ISSN: 2739-039X
www.reviem.com.ve
Asociación Aprender en Red
Asociación Venezolana de Educación Matemática
Vol. 3, No. 1
DOI: 10.54541/reviem.v3i1.61

Razonamiento geométrico de un estudiante universitario activado al resolver problemas de congruencia contextualizados

Geometric reasoning of a university student activated when solving context-based congruence problems

Raciocínio geométrico de um estudante universitário ativado ao resolver problemas de congruência contextualizados

Aura Lucía Manjarrés-Calderón [1]

Yeffer José Muñoz-Díaz [1]

Camilo Andrés Rodríguez-Nieto [2]

Isabella Valencia-Chávez [1]

Geraldine Bermejo-García [1]

[1] Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia

[2] Universidad de la Costa, Barranquilla, Colombia

Recibido: 22/11/2022 – Aceptado: 11/04/2023 – Publicado: 23/05/2023

Remita cualquier duda sobre esta obra a: Camilo Andrés Rodríguez-Nieto.
Correo electrónico: crodrigu79@cuc.edu.co

Resumen

Se analizó el razonamiento geométrico de un estudiante al resolver problemas sobre congruencia contextualizados. Teóricamente se usó el modelo de Van Hiele y la metodología fue cualitativa desarrollada en cuatro etapas: 1) se seleccionó un estudiante universitario, quien decidió participar en el proyecto ofreciendo voluntariamente sus conocimientos de geometría; 2) se diseñaron las tareas para promover el razonamiento geométrico; 3) se aplicaron entrevistas basadas en tareas; y 4) se analizaron los datos con base en el fundamento teórico. Los resultados evidencian que el estudiante alcanzó todos los niveles de razonamiento geométrico. En el nivel 1 reconoció figuras y objetos (círculo, llantas, platón, canchas). En el nivel 2 analizó las formas de las figuras matemáticamente (cilindro, rectángulo, circunferencia, cuadrado). En el nivel 3 el estudiante relacionó las figuras identificadas y estableció diferencias entre cuadrados, rectángulos dependiendo de sus lados. El

estudiante activó el nivel 4 porque resolvió problemas sobre la capacidad de una volqueta y se ubicó en el nivel 5 dado que realizó demostraciones acerca de la congruencia de las diagonales de una cancha de fútbol. Estas tareas son importantes para que los estudiantes comprendan conceptos geométricos desde sus características hasta su aplicabilidad en contextos extramatemáticos.
***Palabras clave*:** Congruencia; Razonamiento geométrico; Niveles de Van Hiele; Educación Matemática; Estudiantes universitarios.

Abstract

The geometric reasoning of a student when solving contextualized congruence problems was analyzed. Theoretically, the Van Hiele model was used, and the methodology was qualitative, developed in four stages: 1) a university student was selected and decided to participate in the project by volunteering his knowledge of geometry; 2) the tasks were designed to promote geometric reasoning; 3) task-based interviews were applied; and 4) the data was analyzed based on the theoretical foundation. The results show that the student reached all levels of geometric reasoning. At level 1 he recognized figures and objects (circle, tires, plate, fields). At level 2 he analyzed the shapes of figures mathematically (cylinder, rectangle, circumference, square). At level 3, the student related the identified figures and established differences between squares and rectangles depending on their sides. The student activated level 4 because he solved problems about the capacity of a dump truck and was placed at level 5 because he made proofs about the congruence of the diagonals of a soccer field. These tasks are important for students to understand geometric concepts from their characteristics to their applicability in non-mathematical contexts.
***Keywords*:** Congruence; Geometric reasoning; Van Hiele's levels; Mathematics Education; University students.

Resumo

Analisou-se o raciocínio geométrico de um estudante ao resolver problemas de congruência contextualizados. Teoricamente, foi utilizado o modelo de Van Hiele e a metodologia foi qualitativa, desenvolvida em quatro etapas: 1) selecionou-se um estudante universitário, que decidiu participar do projeto oferecendo voluntariamente seus conhecimentos de geometria; 2) elaboraram-se as tarefas para promover o raciocínio geométrico 3) aplicaram-se entrevistas baseadas em tarefas; e 4) analisaram-se os dados com base na fundamentação teórica. Os resultados mostram que o estudante atingiu todos os níveis de raciocínio geométrico. No nível 1 ele reconheceu figuras e objetos (círculo, pneus, placa, campos). No nível 2 analisou matematicamente as formas das figuras (cilindro, retângulo, circunferência, quadrado). No nível 3, o estudante relacionou as figuras identificadas e estabeleceu diferenças entre quadrados e retângulos em função de seus lados. O estudante ativou o nível 4 porque resolveu problemas sobre a capacidade de um caminhão basculante e colocou-se no nível 5 porque fez demonstrações sobre a congruência das diagonais de um campo de futebol. Estas tarefas são importantes para que os estudantes compreendam os conceitos geométricos desde suas características até sua aplicabilidade em contextos não matemáticos.
***Palavras-chave*:** Congruência; Raciocínio geométrico; Níveis de Van Hiele; Educação Matemática; Estudantes universitários.

INTRODUCCIÓN

La geometría es una rama fundamental de las matemáticas que ayuda a comprender e imitar nuestro alrededor, facilitándonos así el estudio de los objetos geométricos. Tomando esto como referencia, se dice que las capacidades espaciales se ven reflejadas ante situaciones de corte lógico-abstracto, considerando características o propiedades de las figuras en el plano (2D) o el espacio (3D) (MEN, 2006; NCTM, 2000; Naufal *et al*., 2021). Uno de los propósitos relevantes de la geometría es ayudar al individuo a desarrollar nuestras estrategias y destrezas, mejorando su conceptualización y manipulación frente a situaciones cotidianas donde se ven reflejadas o representadas las rectas, puntos, planos, cuerpos tridimensionales, etc. (Falconí-Procel, 2021; Vargas & Gamboa, 2013b). También, es un estándar que surge de la observación de las características de la tierra y el mundo que nos rodea, así como para analizar las formas de los objetos y resolver problemas integrados a otras disciplinas (NCTM, 2000; Rodríguez-Nieto, 2021; Rodríguez-Nieto *et al*., 2022b).

Es oportuno mencionar que Camargo y Acosta (2012) sostienen que al estudiar geometría se debe tener en cuenta su multidimensionalidad, donde coexisten dos polos: "el empírico, donde se ubican la percepción, la intuición, la visualización y el carácter instrumental de la geometría; y el teórico, relacionado con los aspectos abstractos, conceptuales, deductivos, formales y rigurosos de la geometría, como disciplina científica" (p. 4). De hecho, "la geometría es un lugar natural para el desarrollo de las habilidades de razonamiento y justificación de los estudiantes, culminando en el trabajo con demostración en los grados secundarios" (NCTM, 2000, p. 41).

