel. Não sabia por onde começar.

$C_{3:}$ Eu tive dificuldades de entender o significado da modelagem em si, achava que modelar era o mesmo que desenhar, fazer um molde igual.

Das respostas dos alunos, a maioria respondeu que gostou de trabalhar em grupo e de procurar modelar os objetos que são usados no dia a dia da vida de suas famílias. Um aluno, porém, relatou que:

C4: Não me senti à vontade trabalhando dessa forma. No primeiro momento, com lápis e papel, até consegui produzir alguma coisa, mas depois, com o software, não consegui fazer a construção.

A afirmação do aluno representou um alerta para o professor-pesquisador, pois ele colocou um problema relacionado com o uso do computador, isto é, apesar da grande defesa que é feita sobre o uso de *software* na sala de aula, isso nem sempre é uma unanimidade. De fato, o desempenho do aluno no trabalho com lápis e papel foi muito bom, enquanto que, com o computador, ele não conseguiu estabelecer a modelagem do objeto.

Considerações finais

Os dados coletados durante a realização do trabalho revelaram que, inicialmente, o mesmo mostrou-se experimental por meio do manuseio do objeto e, a seguir, as relações matemáticas emergiram e foi sendo modelado com o uso de lápis e papel.

A análise e a compreensão da situação real proposta foi uma etapa difícil e que demandou mais tempo, mas aos poucos, os alunos começaram a identificar as partes do objeto que poderiam modelar e, assim, foram estabelecendo as relações. Todos os grupos conseguiram modelar o objeto e a matematização horizontal surgiu de forma lenta, mas gradativa, e as relações matemáticas emergiram rapidamente. Os grupos conseguiram estabelecer um modelo usando linguagem matemática tanto formal como informal.

Os alunos seguiram o ciclo de investigação definido por Carr e Kemmis (1988) como sendo: planificação, atuação, observação e reflexão. De fato, a partir da definição do objeto a ser modelado os alunos traçaram um plano de atuação, nos dois momentos, isto é, com lápis e papel. Após, com o uso do *software*, observaram e refletiram sobre o caminho traçado.

O fato de trazer para a sala de aula objetos que fazem parte do cotidiano dos alunos foi positivo, pois se criou um ambiente de trabalho em que os mesmos discutiam entre si com conhecimento do objeto, argumentando, sugerindo e propondo conjecturas. Os alunos conseguiram ver a Matemática presente no objeto e, com isso, trilharam o caminho do mundo real para o mundo matemático, desenvolvendo a matematização horizontal. Os alunos exploraram e conseguiram identificar a Matemática presente no objeto real e isto está de acordo com as ideias da EMR.

Ao longo de todo o processo, foi possível constatar que a aprendizagem da matemática passa por vários níveis de compreensão, ou seja, desde a capacidade de problematizar uma situação a partir de uma situação concreta, de propor soluções informais relacionadas com o contexto, de proposição de esquemas e relações matemáticas, de interação e negociação entre os colegas e com o professor. Foi possível identificar também as etapas da matematização, ou seja, a matemática horizontal, pela problematização e criação de modelos, e a vertical, quando os alunos conseguiram identificar relações matemáticas e suas conexões com as diferentes partes do objeto.

A proposição de modelar objetos que fazem parte do cotidiano dos alunos foi significativa para eles, uma vez que gerou uma experiência em que a Matemática surgiu a partir de um contexto da vida dos mesmos e mostrou situações em que ela pode ser aplicada. Problemas contextualizados para serem modelados estão de acordo com as ideias da EMR e da Modelagem Matemática, e neste sentido as duas teorias estão centradas na busca de modelos. Além disso, ambas as teorias estão centradas na aquisição de conceitos e na conexão entre eles, na descoberta de relações e na busca de padrões e regularidades.

De acordo com princípios da EMR, que requerem problemas contextualizados e com as ideias da modelagem que possibilitam aos alunos entender e resolver problemas (neste caso, envolveu o uso de lápis, papel e de ferramentas computacionais) este trabalho proporcionou o desenvolvimento de estratégias no processo de soluções, inicialmente informais, como ficou visível na proposição de um desenho do objeto sem o uso de relações matemáticas, até a possibilidade de propor modelos bem estruturados em que se fez uso de conhecimentos prévios.

Finalmente, vale registrar que o fato de modelar objetos que fazem parte da vida dos alunos mostrou-se significativo, pois foi possível observar que a modelagem mostrou-se uma metodologia adequada para a inserção de elementos culturais que fazem parte da comunidade onde os estudantes vivem.

Referências

ARAÚJO, J. Uma Abordagem sociocrítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. In: *ALEXANDRIA – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v.2, n.2, p.55-68, 2009.

BAIOA, A. M. F. M. S. *A experimentação e a atividade de modelação matemática dos alunos.* Dissertação de Mestrado. Faculdade de Ciências e Tecnologia. Universidade do Algarve, 2011.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: 24ª RA da ANPED, *Anais...* Caxambu, 2001.

______. *Uma perspectiva de Modelagem Matemática*. 2003. Disponível em: <http://www.uefs.br/nupemm/cnmem2003.pdf> Acesso em: 17 jul. 2014.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BLOMHOEJ, M. Different perspectives on mathematical modelling in educational research – categorising the TSG21 papers. In: *Procedures of the 11th International Congress on Matematical Educational*, 2008. Disponível em: <http://tsg.icme11.org/tsg/show/22>. Acesso em: 17 jul. 2014.

BLUM, W.; NISS, M. Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. In: *Educational Studies in Mathematics* v.22, n.1, p.37-68, 1991.

BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Orgs.). *Modelagem Matemática:* uma perspectiva para a Educação Básica. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:* ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CARR, W.; KEMMIS, S. *Teoria crítica de la enseñanza.* La investigación acción en la formación del professorado. Barcelona: Martinez Roca, 1988.

D'AMBRÓSIO, U. *Da realidade à acção:* Reflexões sobre educação e matemática. São Paulo, Campinas: Editora da UNICAMP, 1986.

______. *Educação matemática:* da teoria à prática. 4.ed. Campinas: Papirus, 1998. (Perspectivas em Educação Matemática).

______. Literacy, matheracy and technocracy: a trivium for today. *Mathematical Thinking and Learning* v.1, n.2, p.131-153, 1999.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática:* percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FREUDENTHAL, H. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Kluwer, 1991.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. In: *ZDM,* v.38, n.3, p.302-310, 2006.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

OLIVEIRA, A. M. P.; BARBOSA, J. C. A primeira experiência de modelagem matemática e a tensão do "próximo passo". In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. *Anais...* Belo Horizonte: SBEM, 2007. p.1-16. 1 CD-ROM.

SKOVSMOSE, O. Competência democrática e conhecimento reflexivo em matemática. In: MATOS, J. F.; AMORIM, I.; CARREIRA, S.; MOTA, G.; SANTOS, M. (Eds.). *Matemática e realidade:* que papel na educação e no currículo? (p.137-169). Lisboa: SEM-SPCE, 1995.

Herton Caminha Goerch – Mestre em Ensino de Matemática (UNIFRA).

Vanilde Bisognin – Doutora em Matemática (UNIFRA). Projeto CNPq Nº 405635/2012-5.