COMO AS CRIANÇAS PENSAM PARA RESOLVER PROBLEMAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO?

How children think for solving addition and subtraction problems?

Jutta Cornelia Reuwsaat Justo

Resumo

O presente artigo discute a resolução de problemas matemáticos aditivos por crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A análise está fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud que afirma que um conceito não adquire sua significação numa única classe de situações e uma situação não se analisa através de um único conceito. Apresentam-se três cenas de resolução de problemas aditivos, uma de composição e duas de transformação, analisando os esquemas usados pelas crianças na resolução. Conclui-se afirmando que não somente a variedade de problemas, mas também a quantidade deles tem a sua importância. Assim como é necessário permitir que as crianças tenham o tempo necessário de interação para a construção do campo conceitual aditivo.

Palavras-chave: Adição. Subtração. Resolução de Problemas. Teoria dos Campos Conceituais. Ensino Fundamental.

Abstract

This article discusses how children of elementary school solving additives problems. The analysis is based on the Conceptual Fields Theory of Gérard Vergnaud. We present three scenes of solving additive problems, one of composition and two of change, analyzing schemas used by children in the resolution. We conclude by stating that not only the variety of problems but also the amount of them has its importance. It is also important, time to allow children to have the necessary interaction to build the additive conceptual field.

Keywords: Addition. Subtraction. Problem solving. The Conceptual Fields Theory. Elementary Education.

Introdução

A adição e a subtração envolvem uma série de situações e simbolismos que precisam ser trabalhados na escola para que as crianças possam construir a aprendizagem das estruturas aditivas em toda sua abrangência e, assim, dar conta de resolver os diversos problemas matemáticos que a vida lhes apresenta (JUSTO, 2004, 2009, 2012; JUSTO; DORNELES, 2010, 2012; JUSTO et al., 2013).

O presente artigo discute a resolução de problemas matemáticos aditivos por crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A análise está fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, por entendermos que um conceito não adquire sua significação numa única classe de situações, e uma situação não se analisa através de um único conceito (VERGNAUD, 1990). Assim, para construir a aprendizagem da adição e da subtração, as crianças precisam ser desafiadas a resolver diversas classes de situações em que essas operações sejam solicitadas.

A teoria dos campos conceituais

Piaget já julgava as operações de adição e de subtração como partes de um mesmo sistema:

> Chamamos operações às ações interiorizadas (ou interiorizáveis), reversíveis (no sentido de poderem se desenrolar nos dois sentidos e consequentemente de comportarem a possibilidade de uma ação inversa que anula o resultado da primeira) e se coordenando em estruturas, ditas operatórias, que apresentam leis de composição caracterizando a estrutura em sua totalidade, como sistema. Por exemplo, a adição é uma operação porque comporta um inverso (a subtração) e porque o sistema das adições e subtrações comporta leis de totalidade. (PIAGET, 1975, p. 376)

A subtração e a adição formam uma mesma estrutura operatória – as estruturas aditivas, que, para Vergnaud (1996a), podem ser explicadas pela Teoria dos Campos Conceituais. O campo conceitual das estruturas aditivas, segundo Vergnaud (1990, 1996a,b), é formado pelo conjunto de situações que pedem uma adição, uma subtração ou uma combinação dessas duas operações para serem resolvidas e, ao mesmo tempo, pelo conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas. Os problemas aditivos e subtrativos devem ser trabalhados em conjunto porque eles compõem um mesmo campo conceitual, já que há estreitas conexões entre situações aditivas e subtrativas. Isso fica demonstrado pelos procedimentos empregados pelas crianças para a resolução de um mesmo problema que, às vezes, são aditivos e, outras, subtrativos.

A construção do campo conceitual das estruturas aditivas leva tempo e ocorre por um número expressivo de experiências com variadas e diversas situações, assim como pela descoberta de diferentes procedimentos de solução para essas situações-problema. Daí o trabalho de Vergnaud (1996a) na classificação das situações, dos problemas, dos procedimentos e das representações. Verificar a ação da criança na situação apresentada e a organização da sua conduta é analisar o esquema que ela utiliza para resolver o problema que lhe é apresentado – sendo esse o objetivo a que este artigo se propõe.

Vergnaud (1996a) define a *noção de esquema* a partir de Piaget referindo que os esquemas são os recursos de base para a construção do campo conceitual. Eles são ações repetíveis para uma mesma classe de situações, ou seja, a automatização de um esquema acontece numa mesma classe de situações em que a criança já é competente. Os esquemas são os procedimentos, as condutas organizadas por regras de ações e antecipações para situações específicas. Todo esquema está acompanhado de um *teorema-em-ação* ou de um *conceito-em-ação*, que são os aspectos estruturais dos esquemas.