A pesar de que la geometría se ha considerado "como el lugar en el currículo escolar de matemáticas donde los estudiantes aprenden a razonar y a ver la estructura axiomática de las matemáticas" (NCTM, 2000, p. 41), algunos autores manifiestan que es el tema más difícil de comprender para los estudiantes en matemáticas, dado que no dominan los principios geométricos, definiciones, teoremas, procedimientos para hallar medidas de área, volúmenes, perímetros, entre otros, y esto debe fortalecerse (Musa *et al*., 2017; Wulandari *et al*., 2021). A continuación, se presenta un estado del arte de manera cronológica teniendo en cuenta algunas investigaciones (publicadas desde 2012 hasta 2023), sobre el uso operativo de los niveles de Van Hiele para analizar el razonamiento geométrico.

Estado del arte

Diversas investigaciones se centran en cómo el profesor puede implementar diferentes métodos con enfoques pedagógicos y didácticos para la elaboración de sus clases, teniendo en cuenta la contribución e implementación de nuevas estrategias para la compresión y conceptualización de los distintos temas geométricos (Rodríguez-Nieto & Escobar-Ramírez, 2022; Rodríguez-Nieto *et al*., 2023). Por ejemplo, Godino *et al*. (2003) manifestaron que los maestros en formación desarrollaron una visión de la enseñanza de las matemáticas que contemple, entre otras cosas, las clases como comunidades matemáticas, el razonamiento matemático más que los procedimientos de simple memorización, la formulación de conjeturas, la invención, la resolución de problemas, la conexión de las ideas matemáticas y sus aplicaciones y la tecnología.

En los estudios enfocados en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, se ha usado el modelo de Van Hiele para describir el proceso de razonamiento y aprendizaje de la geometría. De acuerdo con este modelo, el saber geométrico de los alumnos avanza por una secuencia de niveles, para dominar el grado en que está y de esta forma avanzar al grado inmediato preeminente (Abdussakir, 2009; Passos *et al*., 2019; Vargas & Gamboa, 2013b).

Gutiérrez y Jaime (2012) implementaron el modelo de Van Hiele para reflexionar sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria, enfatizando en distintas metodologías de enseñanza de los profesores para la aplicación de representaciones gráficas, físicas y mentales. Espinoza (2008) aplicó el modelo de Van Hiele con las TIC para el desarrollo de una metodología basada en los niveles de razonamiento geométrico, utilizando como principal herramienta tecnológica el software GeoGebra para mayor visualización de los lugares geométricos. Similarmente, Vargas y Gamboa (2013b) se refirieron a la enseñanza del teorema de Pitágoras utilizando el modelo de Van Hiele y el software GeoGebra, donde implementaron doce actividades a estudiantes con ejercicios de forma tradicional y luego interactiva y dinámica con el software, dando a conocer que esta herramienta logra que los estudiantes tengan un mejor rendimiento académico y motivador.

En Cabello (2013), el modelo de Van Hiele fue aplicado en el aprendizaje constructivo de la geometría en estudiantes de educación secundaria con base en el software Cabri, para identificar imágenes conceptuales de los conocimientos previos y de sus errores manifestados en el desarrollo de unidades didácticas. Zapata (2014) investigó sobre el desarrollo del pensamiento espacial a través del aprendizaje por descubrimiento, con el fin de conducir al estudiante a razonar de manera deductiva y evidenciar los procesos de pensamiento para el desarrollo cognitivo de forma significativa, teniendo en cuenta los cambios de nivel académico de los estudiantes. El trabajo se enfoca en la orientación de los niños para poder potencializar el pensamiento espacial considerando la creación, construcción y entendimiento de los conceptos de su entorno, sabiendo el grado de formación.

Por su parte, Gaitán *et al*. (2015) indagaron sobre la comprensión de conceptos de geometría analítica, específicamente la parábola, en estudiantes de undécimo grado, aplicando el modelo de Van Hiele y teniendo en cuenta relaciones entre otros objetos matemáticos que la constituyen (foco, eje de simetría, vértice, etc.). Por su parte, Llorens Fuster y Prat Villar (2015) definieron a los descriptores del modelo de Van Hiele como las principales características que permiten reconocer cada uno de los niveles de razonamiento matemático a partir de la actividad de los estudiantes, basados en la secuencialidad, distinción, separación, conexiones entre lenguajes cotidianos y matemáticos, etc. Asimismo, Fuentes *et al*. (2015) evidenciaron el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele y su relación con los estilos de aprendizaje, teniendo en cuenta que la metodología utilizada en ese estudio fue de un enfoque cuantitativo, útil para analizar la participación activa del estudiante en la construcción de su conocimiento y el rol del docente como facilitador y promotor de actividades concretas en busca del aprendizaje significativo.

Almendros (2016) presentó el modelo de Van Hiele como una importante estrategia metodológica para la enseñanza de la geometría, con el fin de asumir las distintas dificultades encontradas por un docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta teniendo en cuenta la existencia de los diferentes niveles de razonamiento, enfatizando en que generalmente un alumno que se encuentre en un nivel determinado no será capaz de comprender elementos que pertenezcan a niveles superiores de manera inmediata. Por ello, la enseñanza de la geometría debe partir del nivel en el que se encuentre el alumno para poder ayudarle a progresar al nivel inmediatamente superior.

A través de la participación de estudiantes de edades iniciales, Fuentes (2017) exploró los niveles de razonamiento geométrico con el modelo de Van Hiele y su relación con los estilos de aprendizaje significativo cuando el profesor proponía actividades concretas. Marín (2017) usó la maleta viajera de Euclides como estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, siguiendo la estructura de planificación de estrategias y actividades diseñadas y ejecutadas para los estudiantes.

García y Fuentes (2017) investigaron acerca de los cuadriláteros, teniendo como referencia los niveles 1 y 2 del modelo de Van Hiele enfocados en el fortalecimiento del pensamiento espacial y geométrico de los estudiantes. Estos autores reconocieron experiencias sobre el aprendizaje efectivo, utilizando herramientas visuales como un punto de partida e identificaron los niveles 1 y 2 del modelo de Van Hiele en la aplicación de proyectos de aula para trabajar conceptos previos, la conceptualización y el manejo de un lenguaje matemático para la aplicación de lo aprendido en diferentes contextos socioculturales. Sará y Míguez (2018) evaluaron la efectividad del modelo de Van Hiele en el aprendizaje de los triángulos y cuadriláteros, teniendo en cuenta que la metodología fue explicativa con un diseño cuasi experimental. Además, diseñaron un instrumento basado en los tres primeros niveles de Van Hiele, aplicándolo en grupos de estudiantes del primer año de educación secundaria.

