ISSN: 2739-039X
www.reviem.com.ve
Asociación Aprender en Red
Asociación Venezolana de Educación Matemática
Vol. 3, No. 1
DOI: 10.54541/reviem.v3i1.92

Relaciones entre subdominios de conocimiento de un profesor de matemáticas sobre resolución de problemas aditivos

Relationships between subdomains of a mathematics teacher's knowledge about additive problem solving

Relações entre subdomínios do conhecimento de um professor de matemática sobre resolução de problemas aditivos

Keylla Otero-Valega[1]

Estela Juárez-Ruiz[1]

Diana Zakaryan[2]

[1] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México

[2] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

Recibido: 30/07/2023 – Aceptado: 10/10/2023 – Publicado: 07/11/2023

Remita cualquier duda sobre esta obra a: Keylla Otero-Valega
Correo electrónico: kmotero12@gmail.com

Resumen

En este artículo, tomando en consideración que el conocimiento del profesor de matemáticas es sustancial para promover el aprendizaje deseado en los estudiantes, desde el modelo MTSK, se identifican relaciones entre subdominios del conocimiento de una profesora de matemáticas en el diseño de un plan de clases sobre la resolución de problemas aditivos con números enteros. La investigación se ha llevado a cabo utilizando metodología cualitativa, a través de un estudio de caso instrumental, donde el caso es una profesora de educación básica mexicana. La recolección de datos se ha realizado mediante una planeación de clases y una entrevista semiestructurada. Para analizar los datos se utilizó la triada evidencia-indicio-oportunidad y el análisis de contenido. Los resultados mostraron relaciones entre el conocimiento de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de temas anteriores tales como la recta numérica y su utilidad como conexión auxiliar para la enseñanza de problemas aditivos con enteros. Se resalta la aparición del subdominio de las características de aprendizaje de las matemáticas, el cual evidenció relación con los demás subdominios de conocimiento del modelo, mostrando la importancia de anticiparse a los distintos fenómenos de aprendizaje para tenerlos en cuenta en la planeación de clase.

Palabras clave**:** Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK); Relaciones entre subdominios de conocimiento; Resolución de problemas; Números enteros; Problemas aditivos.

Abstract

In this article, taking into consideration that the mathematics teacher's knowledge is substantial to promote the desired learning in students, using the MTSK model, relationships between subdomains of a mathematics teacher' knowledge in the design of a lesson plan on solving additive problems with integers are identified. The research has been carried out using qualitative methodology, through an instrumental case study, where the case is a Mexican basic education teacher. Data collection was carried out through a lesson plan and a semi-structured interview. To analyze the data, the evidence-indictment-opportunity triad and content analysis were used. The results showed relationships between the knowledge of difficulties in learning mathematics and the knowledge of previous topics such as the number line and its usefulness as an auxiliary connection for teaching additive problems with integers. The appearance of the subdomain of learning characteristics of mathematics is highlighted, which showed a relationship with the other subdomains of knowledge of the model, showing the importance of anticipating the different learning phenomena to take them into account in class planning.
Keywords**:** Mathematics Teacher Specialized Knowledge (MTSK); Relationships between knowledge subdomains; Problem solving; Integers; Additive problems.

Resumo

Neste artigo, levando em consideração que o conhecimento do professor de matemática é substancial para promover a aprendizagem desejada nos alunos, a partir do modelo MTSK, são identificadas as relações entre os subdomínios do conhecimento de um professor de matemática na elaboração de um plano de aula sobre a resolução de problemas aditivos com números inteiros. A pesquisa foi realizada com metodologia qualitativa, por meio de um estudo de caso instrumental, em que o caso é um professor de educação básica mexicano. A coleta de dados foi realizada por meio de um plano de aula e de uma entrevista semiestruturada. Para analisar os dados, foram utilizadas a tríade evidência-indício-oportunidade e a análise de conteúdo. Os resultados mostraram relações entre o conhecimento das dificuldades no aprendizado da matemática e o conhecimento de tópicos anteriores, como a reta numérica e sua utilidade como conexão auxiliar para o ensino de problemas aditivos com números inteiros. Destaca-se o aparecimento do subdomínio das características da aprendizagem da matemática, que mostrou uma relação com os outros subdomínios de conhecimento do modelo, mostrando a importância de antecipar os diferentes fenômenos de aprendizagem para levá-los em conta no planejamento das aulas.
Palavras-chave**:** Conhecimento especializado do professor de matemática (MTSK); Relações entre subdomínios de conhecimento; Resolução de problemas; Números inteiros; Problemas aditivos.

INTRODUCCIÓN

Hoy en día, el docente de matemáticas juega un papel relevante en el aula de clases, pues es el encargado de institucionalizar los saberes en sus estudiantes, asimismo, de identificar posibles errores y dificultades que los estudiantes presentan al aprender un objeto matemático específico, para promover el aprendizaje deseado (Hobri *et al*., 2021). Por esto, se hace necesario que el profesor posea un conocimiento especializado para su labor de enseñar matemáticas, desde un punto de vista tanto didáctico como matemático, donde al hablar de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) (por sus siglas en inglés), se hace referencia al conocimiento que solo los docentes de matemáticas poseen con respecto al área que enseñan, y también respecto a la manera en la que puede enseñarse o aprenderse (Sánchez, 2021).

Por otro lado, Rojas (2014) afirma que la resolución de problemas hace parte de los ejes principales de la actividad matemática y es fuente y soporte principal del aprendizaje matemático en la educación básica. Sin embargo, algunos estudiantes presentan dificultades cuando se les indica resolver problemas en un tema matemático específico, como lo menciona Socas *et al.* (2014), el análisis de resultados obtenidos en diversas evaluaciones, tanto a nivel nacional como internacional, ha puesto de manifiesto que la mayoría de los estudiantes tienen serias dificultades al enfrentarse con la resolución de problemas de Matemáticas. Y si hablamos de un caso particular, como lo son los números enteros, los estudiantes presentan dificultades precisamente por la transición que se hace de los números naturales a los números enteros, al llegar a la educación secundaria.

En este sentido, Maca Díaz y Patiño Giraldo (2016) afirman que también algunos docentes poseen dificultades con respecto al concepto de números enteros y esto se refleja en la profundidad con la que se desarrolla esta temática en el aula, y en las estrategias de enseñanza que utilizan, por esto, el profesor debe utilizar metodologías adecuadas que permitan enseñar la materia y atender la diversidad que se encuentra al interior de la misma; además, al momento de preparar clases, los profesores pueden utilizar las necesidades del entorno del estudiante para conseguir que las aplicaciones de los números enteros sean apropiadas y conseguir un acercamiento más atractivo a este conjunto numérico.

Seguidamente, Becerra *et al.* (2012) identifican algunas dificultades y errores que presentan los estudiantes, relacionadas con la adición y sustracción de números enteros y afirman que “las dificultades y errores son limitaciones en el aprendizaje que los estudiantes presentan al resolver ciertas tareas matemáticas” (p. 40). Entre ellas se resaltan dificultades en la utilización del lenguaje matemático y verbal en situaciones aditivas, en la utilización de la recta numérica, en la interpretación de la sustracción y para darle sentido a un resultado negativo, donde los estudiantes tienden a pensar que siempre el minuendo debe ser mayor que el sustraendo y aseguran que la respuesta a una operación no puede ser negativa.