A análise dos esquemas informa ao professor que *objetos de pensamento* a criança usa, quais *conceitos-em-ação* e *teoremas-em-ação* a criança já possui. Vergnaud (1996a) complementa que essa análise nos permite analisar a competência da criança nas situações que compõem o campo conceitual. Esses dados auxiliam a organizar a ação didática do professor.

Os *objetos de pensamento* são conceitos ou conhecimentos que são utilizados para resolver situações-problema. Ou seja, quando um conhecimento passa a ter estatuto de objeto ou nome e não mais de predicado para resolver um problema, este passa a ser um *objeto de pensamento* (VERGNAUD, 1996b). Por exemplo, a invariância de um significante (o cálculo numérico da subtração) contribui para a melhor identificação do significado (em variadas situações) e para sua transformação em objeto de pensamento (VERGNAUD, 1996a).

O *conceito-em-ação* é uma invariante operatória que dá conteúdo ao esquema. Na utilização de um esquema é que o *conceito-em-ação* se dá a conhecer. Ele pode ser pertinente ou não, dependendo da situação em que é usado. Conhecer a sequência numérica usada em uma contagem e a ideia de cardinal são exemplos de *conceitos-em-ação* (VERGNAUD, 1996a).

Os *teoremas-em-ação*[1] apresentam uma relação entre duas invariáveis unidas por uma lógica (se... então...). Podem ser verdadeiros ou

[1] Vergnaud tomou emprestado de Piaget o termo "teorema-em-ação", ampliando sua conceituação (MAGINA et al., 2001).

falsos. Se falsos, representam um erro; mas a análise desse *teorema-em-ação* falso ajuda a elucidar a compreensão do sujeito sobre determinada situação (VERGNAUD, 1996a). Um exemplo de um *teorema-em-ação* é “se eu conheço o cardinal de uma das partes, então é só acrescentar a outra parte para encontrar o total”.

Nem sempre os objetos de pensamento, os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação são facilmente identificáveis nos esquemas que as crianças utilizam na resolução dos problemas. Muitas vezes, eles se encontram tão fortemente imbricados que não podem ser diferenciados. Eles podem se encontrar implícitos quando a criança não tem consciência dos invariantes que está usando e estes podem ser desvendados pela sua ação, ou explícitos quando são expressos pela criança oralmente ou por simbolização escrita.

No campo conceitual aditivo, as expressões simbólicas e as operações de pensamento se constroem e se aplicam em situações de transformação de quantidades, em situações de combinação de quantidades e em situações de comparação de quantidades (FAYOL, 1996; NUNES; BRYANT, 1997). Os números em um problema podem representar medidas[2] estáticas ou transformações e, ainda, podem representar medidas de relações estáticas (VERGNAUD, 1996a).

Trabalhar problemas que tratam de situações de comparação, de transformação e de composição é essencial para a aprendizagem e compreensão desse campo conceitual, pois uma mesma operação aritmética pode estar associada a ideias diferentes (MAGINA et al., 2001). Vejamos os sentidos das ideias de cada situação:

- Situação de transformação → implica a ocorrência de pelo menos uma mudança inicial que resulta num estado final. Os conceitos contemplados são de reunir e separar.
- Situação de composição → implica os conceitos de juntar sem transformar, mas compondo um terceiro estado, apresentando situações de medida de parte-todo.
- Situação de comparação → implica comparar duas quantidades.

O Quadro 1 apresenta os significados das operações de adição e de subtração, trazendo exemplos de problemas para cada tipo de situação.

Quadro – Significados das operações de adição e subtração.