En su estudio, Carhuapoma (2018) determinó la influencia del modelo de Van Hiele en el aprendizaje de los estudiantes de primaria acerca de los cuadriláteros, aplicando un pre-test y un post-test utilizando como instrumento las pruebas pedagógicas. Carrasco (2018) ofreció una herramienta para que los docentes de matemáticas de primer año medio determinen el nivel de razonamiento geométrico con el que sus estudiantes inician la Educación Media, permitiéndoles así diseñar secuencias didácticas más eficaces, debido a que estarán contextualizadas al tipo de razonamiento geométrico predominante dentro de la sala de clases. Ávila (2019) diseñó actividades de clase para propiciar el avance de un nivel de razonamiento a otro acorde con cada elemento conceptual necesario en la comprensión de los estudiantes sobre el teorema de Pitágoras, es decir, los triángulos, el teorema de Pitágoras y solución de problemas geométricos en la vida cotidiana. Estas experiencias de aprendizaje se fundamentaron en políticas educativas nacionales tales como los estándares de competencias matemáticas.

Con base en las herramientas del modelo de Van Hiele, Robles (2020) implementó el Origami para mejorar el aprendizaje de la geometría en niños pequeños y enseñarles a construir figuras geométricas y divertidas, mediadas por el plegado de papel sin usar tijeras. Concluyó que de esta manera los estudiantes pueden visualizar y afianzar sus conocimientos sobre las figuras geométricas planas y tridimensionales en objetos y artefactos que capten su atención. En una dirección similar, Quintero (2020) diseñó un software sobre el viaje por la geometría, basado en el modelo de Van Hiele, para fortalecer el aprendizaje de los poliedros en los estudiantes, tales como el cubo, tetraedro y el octaedro, que fueron visualizados y aplicados para evidenciar sus niveles de razonamiento.

Chavarria-Pallarco (2020) contribuye al desarrollo de la competencia de resolución de problemas de forma, movimiento y localización, propuesta por el Ministerio de Educación (MINEDU) (2017) en el Currículo Nacional de la Educación Básica; apoyándose en el modelo de Van Hiele. Hernández *et al*. (2021) profundizaron en los procesos de desarrollo en la resolución de problemas de los conceptos de polígonos y poliedros, utilizando herramientas tecnológicas para que los estudiantes alcancen la capacidad de entender la naturaleza axiomática de las matemáticas, realizando deducciones lógicas y formales para justificar proposiciones planteadas en el contexto del aprendizaje de la geometría.

Silva y Wall (2022) se preocuparon por implementar los conocimientos de los profesores de matemáticas sobre el modelo de Van Hiele en geometría; sin embargo, no todo el cuerpo docente conoce el uso de este modelo, por tanto, no es aplicado por el profesor. De esta manera, se dio a conocer el modelo para que los docentes lo aplicaran en el aula de clases y explorar el razonamiento geométrico de los estudiantes. Por su parte, Herrera y Forero (2022) contribuyeron al desarrollo de recursos didácticos para mejorar la enseñanza y aprendizaje de la geometría, vinculando entornos de educación en línea y el aspecto descriptivo del modelo de Van Hiele, proponiendo el diseño de una secuencia de tareas mediadas por las TIC para los grados donde se implemente, con la finalidad de caracterizar el nivel de razonamiento geométrico que tienen los estudiantes con relación a la clasificación de cuadriláteros. López y Bolaño (2022) aplican el modelo de Van Hiele en los docentes como estrategia para orientarlos a una mejor enseñanza de la geometría y para que sus alumnos mejoren las cualidades del razonamiento matemático, con la premisa de que ellos deben pasar por una serie de niveles desde la visualización hasta realizar demostraciones.

A pesar de que el modelo de Van Hiele ha sido ampliamente usado, existen actualmente investigaciones que exploran el pensamiento geométrico desde distintos ámbitos, por ejemplo, sobre el teorema de Pitágoras (Mahlaba & Mudaly, 2022), transformación geométrica (Kandaga *et al*., 2022), específicamente las temáticas de simetría y congruencia se sugieren profundizar desde los grados de primaria hasta universidad (Anđelković & Malinović-Jovanović, 2022; Pérez-Díaz, 2023; Wulandari *et al*., 2021). Esta profundización cobra sentido porque tanto estudiantes como algunos futuros profesores presentan dificultades para comprender y relacionar los conceptos de congruencia y semejanza (Cortés & Velásquez, 2022; Hernández *et al*., 2015; Sanabria, 2018). Especialmente, los estudiantes de secundaria tienen inconvenientes para trabajar con las definiciones de triángulos semejantes y congruentes, porque no les dan relevancia y funcionalidad a las características y/o propiedades de estos conceptos (Haj-Yahya, 2022). Berciano *et al*. (2022) analizaron la importancia y pertinencia de una trayectoria hipotética de aprendizaje para promover el razonamiento geométrico en estudiantes desde las primeras edades (4 y 5 años), en la resolución de problemas en torno al concepto de cilindro.

Después de revisar la literatura, hemos evidenciado la importancia de la geometría y de la aplicación del modelo de Van Hiele en diferentes estudios enfocados en la comprensión de cuadriláteros, polígonos, uso de GeoGebra, cilindros, aplicación del teorema de Pitágoras en las aulas de clases, promoción de este modelo en los profesores para que midan el nivel de razonamiento geométrico, entre otros. Pero consideramos que aún faltan investigaciones donde se diseñen y apliquen tareas basadas en un contexto cotidiano, que inicien desde la visualización o reconocimiento hasta la demostración con rigurosidad. Además, se reconoció desde la agenda de investigación (Cortés & Velásquez, 2022; Haj-Yahya, 2022; Hernández *et al*., 2015; Sanabria, 2018) que una de las problemáticas vigentes es que los estudiantes y profesores tienen dificultades para comprender la semejanza y congruencia. Por lo tanto, se plantea en el presente artículo analizar el razonamiento geométrico de un estudiante universitario cuando resuelve tareas contextualizadas, relacionadas con el concepto de congruencia.

MODELO DE VAN HIELE

Vargas y Gamboa (2013a) afirman que el modelo de Van Hiele ayuda en el proceso de aprendizaje y razonamiento geométrico de los estudiantes, y esto transcurre por una serie de niveles. Para dominar el nivel en que se encuentra y lograr pasar al siguiente nivel, el estudiante debe mostrar que maneja por completo el nivel actual. Este modelo contribuye al conocimiento de manera escalonada en cinco niveles de razonamiento, secuenciales y ordenados. Ningún nivel de razonamiento es independiente de otro y no es posible saltar ninguno: el individuo debe pasar y dominar un nivel para pasar al siguiente. Los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele están ordenados y caracterizados de la siguiente manera:

Nivel 1: Reconocimiento o visualización

El individuo reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, no diferencia partes ni componentes de la figura. Puede, sin embargo, producir una copia de cada figura particular o reconocerla. No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras; las descripciones son principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno (Vargas & Gamboa, 2013a).

Nivel 2: Análisis

El individuo puede reconocer y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas, pero no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de figuras. Establece las propiedades de las figuras de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación (Vargas & Gamboa, 2013a).