De este modo, como afirma Chamorro (2003) (citado en Nieto & Pflucker, 2020), el profesor debe conocer los diversos modelos existentes para resolver problemas, comprender su significado, entender que resolver un problema va más allá de realizar una operación y obtener el resultado; implica observar relaciones entre las matemáticas y la realidad para vincular los nuevos aprendizajes con los saberes previos del alumno y, además, tener en cuenta aspectos cruciales cuando se estudia un problema, tales como la estructura matemática o relacional de la resolución y las características de la formulación del enunciado.

Ahora bien, con respecto a los modelos de resolución de problemas, podemos mencionar primeramente la metodología heurística propuesta por Pólya (1945), la cual consiste en cuatro pasos:

comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida. Sin embargo, Schoenfeld (1985) considera que al ser la resolución de problemas una estrategia didáctica, hay que tener en cuenta algunos factores tales como: recursos, heurísticas particulares, control y sistema de creencias, y propone cuatro fases basadas en la propuesta de Pólya, las cuales son: análisis, exploración, ejecución y comprobación de la solución obtenida.

Seguidamente, Nieto y Pflucker (2020) afirman que el dominio de la resolución de problemas no solo beneficia a los docentes, sino también es importante para los estudiantes, debido a que les permite desarrollar una relación entre la matemática y su vida, ya que los problemas están ligados con la realidad que los rodea y los ayudan a comprenderla mejor. Adicionalmente, Carrillo Yañez *et al.* (2022) afirman que la resolución de problemas, como metodología en la enseñanza de las matemáticas, es un referente para pensar en el conocimiento que necesita el profesor de matemáticas.

En este sentido, es importante resaltar que el modelo MTSK permite "profundizar en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en su acción docente, siendo una herramienta que suministra ideas y sugerencias para en un futuro elaborar propuestas formativas" (Rojas, 2014, p. 64). Adicionalmente, el modelo "permite analizar el conocimiento que el profesor pone en juego en cualquier tarea relacionada con la docencia, como la preparación de clases, la discusión con otros docentes, la enseñanza en aula o la reflexión posterior" (Advíncula *et al.*, 2021, p. 192).

En resumen, Scheiner *et al.* (2019) afirman que investigaciones recientes han abordado el conocimiento del profesor desde distintas facetas o tipos de conocimiento, tales como el conocimiento que posee un profesor para la enseñanza o el conocimiento que utiliza en la enseñanza, es decir, en el aula de clases. La presente investigación se enfoca en el conocimiento que utiliza el profesor para la enseñanza, en este caso, el conocimiento que utiliza en el diseño de una planeación de clases.

Por otra parte, es importante el objeto matemático a estudiar debido a que, según el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), en los cursos intermedios (6° a 8°) los alumnos deben profundizar en la comprensión de números enteros y adquirir destreza en su uso para resolver problemas; los números enteros pueden considerarse útiles para anotar cambios o valores relativos, así como para trabajar con ecuaciones cuya solución los requiera, tales como $2x + 7 = 1$. Asimismo, la Secretaría de Educación Pública de México (SEP, 2017) considera que en grado séptimo los estudiantes deben resolver problemas de suma y resta con números enteros.

Actualmente, en el modelo MTSK se registran investigaciones enfocadas en identificar relaciones entre subdominios de conocimiento cuando el profesor realiza diversas actividades de enseñanza, particularmente, cuando realiza el diseño de la planeación de clase (por ejemplo, Pacheco-Muñoz *et al*., 2023; Paternina-Borja *et al*., 2021), pues en este proceso el profesor pone en juego diversos conocimientos en su intención de enseñar. Por esto, es importante analizar relaciones entre dominios y subdominios de este modelo, debido a que estas:

> [...] *nos permiten refinar la observación de aspectos concretos del conocimiento y generar distintas perspectivas o formas de conocer un determinado contenido matemático para usarlo como objeto de enseñanza y aprendizaje, que es precisamente el conocimiento que el profesor debe tener sobre estos objetos.* (Escudero-Ávila *et al.*, 2017, p. 90)

Así, teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado, el objetivo de esta investigación es identificar relaciones entre subdominios del conocimiento especializado que evidencia una profesora de matemáticas de educación básica en el diseño de un plan de clases sobre la resolución de problemas aditivos con números enteros.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (MTSK)

En primer lugar, gracias a las aportaciones de Shulman (1986), han surgido diferentes investigaciones sobre modelos del conocimiento del profesor; dentro de estos podemos mencionar el modelo propuesto por Ball *et al.* (2008) llamado conocimiento matemático para la enseñanza (MKT). Posteriormente, surge el modelo MTSK que "presenta una reconfiguración del conocimiento matemático, una reinterpretación del conocimiento del contenido pedagógico y una nueva forma de conceptualizar la noción de especialización" (Carrillo-Yañez *et al.*, 2018, p. 240). Este modelo teórico es utilizado para estudiar de forma analítica el conocimiento del profesor de matemáticas (Flores *et al.*, 2014).

Es importante resaltar que se dice que es *conocimiento especializado* debido a que este tipo de conocimiento lo tiene y desarrolla solo el profesor de matemáticas por el hecho de ser profesor, y no se desarrolla en alguna persona que no tenga esta profesión, o dicho de otra manera, es aquel conocimiento que solo le hace sentido al profesor de matemáticas, y que es diferente al conocimiento común que puede desarrollar cualquier otra persona de diferente profesión o aquel que puede poseer desde un niño hasta un adulto (Escudero *et al.*, 2012).

Por otra parte, hay que reconocer que garantizar que un docente posee un determinado conocimiento especializado no es tarea fácil, por lo que, algunas investigaciones del modelo MTSK han empleado la triada evidencia-indicio-oportunidad, para analizar si lo que se postula forma parte del conocimiento del profesor informante y así, no omitir aportes importantes que arrojen los datos (Escudero-Ávila *et al.*, 2015). De este modo, Escudero-Ávila *et al.* (2015) definen:

a) *Evidencias de conocimiento:* Hace referencia a aquellos elementos que nos permiten afirmar que un profesor posee o no un conocimiento determinado.
b) *Indicios de conocimiento:* Son las sospechas de la existencia o inexistencia de un conocimiento determinado, en estos se acepta que se requiere de más información para que puedan convertirse en evidencias de conocimiento.
c) *Oportunidades de investigación:* Estas son de naturaleza diferente a las evidencias e indicios, las oportunidades son momentos o situaciones presentadas por el profesor o la dinámica de la

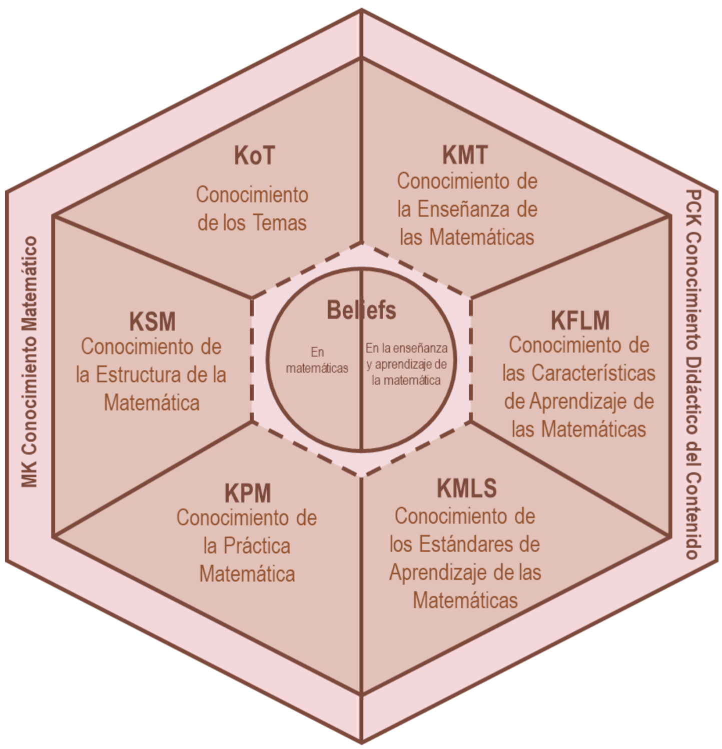
clase, y sirven para explorar el conocimiento de algún subdominio, aunque este no tenga relación con el subdominio con el cual se identifica la declaración suscitada.