SIGNIFICADOS	PROBLEMAS
Transformação (mudança de uma situação inicial)	Marina tinha cinco5 doces. Sua avó lhe deu 4 doces. Quantos doces ela tem agora? 5 + 4 = ? Pedro tinha 5 balas. Então Tom lhe deu mais algumas balas. Agora Pedro tem 8 balas. Quantas balas Tom deu para Pedro? 5 + ? = 8 (problema aditivo) 8 - 5 = ? (operação inversa) Pedro tinha algumas balas. Então Tom lhe deu mais 5 balas. Agora Pedro tem 8 balas. Quantas balas Pedro tinha no começo? ? + 5 = 8 (problema aditivo) 8 - 5 = ? (op. inversa + comutatividade) Pedro tinha 8 balas. Então ele deu 3 balas para o Tom. Com quantas balas Pedro ficou? 8 - 3 = ? (problema subtrativo) Pedro tinha 8 balas. Então ele deu algumas balas para Tom. Agora Pedro tem 5 balas. Quantas balas ele deu para Tom? 8 - ? = 5 (problema subtrativo)
Composição (situações estáticas de juntar, parte-todo, quanto falta?)	Num vaso há 5 flores vermelhas e 4 flores amarelas. Quantas flores há no total? 5 + 4 = ? (juntar) Num vaso há 9 flores. Cinco são vermelhas e as outras são amarelas. Quantas flores são amarelas? 9 - 5 = ? (parte-todo) João tem um álbum de 30 figurinhas. Ele tem 14 figurinhas. Quantas figurinhas faltam para completar o seu álbum? 30 - 14 = ? (Quanto falta?)
Comparação	Pedro economizou 72 reais. Seu irmão, Tom, economizou 155 reais. Quanto Tom economizou a mais que Pedro?

Fonte: Justo (2004).

[2] Os números podem representar medidas no caso de quantidades contínuas como comprimentos e, também, no caso de quantidades distintas como a de tamanho do conjunto (NUNES; BRYANT, 1997).

Conforme exemplificado no Quadro 1, para cada uma das situações apresentadas, existem problemas diferentes que podem ser determinados em função da natureza da incógnita, ou seja, dependendo de qual dos três elementos é o desconhecido. A classificação dessas situações foi realizada por Carpenter, Hiebert e Moser (1981), por Carpenter e Moser (1982, 1983) e por Riley, Greeno e Heller (1983) (apud FAYOL, 1996; NUNES; BRYANT, 1997), com exceção da situação de "quanto falta" que foi classificada por nós (JUSTO, 2004).

Faz-se necessário que as crianças experienciem diversas situações em que cada operação, no caso, a adição e a subtração, servem como uma estratégia de solução para que, dessa forma, vão construindo conceitos relativos a cada uma dessas operações, buscando os conhecimentos que já possuem sobre elas e estabelecendo relações entre as situações nas quais essas mesmas operações já serviram como estratégia de solução e as novas situações.

As dificuldades que as crianças apresentam na resolução de problemas, afirmam Nunes e Bryant (1997), têm uma ligação com as questões de sentido dos números e também com questões relacionadas a diferentes situações de adição e subtração. Fayol (1996) reforça que as dificuldades podem estar relacionadas a duas categorias de fatores:

- aos aspectos semânticos (conhecimentos conceituais relativos aos aumentos, diminuições, combinações e comparações de conjuntos de elementos; os "conteúdos" evocados – bolas, livros, etc.; o tipo de incógnita);
- ao impacto das formulações e formas de apresentação das situações-problema (influência da colocação da questão – presença ou não de imagens e material – e do vocabulário utilizado).

São esses fatores que reforçam a necessidade de se proporem problemas específicos para desenvolver determinados conceitos, pois o campo conceitual aditivo possui uma complexidade que deve ser levada em conta para compreender a sua aprendizagem.

As operações matemáticas das situações apresentadas podem ser resolvidas através de cálculos. A história da matemática traz exemplos de que o homem, ao operar, buscava técnicas práticas para realizar operações, técnicas que foram denominadas de cálculos (IFRAH, 1989; 1997). Vergnaud (1996a,b) faz uma distinção entre cálculo numérico e cálculo relacional. O cálculo numérico reporta-se aos algoritmos de adição, subtração, multiplicação e divisão, etc., podendo ser considerado como técnicas. O cálculo relacional são as operações de pensamento necessárias para trabalhar com as relações envolvidas nas situações. Por exemplo, no problema "Joana tem 8 balas e ganhou de sua avó 5 balas. Quantas balas ela tem agora?", o cálculo relacional seria aplicar uma transformação aditiva ao estado inicial, e o cálculo numérico implica a adição 8+5=13. Para melhor entendermos e interpretarmos as estratégias das crianças em face de problemas de adição e de subtração, essa distinção elaborada por Vergnaud é importante, pois "os diversos tipos de problemas considerados parecem se diferenciar pelo caráter semântico dos elementos em jogo e pelas relações que entre eles se mantêm" (FAYOL, 1996, p.129).

Neste artigo, vamos ilustrar a construção do campo conceitual aditivo com entrevista realizada por esta pesquisadora com crianças que estudavam na 1ª e 2ª séries do Ensino Fundamental de oito anos de duração (atuais 2º e 3º ano do Ensino Fundamental de nove anos), resolvendo problemas matemáticos. Analisamos três cenas[3].