Nivel 3: Deducción informal

El individuo determina las figuras por sus propiedades y reconoce cómo unas propiedades se derivan de otras, construye interrelaciones en las figuras y entre familias de ellas. Establece las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado. Sin embargo, su razonamiento lógico sigue basado en la manipulación. Sigue demostraciones, pero no es capaz de entenderlas en su globalidad, por lo que no le es posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones. Al no poder realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, el individuo no comprende el sistema axiomático de las matemáticas (Vargas & Gamboa, 2013a).

Nivel 4: Deducción formal

En este nivel ya el individuo realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales, al reconocer su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. Comprende y maneja las relaciones entre propiedades y formaliza en sistemas axiomáticos, por lo que ya entiende la naturaleza axiomática de las matemáticas. Comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas, lo que le permite entender que se puedan realizar distintas demostraciones para obtener un mismo resultado. Es claro que, adquirido este nivel, al tener un alto grado de razonamiento lógico, obtiene una visión globalizadora de las matemáticas (Vargas & Gamboa, 2013a).

Nivel 5: Rigor

El sujeto está capacitado para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos y compararlos entre sí. Puede apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas de los fundamentos de la geometría. Capta la geometría en forma abstracta. Este último nivel, por su alto grado de abstracción, debe ser considerado en una categoría aparte, tal como lo sugieren estudios sobre el tema. Alsina *et al*. (1997) y Gutiérrez y Jaime (1991) afirman que solo se desarrolla en estudiantes de la Universidad, con una buena capacidad y preparación en geometría (Vargas & Gamboa, 2013a). Cabe destacar que, en el modelo de razonamiento de Van Hiele, es posible observar la concordancia que poseen los diferentes niveles entre ellos, además de resaltar el hecho de que un individuo no puede saltarse ningún nivel de razonamiento.

MATERIALES Y MÉTODOS

Esta investigación es cualitativa descriptiva (Cohen *et al*., 2018) llevada a cabo en cuatro etapas. En la primera se diseñó una tarea para promover el razonamiento geométrico basada en una situación de la cotidianidad, la segunda se trató de la selección de un estudiante universitario, en la tercera se aplicaron entrevistas basadas en la tarea diseñada y, por último, en la cuarta etapa se analizaron los datos con base en el fundamento teórico de la investigación (modelo de Van Hiele).

Participantes y contexto

En este estudio participó un estudiante (llamado Daniel = pseudónimo) de tercer semestre de la Licenciatura en Matemáticas en una universidad pública de Barranquilla, Atlántico, Colombia, quien nos suministró la información de manera voluntaria. El estudiante tiene veinte años y se caracteriza porque en las asignaturas cursadas (entre las que se destaca Geometría Euclidiana) ha alcanzado buenas calificaciones y con un promedio general de 4.5 de 5.0 posible. Además, en su tiempo libre se dedica a tejer tapetes con trapillo en nudo macramé, donde crea y usa diversos diseños, modelos y aspectos geométricos que lo llevan a la forma, dimensiones y colores específicos para cada tapete.

Recolección de datos

Los datos fueron recolectados a partir de la aplicación de una entrevista semiestructurada basada en tareas durante tres horas en el mes de mayo del año 2022. Este método es importante porque admite la posibilidad de evaluar el conocimiento conceptual (en este caso geométrico), motivar y considerar las producciones escritas y verbales de los sujetos donde se reflejan sus argumentos al momento de resolver las tareas. Asimismo, por medio de este método, los investigadores entablaron un diálogo con el participante donde se le hacían preguntas para profundizar sobre su razonamiento (Assad, 2015; Goldin, 2000). En este proceso se realizaron preguntas en forma de tareas (Tabla 1):

Tabla 1

Tareas propuestas al estudiante

Tarea	Descripción	Propósito	Indicador
1	¿Qué observas en las imágenes? 	Esta tarea se propuso para saber qué objetos (matemáticos o no, por ejemplo, identificados por su forma) el estudiante reconocía en las imágenes.	Reconoce objetos o formas en las imágenes presentadas.
2	¿Qué objetos matemáticos observas en las imágenes?	El estudiante solo debe enunciar los objetos matemáticos y/o geométricos inmersos en las imágenes.	Identifica objetos matemáticos en las imágenes.
3	¿Qué características tienen los objetos matemáticos que permiten establecer diferencias entre ellos?	De acuerdo con la literatura revisada (antecedentes y niveles del modelo de Van Hiele), es importante que los estudiantes y profesores reconozcan las	Reconoce y explica las características o propiedades de los objetos matemáticos.

		propiedades y características de los objetos matemáticos y luego los usen de manera consistente; por esta razón, se propone esta tarea.	
4	¿Qué definición o significado le atribuyes a los objetos matemáticos identificados?	El estudiante debe comunicar qué significa para él cada uno de los objetos matemáticos y/o geométricos identificados en las imágenes.	Expresa las definiciones o significados de los objetos identificados.
5	Resuelve el problema de aplicación usando las respuestas a las preguntas anteriores. Juan tiene una pequeña flota de tres volquetas, lo contratan para llevar material (gravilla) necesitado para la construcción de una cancha cuyas medidas son 100m x 60m y el material tendrá un grosor de 5cm; además que se necesita suplir 5m en cada lado de la cancha. ¿Cuántos viajes se necesita para suplir lo necesitado sabiendo que la dimensión del platón de las volquetas es de, 6m de largo, 1,9m de ancho y 1,6m de alto?	El estudiante debe resolver el problema con base en los conocimientos previos activados (conceptos, representaciones, definiciones, entre otros).	Resuelve problemas sobre congruencia.
6	Realiza la demostración requerida usando definiciones, teoremas, corolarios, etc. **6.** Sabiendo que una cancha de fútbol es de forma rectangular; demuestre que si trazamos las diagonales de un tiro de esquina a su opuesto y lo mismo con los otros 2 tiros de esquina restantes y opuestos, éstas son congruentes	Con esta tarea se pretende que el estudiante demuestre con base en las definiciones, teoremas, etc. comunicadas en la tarea 4.	Usa demostraciones geométricas relacionadas con el concepto de congruencia en problemas contextualizados.

Además, se usaron dispositivos móviles (cámaras videograbadoras), notas de campo (tablero y marcador) e imágenes de apoyo. En el diálogo, los investigadores se etiquetaron con una letra E y el participante con la letra P.

Figura 1

Evidencia fotográfica del participante suministrando la información

Análisis de datos

Para analizar los datos recolectados en las entrevistas, se usaron algunas fases del método de análisis cualitativo detallado propuesto por Hernández *et al*. (2014), con algunas adaptaciones que hemos realizado. Por lo tanto, en la primera fase se transcribieron las entrevistas y se leyeron para la familiarización con los datos. La segunda fase consistió en la identificación de los niveles de Van Hiele en cada una de las transcripciones por cada tarea, por medio de la caracterización expuesta en el fundamento teórico (ver el siguiente ejemplo).