Dominios y subdominios

El modelo MTSK está conformado por tres dominios los cuales son: el Conocimiento Matemático (MK), el Conocimiento Didáctico (PCK) y las creencias y concepciones que tiene el profesor acerca de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje. Cabe resaltar, que en esta investigación no se estudiará el tercer dominio, solo se hará énfasis en los dos primeros (Figura 1).

Figura 1

Esquema del modelo MTSK (Muñoz-Catalán et al., 2015)



El dominio MK abarca el conocimiento matemático que utiliza el profesor o puede utilizar para realizar cualquier actividad; el cual debe trascender al contenido matemático que se espera que el estudiante aprenda en un nivel determinado, no solo en cantidad de conocimiento sino también en su esencia (Advíncula *et al.*, 2021). En el MK se consideran los siguientes subdominios y categorías:

Tabla 1

Subdominios y categorías del MK (Delgado-Rebolledo & Espinoza-Vásquez, 2021)

Dominio	Subdominios	Categorías de conocimiento
Conocimiento Matemático (MK)	Conocimiento de los temas (KoT)	Procedimientos Definiciones, propiedades y sus fundamentos Registros de representación Fenomenología y aplicaciones
	Conocimiento de la estructura matemática (KSM)	Conexiones de complejización Conexiones de simplificación Conexiones transversales Conexiones auxiliares
	Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	La práctica de demostrar La práctica de definir La práctica de resolver problemas El papel del lenguaje matemático

Por otra parte, el dominio PCK se refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca del contenido matemático y que utiliza como objeto de enseñanza y aprendizaje (Aguilar-González *et al.*, 2018). En este dominio no se incluyen conocimientos pedagógicos generales aplicados a contextos de actividades matemáticas, sino únicamente a aquellos donde el contenido matemático condiciona la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Carrillo-Yañez *et al.*, 2018; Flores-Medrano *et al.*, 2014). En este dominio se consideran los siguientes tres subdominios y categorías:

Tabla 2

Subdominios y categorías del PCK (Delgado-Rebolledo & Espinoza-Vásquez, 2021)

Dominio	Subdominios	Categorías de conocimiento
Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)	Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Teorías de aprendizaje de las matemáticas Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas Formas de interacción con un contenido matemático Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Teorías de enseñanza de las matemáticas Recursos de enseñanza Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	Expectativas de aprendizaje Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado Secuenciación de temas

Relaciones entre subdominios del modelo MTSK

Es importante resaltar que varias investigaciones se han centrado en el estudio del conocimiento del profesor en diferentes niveles educativos, estableciendo relaciones entre los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (por ejemplo, Delgado-

Rebolledo & Espinoza-Vásquez, 2021; Delgado-Rebolledo & Zakaryan , 2020; Pacheco-Muñoz *et al.*, 2021; Padilla-Escorcia & Acevedo-Rincón, 2021; Paternina-Borja *et al.*, 2021; Zakaryan & Ribeiro, 2016; Zakaryan *et al.* 2018).

En primer lugar, se identificaron relaciones entre subdominios de un mismo dominio, por ejemplo, en el MK, Escudero (2015) afirma que el KSM guarda relación con el KoT, ya que este hace referencia al tipo de conexiones que pueden observarse en las relaciones interconceptuales existentes entre contenidos matemáticos. Por otra parte, en el PCK, se han evidenciado relaciones entre el KFLM y el KMT, donde al proponer una tarea para abordar cierto concepto matemático, ha estado involucrado su conocimiento de las dificultades de aprendizaje del concepto (Zakaryan *et al.*, 2018).

Asimismo, se han evidenciado relaciones entre subdominios de diferentes dominios, como es la relación del KFLM y el KoT, donde el conocimiento que tiene el profesor sobre dificultades en el aprendizaje del concepto de función está relacionado con el conocimiento de los registros de representación de este (Escudero, 2015). Igualmente, el conocimiento de características matemáticas de herramientas y estrategias de enseñanza que tiene el profesor (KMT), así como el uso que hace de esos conocimientos puede relacionarse con lo que sabe acerca de las formas de proceder en matemáticas (KPM) (Escudero-Ávila *et al.*, 2017).

Por otro lado, existen relaciones entre conocimientos internos de un mismo subdominio, como es caso del KoT, donde se ha logrado evidenciar diversas relaciones respecto al conocimiento que evidencia el profesor sobre la definición de función y cómo esta permite determinar procedimientos para la validación y construcción de relaciones funcionales (Espinoza, 2020).

En definitiva, estas relaciones van en concordancia con las establecidas por Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021),quienes afirman que debido a la estructuración del MTSK y al carácter integrado del conocimiento, se pueden encontrar investigaciones que evidencian relaciones entre los conocimientos de un mismo subdominio (intra-subdominio), relaciones al interior de un dominio, donde se relacionan dos o más subdominios (intra-dominio) o pueden encontrarse relaciones entre diferentes dominios (inter-dominio).

Es importante agregar que para afirmar que dos (o más) subdominios de conocimiento están relacionados en un episodio, se identifican indicios o evidencias que ayuden a interpretar qué conocimiento ha manifestado el profesor y, con dicha identificación, se establece la relación (Aguilar-González *et al.*, 2018; Flores-Medrano, 2015).

Por otra parte, Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020) afirman que se considera evidencia de relaciones cuando se identifica un subdominio, que sustenta o condiciona la aparición de uno o más subdominio. Este tipo de relaciones las llamarían Pacheco-Muñoz *et al.* (2023) relaciones direccionales, agregando que la categoría del subdominio que toma el punto de partida tendría el rol de condicionador y la categoría del subdominio que toman el punto de llegada tendría el rol de movilizado, además este rol, lo podría tomar una o más categorías en un argumento específico.

METODOLOGÍA

Esta investigación es cualitativa con enfoque interpretativo y se ha realizado mediante un estudio de caso instrumental. Es importante realizar este tipo de investigaciones debido a que proporcionan profundidad a los datos, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas, también nos ayuda a tener un punto de vista fresco, natural y holístico de los fenómenos, así como flexibilidad (Hernández-Sampieri *et al.*, 2014).

También se optó por un estudio de caso instrumental debido a que estos son pertinentes para indagar en los fenómenos que preocupan en Educación Matemática; además, permiten lograr una mejor comprensión respecto a un tema determinado (Muñoz-Catalán, 2021). El caso analizado fue una profesora de matemáticas (en adelante Leticia) de educación básica secundaria y preparatoria (estudiantes de 12-19 años edad) de una institución educativa privada de México, quien cuenta con cinco años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas, ha recibido una licenciatura en Matemáticas Aplicadas y una maestría en Educación Matemática; el fenómeno a estudiar fue el conocimiento especializado que evidenció la mencionada profesora.