Cena 1: situação de composição com parte desconhecida

Carolina estudava na 1ª série e estava com 7 anos de idade. Numa situação de composição em que uma das partes é desconhecida, na qual os números se referem a conjuntos de objetos e nenhuma transformação ocorre, ela encontrou com facilidade a resposta porque os números do problema não apresentaram um desafio maior, pois ela já conhecia e dominava as relações operacionais entre as dezenas. Vejamos o que aconteceu:

[3] Disponíveis em *Crianças construindo números*. Direção geral: Beatriz Vargas Dorneles. Produção e edição: Gisele Neuls. Apoio do Programa Especial da Pesquisa ao Ensino da Graduação: produção de material didático da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 1 videocassete (22min), VHS, son., color., fevereiro de 2002. (Disponível na Central de Produções da FACED/UFRGS).

> Paulo tem 30 bolinhas. 20 são azuis e as outras são amarelas. Quantas são amarelas? R:______________________________

Ao solicitarmos que ela mostrasse um cálculo que desse conta da pergunta do problema, ela hesitou, mas, em seguida, fez uma subtração que dá o resultado encontrado por ela. "Eu fiz um cálculo de 30-20 dando a resposta que eu coloquei... pra pergunta". Carolina não demonstrou relacionar a subtração à situação do problema, mas, sim, para responder à pergunta realizada. Quando pedimos que explicitasse o porquê do uso da subtração, ela fez uso de *ferramentas de pensamento* como: operações de adição e subtração entre os nós, inclusive estabelecendo uma *relação transitiva* entre unidades e dezenas: "30-20 é que nem 3-2 e bota o zero atrás".

Ela não conseguia ainda utilizar-se da subtração para a compreensão dessa situação de parte-todo. Ela interpretou como uma adição das partes. Segundo Nunes e Bryant (1997), encontrar o valor de uma das partes quando o todo é conhecido é semelhante a considerar a subtração como o inverso da adição. Considerar isto é muito mais difícil do que compreender a subtração numa situação de transformação. Quando Carolina disse que dava para resolver por mais ou por menos, e explicou o uso da adição nesse caso, ela demonstrou uma conexão entre as invariáveis da situação e o algoritmo da adição (*esquema*) que ela usa como *ferramenta matemática*.

Cena 2: situação de transformação com início desconhecido

Relatamos a resolução de uma situação aditiva de transformação com início desconhecido. Para Nunes e Bryant (1997), essa situação requer que as crianças reconheçam e usem ao mesmo tempo as invariáveis da adição – inversão e comutatividade – para que cheguem à solução através da subtração. Para isso, a criança precisa ter compreendido o *conceito-em-ação* da comutatividade da adição *(a+b=b+a)* e construir o *teorema-em-ação* da inversão *(se a+b=c, então c-b=a ou c-a=b)*.

O problema proposto foi o seguinte:

> No pessegueiro havia frutas. Após algum tempo, surgiram mais 32 pêssegos. Atualmente, há na árvore 96 pêssegos. Quantos pêssegos havia inicialmente no pessegueiro? R:______________________________

Vinícius estava na 2ª série do Ensino Fundamental e tinha 8 anos na época. Ele usou o *esquema* do algoritmo da subtração para resolver este problema, evidenciando reconhecer esta operação como inversa da adição e, também, a comutatividade da adição. Insistimos para ver se ele sabia explicar por que usou a subtração para essa situação, mas ele não conseguiu justificar o *aspecto estrutural do esquema* que usou, mas justificou a *funcionalidade* deste ao dizer: "Tem que ver se combina". Vinícius parecia entender que o esquema deve estar relacionado à situação-problema.

A próxima cena mostra o mesmo menino resolvendo outro problema matemático.

Cena 3: situação de transformação desconhecida

Este problema traz uma situação subtrativa de transformação desconhecida. Nunes e Bryant (1997) afirmam que este problema obtém maior êxito na resolução porque pode ser resolvido seguindo-se os indícios superficiais do problema, ou seja, o problema já indica uma subtração.

> Na floricultura havia 114 vasos de crisântemos. A floricultura vendeu vários vasos. Agora há na floricultura 54 vasos de crisântemos. Quantos vasos foram vendidos? R:______________________________

Vinícius conseguiu representar através da linguagem as operações de pensamento por ele usadas: anunciou oralmente as operações a realizar e os resultados que ia atingir. Resolveu pelo algoritmo tradicional a operação 114-54=60. No entanto, ao solicitarmos a ele uma explicação para a sua solução, não soube precisar com clareza, evidenciando dúvidas sobre o porquê ter utilizado o 54 no cálculo se este era o resultado da ação descrita na situação apresentada no problema. A subtração foi usada por Vinícius, mas, ao justificá-la, pareceu oscilar entre os significados do número no problema e no cálculo. Entendemos que Vinícius encontrava-se em um nível intermediário de conhecimento no qual ainda não apresentava total domínio da situação (BRUN, 1994).