Ejemplo de análisis de datos

Se presenta un extracto de la transcripción de la entrevista realizada a P:

> **E1**: *Bueno, la segunda pregunta, ¿Qué objetos matemáticos identificas en estas imágenes?*
> **P**: *(...) circunferencias, cuadrados, si miramos en la rueda del camión un cilindro, rectángulos, más circunferencias, cuadrados...*
> **E1**: *Tercera pregunta, ¿Qué características tienen esos objetos matemáticos?*
> **P**: *Pues, todos son figuras geométricas, son planos y figuras de 2 dimensiones.*

Posteriormente, se identifican palabras clave asociadas a las figuras geométricas, reconocidas institucionalmente observadas en la forma y características de la volqueta, por ejemplo, cuando P asocia las llantas con un *cilindro* y el platón de la volqueta con un *rectángulo*.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Aquí presentaremos los cinco niveles del modelo de Van Hiele y cómo estos se ven evidenciados a la hora de realizar preguntas relacionadas con la geometría.

Nivel 1 de reconocimiento o visualización

Se evidencia este nivel porque en las imágenes presentadas (Figura 2) al estudiante, este reconoció que hay una volqueta, camión, canchas, entre otros. De hecho, el estudiante no buscó una relación ni características en los objetos presentados en las imágenes, solo comunicó los nombres o formas de los objetos desde su experiencia o relación con la vida cotidiana.

Figura 2

Imágenes presentadas en la tarea inicial

> **E1**: *Daniel, te voy a presentar unas imágenes y responderás la primera pregunta, ¿Qué observas en las imágenes presentadas anteriormente?*
> **P**: *(…) las imágenes, lo que veo son: un camión, una volqueta, unas canchas, una cancha de tenis, una de fútbol y una de básquetbol.*

Nivel 2 de análisis

En este nivel el estudiante reconoció y analizó las figuras geométricas encontradas dentro de las imágenes (camión, volqueta, canchas deportivas). El estudiante señaló los elementos y propiedades de las figuras mediante la observación; así mismo, su lenguaje se le dificulta un poco ya que no establece relaciones entre una y otras propiedades, lo que observa es lo que ve.

> **E1**: *Bueno, la segunda pregunta, ¿Qué objetos matemáticos identificas en estas imágenes?*
> **P**: *(…) circunferencias, cuadrados, si miramos en la rueda del camión un cilindro, rectángulos, más circunferencias, cuadrados…* (ver Figuras 2 y 3).

Figura 3
Estudiante observando la imagen proyectada en la pantalla del celular

Nivel 3 de deducción Informal

En este nivel el estudiante identificó las propiedades y relaciones en las figuras geométricas vinculadas a las imágenes; aquí es donde se intensifican los conocimientos que él tiene con respecto a todas las distintas características que pueden tener dichas figuras, dándose cuenta de que existe una interrelación entre ellas. El estudiante en este nivel es capaz de seguir demostraciones guiadas por su docente, ya que en este nivel el estudiante aún no es capaz de resolver demostraciones por sí solo.

> **E1**: *Tercera pregunta, ¿Qué características tienen esos objetos matemáticos?*
> **P**: *Pues, todos son figuras geométricas, son planos y figuras de dos dimensiones* (manifestado en la Figura 4).

Figura 4

El estudiante menciona características de los objetos

Nivel 4 de deducción Formal

En este nivel el estudiante fue capaz de hablar con un lenguaje matemático consistente, clasificó y definió los conceptos y usó las distintas propiedades geométricas. También, fue capaz de realizar la demostración teniendo en cuenta que podría abordar el ejercicio por diferentes caminos, sabiendo que llegaría a un mismo resultado. Su razonamiento geométrico es mucho más avanzado que en los otros niveles y, por tanto, es capaz de tener una visión más amplia sobre las matemáticas (ver extracto de la transcripción y Figura 5).

Figura 5

Situación problema propuesta

5. RESUELVE EL SIGUIENTE PROBLEMA.

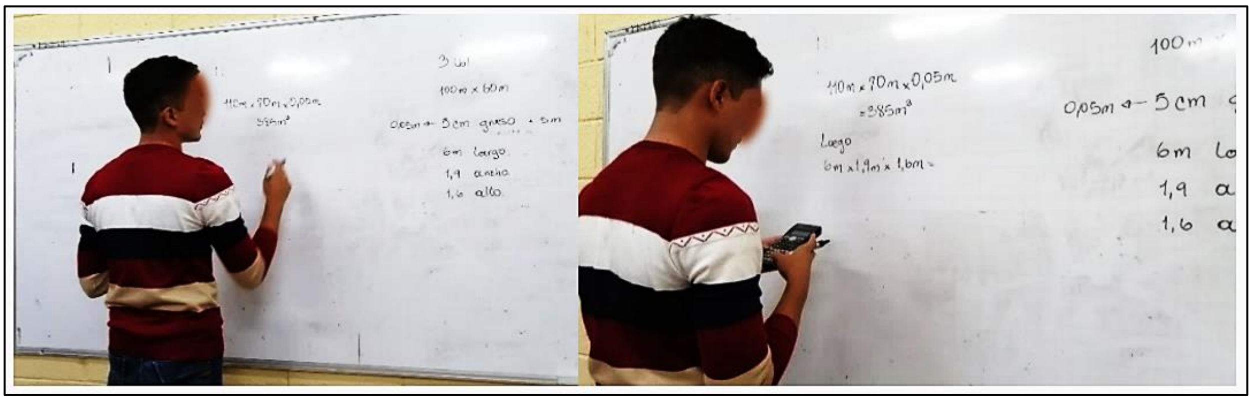
Juan tiene una pequeña flota de tres volquetas, lo contratan para llevar material (gravilla) necesitado para la construcción de una cancha cuyas medidas son 100m x 60m y el material tendrá un grosor de 5cm; además que se necesita suplir 5m en cada lado de la cancha.

¿Cuántos viajes se necesita para suplir lo necesitado sabiendo que la dimensión del platón de las volquetas es de, 6m de largo, 1,9m de ancho y 1,6m de alto?

E1: *Bueno, la cuarta pregunta sería la solución de un problema. El problema dice: Juan tiene una pequeña flota de volquetas (3), y lo contratan para llevar un material necesitado para la construcción de una cancha cuyas medidas son de 100 metros por 60 metros, además el material tendrá un grosor de 5 centímetros, adicional se necesita suplir 5 metros a cada lado de la cancha. La pregunta sería: ¿Cuántos viajes se necesita para suplir lo necesario sabiendo que la dimensión del platón de las volquetas es de 6 metros de largo, 1.9 de ancho y 1.6 metros de alto?*

P: *¿Cómo es la pregunta?*
E1: *¿Cuántos viajes necesita hacer sabiendo la dimensión del platón de las volquetas?*
P: *Como se necesita suplir 5 metros a ambos lados entonces ese resultado nos daría 10 y al sumárselo aquí entonces ya no sería aquí 100m sino 110 y no sería 60 sino 70 y así, entonces lo que hice fue multiplicar las tres medidas que da 385 metros cúbicos, luego lo que hice fue, multiplicar las medidas del platón de la volqueta aquí nos da la capacidad de 3 volquetas, luego ahí tendríamos la capacidad de las 3 volquetas y tendríamos la cantidad de material, si lo dividimos podemos, consta de 7 viajes, y eso es lo que se pide* (Figura 6).