En este estudio, teniendo en cuenta las características de un profesor experto propuestas por Rojas *et al.* (2012), se eligió una profesora que tuviera comprensión del contenido específico a planear, que usara distintas estrategias para resolver problemas, que fuese docente en ejercicio, que contara con cinco o más años de experiencia docente en el aula, etc.

Recolección y análisis de los datos

Para la recolección de los datos, en un primer momento, se le solicitó a la profesora realizar un plan de clases sobre la resolución de problemas aditivos con números enteros. La profesora, dividió su planeación de clase en dos secciones, en la primera describe los temas, aprendizajes esperados, conocimientos previos, competencias, indicadores de desempeño, metodología de aprendizaje y el perfil de sus estudiantes. En la segunda, la profesora describe una serie de actividades, teniendo en cuenta unas fases y momentos: primero, se encuentra la fase de inicio que incluye el momento de exploración, donde la profesora plantea una actividad introductoria, luego la fase de desarrollo que incluye los momentos de estructuración, donde la profesora define y ejemplifica conceptos relacionados con la temática; en el momento de práctica-ejecución la profesora plantea una secuencia de actividades que van aumentando su grado de dificultad, y, por último, la fase de cierre, que incluye los momentos de transferencia, la profesora plantea realizar actividades en grupo para compartir ideas de los problemas propuestos. Finalmente, en el momento de valoración, la profesora plantea realizar una evaluación sobre la temática estudiada. Cabe resaltar que la profesora planificó cinco sesiones de 50 minutos.

Por otra parte, se realizó una guía de preguntas abiertas basada en las categorías de cada subdominio del modelo para profundizar en los indicios y evidencias de conocimiento que mostró la profesora en el diseño de planeación de clase, luego, se aplicaron algunas preguntas de esta guía por medio de una entrevista semiestructurada, la entrevista se realizó en tres sesiones de 30 minutos cada una.

Además, durante el diseño de las preguntas planteadas en la entrevista, surgieron también descriptores basados en las categorías de Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021), teniendo en cuenta la temática de problemas aditivos con números enteros, que nos sirvieron para el análisis de la entrevista. Luego, se transcribió la grabación de la entrevista realizada a la profesora para su análisis, además, se consideró la diferencia entre indicio y evidencia de conocimiento, y de este modo poder establecer relaciones entre subdominios del conocimiento especializado que movilizó la profesora.

Del mismo modo se clasificaron las relaciones encontradas teniendo en cuenta la clasificación propuesta por Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021) y Pacheco-Muñoz *et al.* (2023). Este análisis se llevó a cabo por medio de la técnica de análisis de contenido, la cual es una técnica de interpretación de textos que se basa en la descomposición y clasificación de estos; los textos de interés pueden ser: transcripciones de entrevistas, protocolos de observación, notas de campo, artículos de diarios y revistas, etcétera (Marradi *et al.*, 2007).

En el análisis de los datos, para identificar las relaciones se tuvieron en cuenta las definiciones de esta (Aguilar-González *et al.*, 2018; Delgado-Rebolledo & Zakaryan, 2020; Flores-Medrano, 2015). Adicionalmente, se analizaron las categorías evidenciadas en un mismo momento de la planeación de clase para afirmar si existía direccionalidad (Pacheco-Muñoz *et al.*, 2023).

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este apartado, se presentan algunas relaciones encontradas al estudiar el conocimiento evidenciado por la profesora Leticia en el diseño de su planeación de clases para enseñar la suma y resta con números enteros a través de la resolución de problemas, y la entrevista semiestructurada realizada a partir de los indicios de conocimiento y oportunidades de investigación que emergieron de la planeación. En la primera sección, la profesora en el diseño de su planeación de clases estableció los conocimientos previos necesarios para abordar esta temática (Figura 2).

Figura 2

Conocimientos previos necesarios (Diseño de la planeación realizada por la profesora)

Conocimientos previos necesarios:	Tipos de números, positivos, negativos, etc. Manejo y representación de números en la recta

Estos conocimientos previos se tomaron como indicio para profundizar en el conocimiento de la profesora. De este modo, se le pregunta a la profesora:

> **Investigador:** *¿Cómo le aportarían estos conocimientos previos al objeto matemático que se va a trabajar, que en este caso es la resolución de problemas aditivos con números enteros?*
> **Leticia:** *Conocer los números es algo fundamental, "los estudiantes en lo que es primaria van formalizando el manejo de números y llega el momento en donde empiezan a distinguir que tenemos números positivos, negativos y que se pueden hacer las operaciones básicas entre estos tipos de números y su combinación", más allá de lo que ellos conocían, de cinco más dos, por ejemplo, sino que ya empezamos a hacer la combinación con negativos. "Como esto resulta difícil, es claro que ellos necesitan cómo visualizar este movimiento y uno de los auxiliares [...] para la enseñanza de este tema, pues es justamente la recta numérica, dado pues el sentido de la operación". Entonces, por ejemplo, ven solo suma de números o restas de números, que en primaria los ven, digamos marcados muy independientes. Es decir, en su momento no combinan -5+9 o 5-9 pero ya cuando ingresamos a secundaria los podemos conjuntar para la enseñanza.* (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022)

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que Leticia tiene sobre los temas que debieron haber aprendido sus estudiantes desde la primaria hasta llegar a grado séptimo (números positivos, negativos, operaciones básicas y su combinación). Además, se evidencia la conexión que realiza la profesora del tema con la recta numérica, la cual le permitirá visualizar mejor las operaciones a realizar. Por otra parte, la profesora conoce dificultades que presentan los estudiantes al ingresar a secundaria (combinación de operaciones básicas con números positivos y negativos). De esta manera se evidencia la relación entre el conocimiento sobre la secuenciación de diversos contenidos matemáticos, del mismo curso y de cursos anteriores (Secuenciación de temas, KMLS) y la conexión con la recta numérica para el desarrollo del tema (Conexiones auxiliares, KSM), además la profesora tiene en cuenta las dificultades que presentan los estudiantes cuando combinan operaciones básicas con negativos (Dificultades en el aprendizaje, KFLM).

Tabla 3

Descriptores y categorías evidenciadas del KMLS, KSM y KFLM

Subdominios	Categorías	Descriptores
KMLS	Secuenciación de temas	Conoce los temas matemáticos previos que el estudiante debe haber desarrollado en sexto grado tales como tipos de números y manejo y representación de la recta numérica para abordar la resolución de problemas aditivos con números enteros.
KSM	Conexiones auxiliares	Conoce elementos matemáticos de temas anteriores tales como la recta numérica que sirven como auxiliares en el desarrollo de problemas aditivos con números enteros.
KFLM	Dificultades en el aprendizaje	Conoce la dificultad de combinar operaciones básicas con negativos en la resolución de problemas aditivos con enteros.

Luego, la profesora en el diseño de su planeación de clases plantea la metodología de aprendizaje a utilizar, mencionando el aprendizaje basado en problemas (Figura 3).