Para resolver corretamente este problema pela subtração, Vinícius parece ter compreendido o *conceito-em-ação* da comutatividade da adição *(X+54=54+X)* e estar construindo o *teorema-em-ação* da inversão *(se X+54=114, então 114-54=X)*, mas sem que esse teorema ainda estivesse suficientemente claro para ele.

Considerações finais

Uma forma de fazer com que as crianças avancem na construção de conceitos relativos ao campo aditivo é propor problemas que sejam desafiadores, que provoquem conflitos cognitivos, forçando-as a usar ou criar outras ferramentas de pensamento para resolvê-los. Pensamos que uma alternativa seria propor problemas que elas não possam resolver tão facilmente, como, por exemplo, ir aumentando o valor numérico das quantidades apresentadas nos problemas. Assim, as crianças precisariam elaborar novos esquemas para solucioná-los (JUSTO, 2004).

As cenas descritas evidenciam que, ao resolver problemas, as crianças precisam interpretar e decidir qual operação usar. Para isso, elas precisam saber dar significado às operações. Para compreender as operações, é preciso refletir sobre elas. Então, devem ser oportunizadas várias situações para que as crianças vivenciem os diferentes significados. Compreender as operações é um processo lento que se desenvolve com o amadurecimento intelectual. Devemos, como professores, ajudar as crianças nesse processo, criando oportunidades para que elas pensem, troquem ideias e façam descobertas, discutindo e resolvendo problemas.

Conforme já dissemos em Justo (2004, 2009, 2012), não somente a variedade de problemas, mas também a quantidade deles tem a sua importância. Além disso, é necessário permitir que as crianças tenham o tempo necessário de interação para a construção do campo conceitual aditivo. Esses três aspectos – variedade, quantidade e tempo – devem ser levados em consideração para um ensino adequado e uma aprendizagem significativa.

Referências

BRUN, J. Evolução das relações entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a didática das matemáticas. In: ARTIGUE, M. et al. *Vinte anos de didática das matemáticas na França. Homenagem a Gui Brousseau e a Gérard Vergnaud*. Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions, 1994.

FAYOL, Michel. *A criança e o número:* da contagem à resolução de problemas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos:* a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tomo 2. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

______. *Os números*: história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

JUSTO, J. C. R. *Mais... ou menos?...:* a construção da operação de subtração no campo conceitual das estruturas aditivas. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: UFRGS, 2004.

______. *Resolução de problemas matemáticos aditivos*: possibilidades da ação docente. Tese (Doutorado em Educação). Porto Alegre: UFRGS, 2009.

______. Resolução de problemas matemáticos aditivos: um ensaio teórico. *Em Tela – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana,* v.3, n.2, p.1-18, 2012.

JUSTO, J. C. R.; DORNELES, B. V. Formação continuada em matemática de professores polivalentes – dois estudos sobre resolução de problemas aditivos. *R. Eletr. de Edu. Matem.*, Florianópolis, v.7, n.1, p.78-96, 2012.

______. Resolução de problemas matemáticos aditivos: possibilidades da ação docente. *Acta Scientiae*, v.12, n.2, jul./dez. 2010.

JUSTO, J. C. R.; REBELO, K. S.; ECHEVESTE, S. S. Resolução de problemas matemáticos no Ensino Fundamental. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* v.26, p.803-812, 2013.

MAGINA, Sandra et al. *Repensando adição e subtração:* contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM Editora, 2001.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo Matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PIAGET, Jean. *Problemas de psicologia genética*. Coleção Os Pensadores, volume LI, São Paulo: Abril Cultural, p.337-422, 1975.

VERGNAUD, Gérard. A trama dos campos conceituais na construção do conhecimento. *Revista do Geempa*, Porto Alegre, p.9-19, 1996b.

______. La theorie des champs conceptueles. In: BRUN, J. *Didatique des mathématiques*. Paris, Delachaux et Niestlé, 1996a.

______. La théorie des champs conceptuels. *Recherches em Didactiques des Mathématiques,* 10 (23), 133-170, 1990.

Jutta Cornelia Reuwsaat Justo – Doutora em Educação, professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática e do curso de Pedagogia da Universidade Luterana do Brasil/ ULBRA, Canoas.