Figura 6
Resolución de un problema de aplicación



Posteriormente, se enfatizó en promover la demostración en el estudiante con base en una tarea que requería del uso de definiciones y propiedades de los objetos geométricos y dar relevancia a la:

> *Estimulación de la capacidad de razonamiento y pensamiento crítico, mejora de la capacidad para manejar objetos geométricos e inferir propiedades de los mismos y acercar las matemáticas al alumnado con dificultades a través de la conexión que brinda la geometría entre pensamiento abstracto, habilidad manual y la comprensión de conceptos a través de la visualización de los mismos*. (López, 2023, p. 87)

Esta visión geométrica favorece a que los estudiantes mejoren su capacidad para la demostración y le encuentren sentido desde situaciones contextualizadas (Haj-Yahya, 2022), por ejemplo, como se presenta con las canchas deportivas.

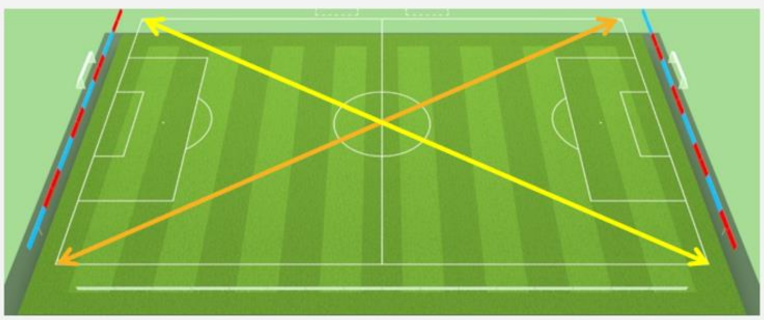
Nivel 5 de rigor

Para alcanzar el último nivel, el estudiante realizó una demostración de uno de los problemas geométricos acerca de una chancha. Se considera que logró llegar hasta el nivel de Rigor, ya que estableció relaciones entre definiciones y teoremas para realizar la demostración. Además, observa la geometría en su totalidad y de forma abstracta, lo que le permite tener una visión más amplia y realizar las demostraciones sin necesitad de ejemplos concretos, por ejemplo, como lo manifestó en la resolución de la tarea 6 (Figura 7).

Figura 7

Tarea propuesta para usar demostraciones

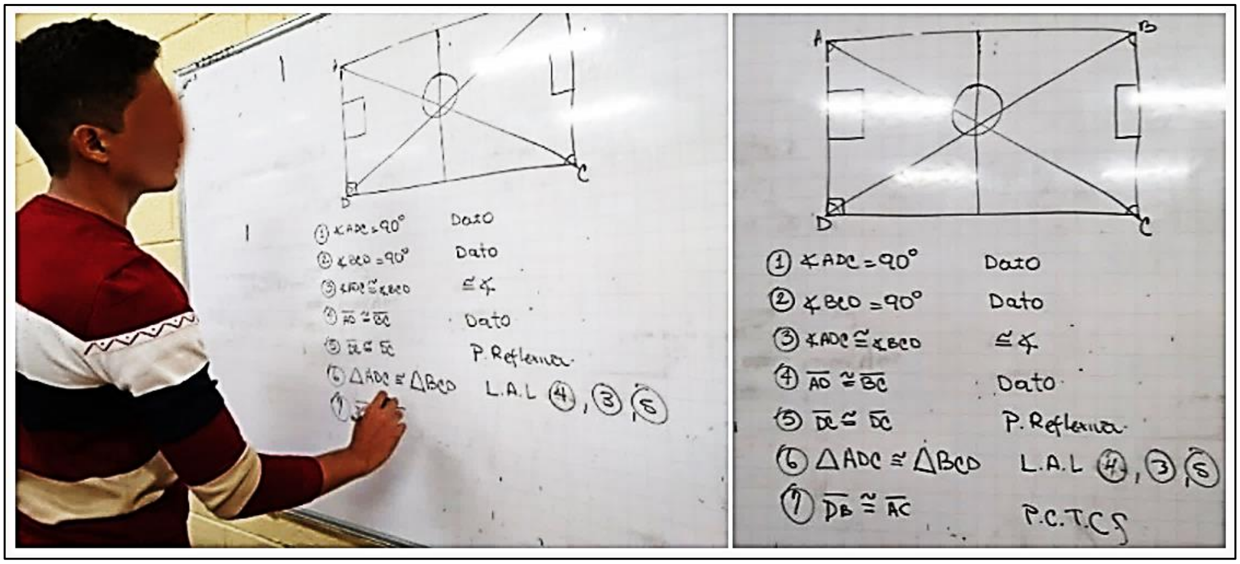
6. Sabiendo que una cancha de fútbol es de forma rectangular; demuestre que si trazamos las diagonales de un tiro de esquina a su opuesto y lo mismo con los otros 2 tiros de esquina restantes y opuestos, éstas son congruentes



E1: *Bueno, la quinta pregunta sería una demostración sabiendo que una cancha de fútbol es rectangular, demuestra que las diagonales trazadas de un tiro de esquina a su opuesto y los otros dos tiros de esquina a su vez son congruentes.*
P: *Los datos son de que el ángulo ⊾ADC es de 90 grados, por dato, el ángulo ⊾BCD es de 90 grados, por dato, entonces si estos dos ángulos son de igual medida, son congruentes, por congruencias de ángulos, ahora el segmento AD es congruente con el segmento BC por dato, y el segmento DC es congruente consigo mismo por la propiedad reflexiva, y el triángulo ΔADC es congruente con el triángulo ΔBCD por postulado ALA, y entonces el segmento DB es congruente con el segmento AC por partes correspondientes a triángulos congruentes son congruentes* (Figura 8).