Figura 3

Metodología de aprendizaje (Diseño de la planeación realizada por la profesora)

Metodología de aprendizaje	Aprendizaje basado en problemas Comunidad virtual de aprendizaje Gamificación Modelo Heurístico e inductivo

Esta metodología se tomó como un indicio de conocimiento y una oportunidad para profundizar en el conocimiento de la profesora. De este modo, en la entrevista se le preguntó a la profesora:

> **Investigador:** *el aprendizaje basado en problemas, ¿De qué manera le aporta también al desarrollo de su clase?*
> **Leticia:** *Considero que justamente "esta metodología nos ayuda porque es netamente problemas, problemas de contexto, cotidianos al alumno, cercano", que él tenga que buscar y deba tener la intención de resolver, para su bien común por decirlo. Y pues algo importante de esta metodología considero es la aplicación que ellos ven, porque muchas veces es como de, bueno son operaciones, son cuentas, "pero ellos quieren ver como la parte práctica". Entonces, "cuando se les da un reto de un problema de su entorno, un problema en este caso por decir real, pues ellos se ven más involucrados, se ven más dinámicos", se ven más en esa intención de [...] aprendizaje. "En el caso del libro de texto nos enfrentamos a problemas, pero muchas veces los problemas están desfasados, que los estudiantes dicen: bueno, es ilógico que suceda esto".* (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022)

De la planeación de clase y de este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que Leticia tiene sobre el aprendizaje basado en problemas como estrategia de enseñanza. Además, conoce que esta metodología le ayuda a despertar el interés en sus estudiantes porque pueden ver la parte práctica, y de este modo, se ven más involucrados y dinámicos; por otra parte, conoce las limitaciones que presentan los libros de texto respecto a los problemas que contienen. Dicho de este modo, se evidencia una relación entre el aprendizaje basado en problemas como una estrategia de enseñanza *(Estrategias, KMT)*, su potencialidad para despertar el interés y motivación en los estudiantes *(Aspectos emocionales del aprendizaje, KFLM)* y las limitaciones que presentan recursos físicos tales como el libro de texto donde se pueden tomar estos problemas *(Recursos físicos, KMT)*.

Tabla 4

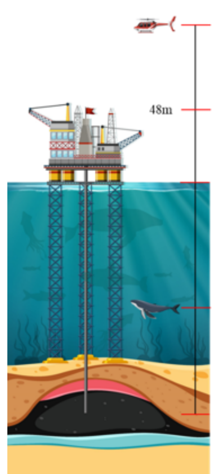
Descriptores y categorías evidenciadas del KMT y KFLM

Subdominios	Categorías	Descriptores
KMT	Estrategias	Conoce y utiliza el aprendizaje basado en problemas como una estrategia de enseñanza para la resolución de problemas aditivos con números enteros.
	Recursos físicos	Conoce el libro de texto como recurso de enseñanza y las limitaciones que presentan sobre los tipos de problemas relacionados con la adición de números enteros.
KFLM	Aspectos emocionales del aprendizaje	Conoce la potencialidad del aprendizaje basado en problemas para despertar el interés y motivación de los estudiantes en la resolución de problemas aditivos con números enteros.

Continuando con el análisis, en la segunda etapa de acciones dentro del aula, la profesora Leticia, en el momento de exploración de la fase de inicio, propone una actividad introductoria para identificar los conocimientos que tienen sus estudiantes antes de abordar la temática y posibles dificultades (Figura 4). La actividad fue tomada por la profesora de Bosch *et al.* (2018, p. 42).

Figura 4

Momento de exploración en la fase de inicio (Diseño de la planeación realizada por la profesora)

Fase	Momento	Actividades	Recursos y materiales	Tiempo
Inicio	Exploración	Se toma de referencia la actividad introductoria propuesta en libro de texto y se discute de manera grupal, lo que permite al docente conocer cómo cada estudiante comprende y aborda el problema, y las dificultades que puedan presentarse. El problema es el siguiente:  Lee la situación y haz lo que se pide. Una compañía petrolera instaló una plataforma para la extracción de crudo a 48 m sobre el nivel del mar, y el yacimiento se ubica a 150 m bajo el nivel del mar. a) Señala en la figura1.7 las distancias antes mencionadas. b) En la imagen se observa un helicóptero y una ballena. ¿Cuál de ellos se encuentra a una distancia de +100 m del nivel del mar? __________ c) ¿Cuál se encuentra a –80 m? __________ d) Dibuja en la imagen un buzo que esté aproximadamente a -20 m del nivel del mar. e) Dibuja en la imagen un submarino que esté aproximadamente a –100 m del nivel del mar. f) Dibuja en la imagen un ave que esté aproximadamente a +75 m del nivel del mar. g) De la distancia entre el helicóptero y la plataforma y la distancia entre el submarino y la plataforma, ¿cuál de las dos es mayor? h) ¿Qué distancia es mayor, la distancia entre el ave y la plataforma o la distancia entre la plataforma y la ballena?__________ En grupo comparen y validen sus resultados.	Libro de texto Libreta	20 minutos

Nota. Las imágenes de la actividad fueron diseñadas por brgfx en Freepik.es

De esta manera, se le pregunta a la profesora:

> **Investigador:** *¿Cómo cree usted que ellos [los estudiantes] abordarían esta actividad?*

> **Leticia:** *Hay algunos puntos donde considero que genera este ejercicio o estos incisos ciertas dudas. Por ejemplo, a la hora que pide dibujar, (ellos podrían preguntarse) ¿sobre qué? O "¿a partir de dónde inicio mi dibujo?", es mejor de momento decir, obvio para algunos, que es sobre mano que inicia y sube. Pero muchas veces eso causa conflicto. "Pensar que ya hacia abajo hay que darle un sentido negativo", por decir, o hacia la parte superior. También problemas de este estilo que se ven marcados. "Es pues justamente la comprensión del problema, o sea, ¿qué me pide como tal realizar?", ¿una aproximación?, ¿determinar una escala? por decirlo".* (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022)

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene la profesora sobre las posibles dificultades que pueden presentar sus estudiantes al abordar el problema planteado en la fase introductoria de la clase (a partir de donde iniciar el dibujo, darles sentido a los negativos, la comprensión de problema). Del mismo modo, la profesora evidencia que al enfrentar un problema del estilo que se ha señalado, se hace necesario la comprensión del problema, y se presenta una oportunidad de investigación para ahondar en el conocimiento de la práctica de resolver problemas. Así que se le pregunta a la profesora:

> **Investigador:** *¿Cree usted que existe algún método o procedimiento específico para solucionar o resolver problemas matemáticos? ¿Conoce usted algún método?*
> **Leticia:** *Pues yo tomaría de referencia tal cual lo que sugiere Pólya, que son los cuatro pasos, O sea, en todo momento, en cualquier problema matemático o no matemático, pues tenemos que primero "comprender el problema", ya sea la operación, incluso la operación tal cual, denotada como de menos cinco, más menos ocho, o sea ¿Qué me estás pidiendo? Debo de comprender qué debo hacer, entonces, ya que lo comprendiste, pues entonces nos vamos al paso dos, "diseña tu plan", o sea, qué vas a hacer, entonces, ya que pensaste, no pues tengo que hacer una ley de signos, o tengo que hacer mi recta, o tengo que hacer algo, entonces pues ya vamos al paso tres, pues "aplícalo, ejecútalo y el último, cuatro, verifica", hasta haz un análisis, regresa a hacer una introspección y decir si es coherente, si tiene sentido, ¿estoy bien?, no, pues redirecciona y otra vez. "Entonces yo creo que en general para este contenido como para cualquier otro, nos focalizamos ahí, comprender el problema que dentro de mi experiencia docente es uno de los puntos importantes que hay que reforzar en los estudiantes".* (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022)

En este fragmento de entrevista, la profesora evidencia conocimiento de los cuatro pasos planteados por Pólya para resolver problemas, y confirma nuevamente la dificultad que presentan los estudiantes al comprender los problemas matemáticos. En consecuencia, se evidencia la relación entre el conocimiento de estrategias heurísticas de resolución de problemas (La práctica de resolver problemas, KPM) y el conocimiento de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes (Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, KFLM).

Tabla 5

Descriptores y categorías evidenciadas del KFLM y KPM

Subdominios	Categorías	Descriptores
KPM	La práctica de resolver problemas	Conoce el método heurístico de resolución de problemas de Pólya y cómo se puede emplear en la resolución de problemas aditivos con números enteros.
KFLM	Dificultades en el aprendizaje	Conoce dificultades que pueden presentar los estudiantes tales como la comprensión de problemas aditivos con números enteros.

En adición, la profesora en el momento de práctica-Ejecución de la fase de desarrollo propone una secuencia de actividades que consta de cuatro partes: traducción de situaciones de contexto a números con signo, operaciones con uso de la recta numérica, solución de ejercicios de operaciones de suma y resta, y la última parte que hace alusión a la solución de problemas aplicados acerca de elevadores (Figura 5). Los problemas planteados fueron tomados por la profesora de Bosch *et al.* (2018, p. 53).

Figura 5

Momento de Práctica-Ejecución en la fase de desarrollo (Diseño de la planeación realizada por la profesora)

Desarrollo	Practica-Ejecución	4. Solución de problemas aplicados a) El elevador de un edificio se ubicaba en la planta baja cuando lo llaman al –6, de donde subió al 2. Posteriormente subió 4 pisos y luego 3 más, bajó 8 pisos y subió 1. ¿En qué piso se encuentra ahora el elevador? Indica una operación que describa sus movimientos. b) Un elevador sube al piso 10 desde la planta baja, y enseguida baja 13 pisos. ¿En qué piso se encuentra? Indica una operación que describa sus movimientos. Compara tu resultado con el del inciso anterior y explica el porqué de los resultados.	Libro de texto Libreta Recta numérica Herramientas digitales	30 minutos

Este momento se tomó como un indicio de conocimiento para profundizar en la entrevista. Así, se le pregunta a la profesora:

> **Investigador:** *¿Cómo qué procedimientos convencionales o no convencionales identificó usted que usaban sus estudiantes al tratar de resolver estos problemas?*
> **Leticia:** *Por ejemplo, en este problema del elevador. Pues incluso si a ellos les sirve dicen "hago mi dibujito, o trato de imaginarme el problema", porque muchas veces me ha pasado que a la hora de leerlo dicen: si lo veo en otra persona como que no lo siento, pero si "yo me pongo en el rol" de soy yo, a lo mejor como que ya le encuentran más sentido, [por ejemplo] "debo 10 pesos y voy a pagar ocho, ¿ya pagué?, ¿ya terminé mi deuda? o ¿no he completado mi deuda?, ¿cuánto me falta pagar?". Entonces, como que ya se ven más en el rol inmerso de ellos estar ahí y decir: bueno sí tiene sentido, he acabado de pagar, todavía me falta o si me sobró. Entonces, yo creo que ya en la aplicación podemos, a lo mejor*

> *regresar, les digo a los chicos pues si es necesario, o sea, si ya se comprendió la operación, pero no sabemos cómo hacerla, la escribimos y pues nos regresamos a lo inicial, hazme la recta okey, otros no pues yo hago mi elevador, mi dibujo, lo que corresponda el problema y pues empiezo a ver, pues subió, ahora bajó el elevador, ahora voy a volver a subir, entonces en dónde quedé. Y en la tercera estrategia puede ser eso, ponte en el rol del problema, okey si tú estás ahí y pasa esto, ¿entonces a que llegas? ¿Cuál sería tu conclusión*? (Leticia, Extracto de la entrevista, 4 de mayo de 2022)

De este fragmento de entrevista, se puede evidenciar el conocimiento que tiene la profesora acerca de las estrategias que utilizan sus estudiantes para resolver problemas aditivos con enteros (hacer un dibujo, imaginarse el problema o colocarse en el rol del problema). Asimismo, evidencia conocimiento acerca de situaciones del contexto donde se aplica la temática, tales como la deuda y el pago. Dicho de este modo, se evidencia una relación entre el conocimiento que tiene la profesora acerca de situaciones donde se aplica la temática *(Fenomenología y aplicaciones, KoT)* y su conocimiento acerca de las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver estas situaciones *(Formas de interacción del estudiante con el contenido, KFLM).*

Tabla 6

Descriptores y categorías evidenciadas del KoT y KFLM

Subdominios	Categorías	Descriptores
KoT	Aplicaciones	Conoce situaciones cotidianas tales como las deudas donde se puede aplicar la resolución de problemas aditivos con números enteros.
KFLM	Formas de interacción del estudiante con el contenido	Conoce estrategias tales como ponerse en el rol, imaginarse el problema y realizar un dibujo que utilizan los estudiantes, al momento de resolver problemas aditivos con números enteros.

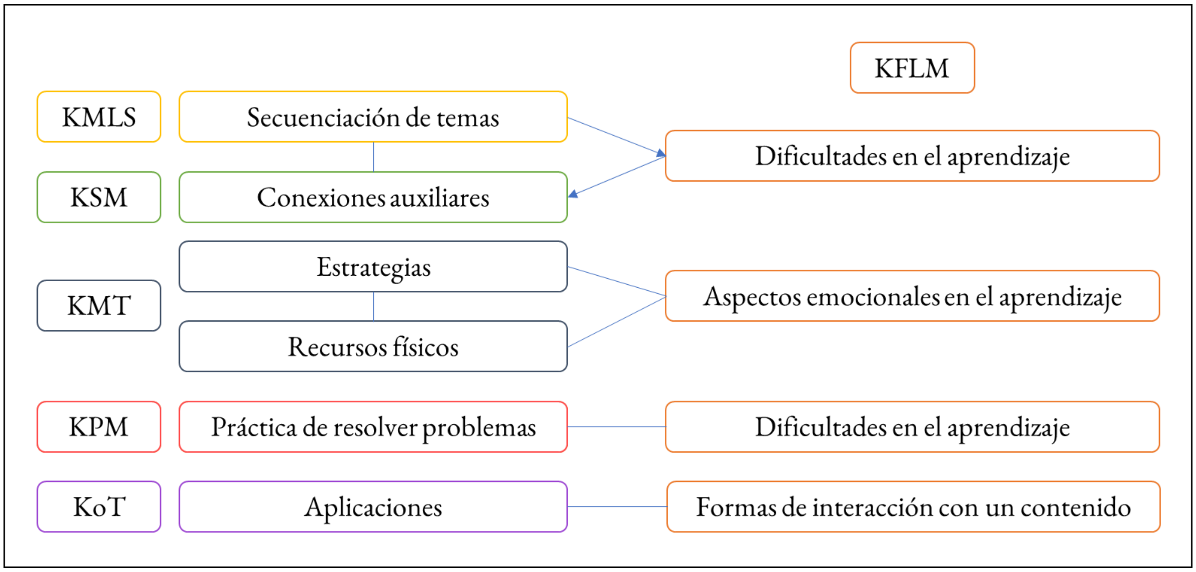
Finalmente, las tablas anteriormente presentadas (Tablas 3, 4, 5, 6) permiten mostrar las diferentes categorías de conocimiento evidenciadas por la profesora, así como también los descriptores que surgieron a partir de las preguntas planteadas y que facilitaron el análisis de las relaciones.