Figura 8

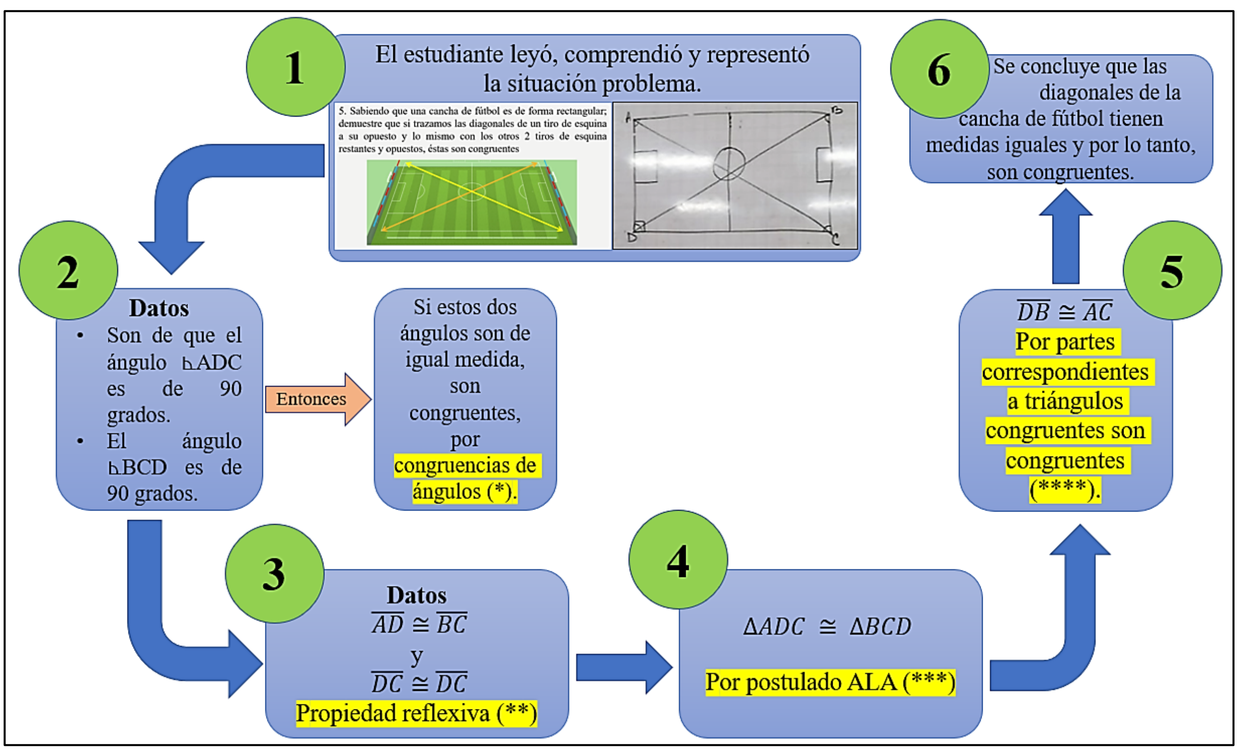
Evidencia de la demostración realizada por el estudiante



A continuación, en la Figura 9 se presenta el proceso seguido por el estudiante para hacer la demostración, detallando el paso a paso realizado en la Figura 8, de tal manera que se explicite la información matemática sobre definiciones, postulados, etc.

Figura 9

Esquematización de la demostración



En la Figura 9, se evidenció una esquematización del proceso de demostración realizado por el estudiante, donde usó definiciones, propiedades, postulados y teoremas. En (*) el estudiante se basa en el teorema 4-3 (Moise & Downs, 1986), el cual dice que dos ángulos rectos cualesquiera son congruentes; (**) la propiedad reflexiva se refiere a la congruencia del segmento consigo mismo, luego en (***) se evidencia el uso de un postulado para la congruencia de triángulos, el postulado ALA referido a Ángulo-Lado-Ángulo, que indica la congruencia de dos ángulos y el segmento que se encuentra entre ellos y, por último, en (****) hace referencia a partes correspondientes de triángulos congruentes significa que en un par de triángulos congruentes, a cada segmento y a cada ángulo de un triángulo, le corresponde uno de igual medida en el otro triángulo (Moise & Downs, 1986).

CONCLUSIONES

En esta investigación se analizó el razonamiento geométrico de un estudiante universitario cuando resuelve problemas donde se relacionan terrenos de canchas de fútbol, la capacidad de las volquetas y el poder persuasivo de la congruencia para la resolución de los problemas y demostraciones. Es válido mencionar que los principales resultados de esta investigación evidencian que el estudiante alcanzó todos los niveles de razonamiento geométrico. Específicamente, en el nivel 1 reconoció figuras y objetos como el círculo, llantas, platón, canchas, rectángulos, etc. En el nivel 2 analizó y reconoció las formas de las figuras en términos matemáticos (cilindro, rectángulo, circunferencia, cuadrado...). En el nivel 3 el estudiante relacionó o conectó las figuras identificadas y estableció diferencias entre cuadrados, rectángulos dependiendo de sus lados. El estudiante activó el nivel 4 porque resolvió problemas sobre la capacidad de una volqueta. Finalmente, el estudiante se ubicó en el nivel 5 dado que realizó demostraciones acerca de la congruencia de las diagonales de una cancha de fútbol.

La literatura previa sobre las exploraciones del razonamiento geométrico con base en el modelo de Van Hiele reportan que los estudiantes y algunos profesores tienen dificultades para trabajar con los conceptos de semejanza y congruencia (Anđelković & Malinović-Jovanović, 2022; Cortés & Velásquez, 2022; Haj-Yahya, 2022; Hernández *et al*., 2015; Pérez-Díaz, 2023; Sanabria, 2018; Wulandari *et al*., 2021), pero en el estudio actual se evidencia que el estudiante universitario reconoce los objetos geométricos, los usa para resolver problemas y hace demostraciones con efectividad, lo cual deja ver conexiones entre definiciones, representaciones, postulados, entre otros, que es una evidencia de un tipo de comprensión de los conceptos puestos en juego en la demostración (Rodríguez-Nieto & Escobar-Ramírez, 2022; Rodríguez-Nieto *et al*., 2022a). Esto quiere decir que todos los procedimientos realizados por el estudiante le permitieron ubicarse en los niveles 4 y 5, que son los más complejos de alcanzar, y sería interesante proponer otros tipos de tareas donde el estudiante haga demostraciones y use su conocimiento conceptual y pragmático.

Se concluye que este tipo de tareas diseñadas y orientadas bajo el modelo de Van Hiele es importante para que los estudiantes comprendan conceptos geométricos desde sus características hasta su aplicabilidad en contextos extramatemáticos. Además, reconocemos que existen múltiples investigaciones realizadas con los niveles de Van Hiele y la geometría, pero, la mayoría reportan que los participantes no alcanzan el nivel superior donde realizan demostraciones. Ante esta situación, manifestamos que este estudio es importante porque se alcanzan resultados relevantes y motivan a seguir promoviendo estas situaciones en cursos de didáctica de la geometría, formación de profesores, entre otros ambientes socioculturales.

Para futuras investigaciones, se sugiere realizar estos estudios con una población más amplia para encontrar generalidades, establecer diferencias y similitudes y evitar los casos particulares que, si bien son resultados interesantes, muchas veces se encuentran las limitaciones, surgiendo preguntas como ¿qué ha sucedido con otros sujetos? ¿qué tipo de razonamiento tienen y en qué nivel se ubican de acuerdo con sus respuestas a las tareas? Asimismo, se puede experimentar con otras tareas que involucren otros conceptos geométricos y contextos.