DISCUSIÓN

Los resultados de este trabajo han evidenciado el conocimiento especializado que emplea la profesora en el diseño de un plan de clases sobre la resolución de problemas aditivos con números enteros. Se evidenció el conocimiento de la profesora desde el punto de vista didáctico acerca de dificultades en el aprendizaje; aspectos emocionales en el aprendizaje; formas de interacción con un contenido; recursos de enseñanza; estrategias de enseñanza; y secuenciación de temas. Y desde el punto de vista matemático se evidenció el conocimiento de la profesora acerca de conexiones auxiliares; la práctica de resolver problemas y aplicaciones. En adición, se lograron identificar relaciones que emergieron entre los subdominios del modelo MTSK, como se muestra en la Figura 6, donde las relaciones entre categorías de conocimiento señaladas con una flecha (→) indican direccionalidad, y las relaciones indicadas con un guion (—) hacen alusión a relaciones en las que no se identificó direccionalidad.

Figura 6

Relaciones entre subdominios de conocimiento evidenciadas por la profesora



En primer lugar, en la relación KMLS→KFLM podemos notar direccionalidad en la relación presentada debido que la profesora afirma que precisamente pasar de realizar operaciones básicas con números positivos y negativos, y luego, trabajar su combinación lleva a que los estudiantes presenten estas dificultades, es decir, esta secuencia de temas lleva a que salga a relucir el KFLM de la profesora, evidenciándose una relación intra-dominio, es decir entre categorías de un mismo dominio, en este caso el PCK. Por otra parte, en Otero-Valega *et al.* (2023) se observa una relación direccional desde el KFLM de la profesora a su KMLS al tener en cuenta las dificultades y las formas que los estudiantes interactúan con el contenido para establecer el orden de las competencias matemáticas específicas que el estudiante debe desarrollar para resolución de problemas aditivos con números enteros.

Seguidamente, observamos la relación direccional KFLM→KSM, puesto que la profesora conoce las dificultades que presentan los estudiantes con este objeto matemático, y esto la lleva a utilizar la recta numérica como un auxiliar para poder explicar el movimiento que se hace cuando se trabaja la adición con enteros, de este modo, se evidencia una relación inter-dominio, es decir, se relacionan categorías de subdominios de diferentes dominios, en este caso, un subdominio del PCK permite o condiciona la emergencia de un subdominio del MK.

En adición, se evidencia una relación inter-dominio KMLS—KSM, debido a que la profesora conoce los temas anteriores que deben haber desarrollado los estudiantes para el estudio de problemas aditivos con números enteros y los utiliza como conexiones auxiliares en el desarrollo del contenido, sin embargo, en esta relación no se observa direccionalidad puesto que, ninguna de las categorías toma el rol de condicionador y de condicionado. Respecto a la relación encontrada, entre estos subdominios, Flores-Medrano *et al.* (2014) señalan una posible relación entre la categoría secuenciación de temas con las conexiones de complejización y simplificación del KSM, aquí queda sentado que además la categoría de secuenciación de temas guarda relación con la categoría de conexiones auxiliares.

Luego, se observa la relación intra-subdominio KMT—KMT, debido que en el fragmento de entrevista la profesora evidencia conocimiento del aprendizaje basado en problemas como una estrategia de enseñanza y, además, conoce las limitaciones que presentan los libros de textos referentes a los problemas que proponen. Adicionalmente, se evidencia su conocimiento de aspectos emocionales para despertar el interés y motivación en sus estudiantes, notándose, una relación intra-dominio KMT—KFLM, sin embargo, en esta relación no se evidencia direccionalidad, estas categorías salen a relucir en el mismo fragmento de entrevista, pero ninguna condiciona la emergencia de la otra. Por otra parte, Paternina-Borja *et al.* (2021) evidencia una relación KMT—KFLM, donde el profesor conoce tipos de tareas desafiantes en la enseñanza de las simetrías y conoce cómo incluir situaciones cotidianas para despertar el interés en sus estudiantes, se trata de una relación entre los mismos subdominios encontrados en nuestro estudio, aunque con objetos matemáticos diferentes.

Respecto a la relación KPM—KFLM,en una primera instancia, la profesora evidenció conocimiento acerca de las dificultades que pueden presentar al momento de resolver problemas, luego, la profesora nos da un indicio de su KPM y se toma como una oportunidad para indagar en este, evidenciando su conocimiento acerca de estrategias heurísticas de resolución de problemas que se pueden emplear en problemas aditivos con números enteros, como lo es el caso de la estrategia planteada por Pólya, evidenciando una relación inter-dominio con el KPM. En este sentido, Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020) muestran también relaciones entre el KPM y los subdominios del PCK, por ejemplo, entre el KPM y el KFLM al considerar las dificultades de los estudiantes para desarrollar demostraciones y los diferentes métodos de demostración, así como el conocimiento de los cuantificadores y su significado y las dificultades de los estudiantes para trabajar con ellos. Sin embargo, en este trabajo la categoría del KPM que se evidencia es la práctica de resolver problemas.

Por último, se evidencia la relación inter-dominio KoT—KFLM, debido a que la profesora conoce aplicaciones de la temática y conoce estrategias que utilizan sus estudiantes para resolver problemas, aunque estas categorías guardan relación, no se identificó direccionalidad en dicha relación. Este resultado concuerda con lo planteado por Escudero-Ávila *et al.* (2017).

CONCLUSIONES

En este trabajo, se lograron identificar relaciones según la tipología propuesta por Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021), cuando la profesora diseña la planeación de clase sobre resolución de problemas aditivos con números enteros: se evidencia su KFLM con las categorías de dificultades en el aprendizaje, formas de interacción con un contenido matemático y aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas en relación con los demás subdominios del MK y PCK.

Los resultados del estudio muestran que las relaciones entre los subdominios pueden involucrar cierta direccionalidad o puede que no exista direccionalidad, sino que emerjan distintas categorías de subdominios en un episodio de clase, momento de la planeación o argumento dado por el profesor. Específicamente, la direccionalidad se ha identificado en la relación KMLS→KFLM y la relación KFLM→KSM y las relaciones en las que no se ha identificado direccionalidad, se refieren a: KMLS-KSM, KMT-KMT, KMT-KFLM, KPM-KFLM y KoT-KFLM.

Por otra parte, la entrevista semiestructurada fue un instrumento idóneo para indagar en los subdominios de conocimiento de la profesora, basados en los indicios de conocimiento y oportunidades de investigación plasmados en la planeación de clase. Es decir, por un lado, se pudieron convertir estos indicios en evidencias de conocimiento y, por otro lado, las oportunidades sirvieron para indagar en conocimientos específicos tales como el de la práctica matemática.

Además, queda evidenciado que la planeación de clase es un instrumento de recolección de datos óptimo y propicio para estudiar el conocimiento matemático y didáctico que el profesor pone en juego en su intención de enseñar, y que permite identificar indicios y oportunidades de investigación que se pueden indagar con la entrevista semiestructurada. De igual manera, este trabajo aporta una perspectiva acerca de cómo puede utilizarse el conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de la adición de números enteros a través de la resolución de problemas, teniendo en cuenta las diferentes relaciones que se han presentado.

Por último, con la finalidad de entender mejor los aspectos concretos del conocimiento, es decir, cómo se dan las relaciones en el caso de la resolución de problemas de objetos matemáticos específicos, analizar si existe direccionalidad entre las categorías emergentes o si se podría hablar de una bidireccionalidad entre categorías de conocimiento emergentes, se necesita desarrollar más investigaciones al respecto. Los resultados de estas investigaciones nos permitirán generar distintas perspectivas o formas de conocer los contenidos matemáticos para saber usarlos como objeto de enseñanza-aprendizaje (Escudero-Ávila *et al.*, 2017). Y, de otro modo, también sean un aporte a la formación de profesores de matemáticas, y que los profesores en formación desarrollen estos conocimientos y analicen estas relaciones.

ACLARATORIAS

Las autoras no tienen conflicto de interés a declarar. Esta investigación es parte de la tesis de maestría en Educación Matemática de la autora Keylla Otero-Valega, la cual fue realizada con el financiamiento del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de enero 2022 a diciembre de 2023 No. de CVU 1179802. Las autoras del artículo son miembros de la "Red Iberoamericana MTSK", reconocida por la Asociación Universitaria Iberoamericana de Postgrado (AUIP).

REFERENCIAS

Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I., & Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia, 35*(1), 190-209. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.12

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, C., Carrillo-Yáñez, J., & Rodríguez-Muñiz, J. L. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA, 13*(1), 41-61. https://doi.org/10.30827/pna.v13i1.7944

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Becerra, O. J., Buitrago, M. R., Calderón, S. C., Gómez, R. A., Cañadas, M. C., & Gómez, P. (2012). Adición y sustracción de números enteros. En P. Gómez. (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp. 19-75). Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/1890/

Bosch, C., Meda, A., & Gómez, C. (2018). *Matemáticas 1. Infinita Secundaria.* Ediciones Castillo.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo-Yañez, J., Climent Rodríguez, N., Montes Navarro , M., &Muñoz-Catalán, M. C. (2022). Una trayectoria de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas: del grupo SIDM a la Red Iberoamericana MTSK. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 2*(2), e202204. https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.41

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Pearson Educación.

Delgado-Rebolledo, R., & Espinoza-Vásquez., G. (2021). ¿Cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas? En J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 288-295). Congresseme. https://doi.org/10.2307/j.ctv2zp4vp1.17

Delgado-Rebolledo, R., & Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(3), 567-587.https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Biblioteca Universitaria Huelva. http://hdl.handle.net/10272/11456

Escudero, D.I., Flores, E., & Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Actas del XV EIME*, 35-42. Cinvestav.

Escudero-Ávila, D., Gomes, J., Muñoz-Catalán, M.C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N., & Aguilar, A. (2015). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 60-68). SGSE.

Escudero-Ávila, D., Vasco, D., & Aguilar-González, A. (2017). Relaciones entre los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. (Ed.), *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 83-91). FESPM. http://funes.uniandes.edu.co/19810/

Espinoza, G. (2020). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función*. [Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. Sistema de Biblioteca PUCV. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-0000/UCB0313_01.pdf

Flores, E., Escudero, D., & Aguilar, A. (2014). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). SEIEM.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En Á. Aguilar, E. Carmona, J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, P. Flores, J. L. Huitrado, M. Montes, M. Muñoz-Catalán, N. Rojas, L. Sosa, D. Vasco,

& D. Zakaryan (Eds.), *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas* (1st ed., pp. 71–93). Universidad de Huelva. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España]. Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva. http://hdl.handle.net/10272/11503

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed.). McGraw-Hill Interamericana.

Hobri, H., Susanto, H. A., Hidayati, A., Susanto, S., & Warli, W. (2021). Exploring thinking process of students with mathematics learning disability in solving arithmetic problems. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST), 9*(3), 498-513. https://doi.org/10.46328/ijemst.1684

Maca Díaz, A. J., & Patiño Giraldo, L. E. (2016). La enseñanza de los números enteros un asunto sin resolver en las aulas. *Plumilla Educativa, 17*(1), 194-210. https://doi.org/10.30554/plumillaedu.17.1756.2016

Marradi, A., Archenti, N., & Piovani, J. (2007). *Metodología de las ciencias sociales*. Emecé.

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., & Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18* (3), 589-605. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1294

Muñoz-Catalán, M. C. (2021). Reflexiones para una fundamentación del estudio de caso como diseño metodológico en Educación Matemática. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 65 – 80). SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* NCTM.

Nieto, A., & Pflucker, K. (2020). *Conocimiento Especializado de los profesores de matemática para la enseñanza de problemas de adición y sustracción* [Tesis de pregrado, Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas]. Repositorio Académico UPC. http://hdl.handle.net/10757/653838

Otero-Valega K., Juárez-Ruiz, E., & Zakaryan D. (2023). Conocimiento didáctico del profesor de matemáticas sobre resolución de problemas aditivos con números enteros. En G. Chacón

Guerrero, M. Falk de Losada, O. J. Rojas Velázquez, D. Pérez Duarte, R. Sánchez Lamoneda, M. A. Borges, & D. I. Quintero-Suica (Eds.), *XIII Simposio de Matemática y Educación Matemática, el XII Congreso Internacional de Matemática asistida por Computador y el III Simposio de Competiciones Matemáticas* (pp. 117-120). Simposio MEM 2023. http://investigacion.uan.edu.co/mem-memorias

Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E., & Flores-Medrano, E. (2021). Relaciones entre subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la localización en el plano cartesiano. En J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 121-128). Congresseme.

Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E., & Flores-Medrano, E. (2023). Relaciones direccionales intra-dominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre localización en el plano. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, (24), 57-74. https://doi.org/10.35763/aiem24.4360

Padilla-Escorcia, I. A., & Acevedo-Rincón, J.P. (2021). Conocimiento especializado del profesor que enseña la reflexión de la función trigonométrica seno: Mediaciones con TIC. *Eco Matemático, 12*(1), 93-106. https://doi.org/10.22463/17948231.3072

Paternina-Borja, O., Juárez-Ruiz, E., & Zakaryan, D. (2021). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: caracterización de relaciones en tema de simetrías. En J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 296-303). Congresseme.

Pólya, G. (1945). *How to solve it?* (1ra ed). Trillas. https://doi.org/10.1515/9781400828678

Rojas, N., Carrillo, J., & Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479-485). SEIEM.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de caso* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. DIGIBUG. http://hdl.handle.net/10481/35199

Sánchez, J. (2021). *¿Cómo impacta el conocimiento que tiene un profesor acerca de la teoría apoe sobre su conocimiento especializado?* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Secretaría de Investigación y estudios de Posgrado BUAP.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(1), 153–172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Secretaria de Educación Pública [SEP] (2017). *Aprendizajes clave para la Educación Integral. Matemáticas Educación Secundaria*. SEP.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102%2F0013189X015002004

Socas, M. M., Hernández, J., & Palarea, M. M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para Profesor de Educación Primaria y Secundaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez, & L. Puig. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 145-154). Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/5355/

Zakaryan, D., & Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de los números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké, 24*(3), 301-321. http://dx.doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648095

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., & Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las ciencias, 36*(2), 105-123. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260

Cómo citar este artículo:

Otero-Valega, K., Juárez-Ruiz, E., & Zakaryan, D. (2023). Relaciones entre subdominios de conocimiento de un profesor de matemáticas sobre resolución de problemas aditivos. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, *3*(1), e202318. https://doi.org/10.54541/reviem.v3i1.92