ACLARATORIAS

Los autores no tienen conflicto de interés para declarar. El artículo ha sido financiado con recursos propios de los autores. Agradecemos al estudiante de licenciatura en matemáticas que participó en esta investigación de manera voluntaria. También, a las producciones contextualizadas del Semillero Conexiones Etnomatemáticas, Teóricas y Metodológicas en Educación Matemática (CETMEM) de la Universidad del Atlántico, para favorecer a la comprensión de conceptos matemáticos, geométricos y de otras disciplinas científicas.

REFERENCIAS

Abdussakir, A. (2009). Pembelajaran geometri sesuai teori Van Hiele. *Madrasah: Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran Dasar*, *2*(1), 1-13. https://doi.org/10.18860/jt.v2i1.1832

Almendros, S. (2016). La didáctica de la geometría y el modelo de van Hiele. *Revista Publicaciones Didácticas*, (71), 432-436.

Alsina, C., Fortuny, J., & Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para ESO*. Síntesis.

Anđelković, S., & Malinović-Jovanović, N. (2022). Students' achievements in primary school mathematics according to the Van Hiele model of the development of geometric thinking. *Facta Universitatis*, *6*(2), 155-167.

Assad, D. A. (2015). Task-based interviews in mathematics: understanding student strategies and representations through problem solving. *International Journal of Education and Social Science*, *2*(1), 17-26.

Ávila, M. (2019). El teorema de Pitágoras en el marco del modelo de Van Hiele: propuesta didáctica para el desarrollo de competencias en razonamiento matemático en estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Anna Vitiello. *Zona Próxima*, (30), 33-62. https://doi.org/10.14482/zp.30.373

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C., & Salgado, M. (2022). Razonamiento y aprehensión ante una tarea geométrica: análisis de la pertinencia didáctica de una trayectoria de aprendizaje en educación infantil. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *36*(72), 332-357. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a15

Cabello, A. B. (2013). *La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de Cabri* [tesis doctoral, Universidad de Salamanca]. Repositorio Documental de la Universidad de Salamanca. http://hdl.handle.net/10366/122919

Camargo, L., & Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 4-8.

Carhuapoma, L. (2018). *Modelo de Van Hiele en el aprendizaje de cuadriláteros, en estudiantes del cuarto grado de José Carlos Mariátegui, Pampachacra* [tesis de pregrado, Universidad Nacional de Huancavelica). Repositorio Institucional Digital de la Universidad Nacional de Huancavelica. http://repositorio.unh.edu.pe/handle/UNH/1771

Carrasco, S. (2018). *Determinando el nivel de razonamiento geométrico según el modelo de van Hiele, en base a la construcción de un instrumento* [tesis de pregrado, Universidad Austral de Chile]. Sistema de Bibliotecas de la Universidad Austral de Chile. http://cybertesis.uach.cl/tesis/uach/2018/bpmc313d/doc/bpmc313d.pdf

Chavarria-Pallarco, N. A. (2020). Modelo Van Hiele y niveles de razonamiento geométrico de triángulos en estudiantes de Huancavelica. *Investigación Valdizana*, *14*(2), 85-95. https://doi.org/10.33554/riv.14.2.587

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge.

Cortés, M., & Velásquez, E. (2022). *Caracterización de un diseño de tareas para la enseñanza del concepto de congruencia triangular con la mediación instrumental de GeoGebra* [tesis de pregrado, Universidad del Valle). Biblioteca Digital de la Universidad del Valle. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/21826

Espinoza, V. (2008). *Una aplicación del modelo de Van Hiele* [tesis de pregrado, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio Digital del Instituto Politécnico Nacional. http://repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/5938

Falconí-Procel, X. Y. (2021). Modelo de Van Hiele y su utilización para la enseñanza de la geometría. *Revista Polo del Conocimiento*, *6*(3), 2262-2278.

Fuentes, C. (2017). *Los triángulos en el marco del modelo de van Hiele utilizando el tic, en niños de sexto grado* [tesis de maestría, Universidad Autónoma de Bucaramanga). Repositorio de la Universidad Autónoma de Bucaramanga. https://repository.unab.edu.co/handle/20.500.12749/2308

Fuentes, N., Portillo, J., & Robles, J. (2015). Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele y su relación con los estilos de aprendizaje. *Panorama*, *9*(16), 44-54. https://doi.org/10.15765/pnrm.v9i16.635

Gaitán, M. A., Lacayo, M. A., & Flores, W. O. (2015). Comprensión del aprendizaje de la parábola en undécimo grado aplicando el modelo de van Hiele. *Ciencia e Interculturalidad*, *15*(2), 21-33. https://doi.org/10.5377/rci.v15i2.1917

García, L., & Fuentes, B. (2017). *Los cuadriláteros en el marco del modelo Van Hiele (niveles 1 y 2), para el fortalecimiento del pensamiento espacial y geométrico de los estudiantes del grado sexto del Instituto Técnico Agrícola de Convención, Norte de Santander* [tesis de maestría, Universidad Autónoma de Bucaramanga]. Repositorio de la Universidad Autónoma de Bucaramanga. http://hdl.handle.net/20.500.12749/2313

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-545). Lawrence Erlbaum Associates.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática*, *3*(2), 49-65. https://doi.org/10.24844/EM0302.05

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 55-70. https://doi.org/10.17227/ted.num32-1859

Haj-Yahya, A. (2022). Students' conceptions of the definitions of congruent and similar triangles. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(10), 2703-2727. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1902008

Hernández, J. C., García, M. T., & Pérez, Y. T. (2015). *Comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza mediante el doblado de papel* [tesis de pregrado, Universidad de Antioquia). Repositorio Institucional de la Universidad de Antioquia. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/23602

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.

Hernández, R., Useche, V., & Mariño, L. (2021). Explorando los conceptos de polígonos y poliedros desde el modelo de Van Hiele. *Revista Boletín Redipe*, *10*(6), 407-420. https://doi.org/10.36260/rbr.v10i6.1336

Herrera, J. A., & Forero, M. S. (2022). *El razonamiento geométrico en la educación en línea de estudiantes de grados sexto y once fundamentado en el modelo de Van Hiele* [tesis de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional de la Universidad Pedagógica Nacional. http://hdl.handle.net/20.500.12209/17470

Kandaga, T., Rosjanuardi, R., & Juandi, D. (2022). Epistemological obstacle in transformation geometry based on van Hiele's level. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*(4), 2-12. https://doi.org/10.29333/ejmste/11914

Llorens Fuster, J. L., & Prat Villar, M. (2015). Extensión del modelo de Van Hiele al concepto de área. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (45), 113-128.

López, D. (2023). *Construcciones y demostraciones geométricas en secundaria. Replanificando la geometría plana* [tesis de maestría, Universidad de Jaén). Colección de Recursos Educativos Abiertos de la Universidad de Jaén. https://crea.ujaen.es/handle/10953.1/19486

López, Y., & Bolaño, M. (2022). Niveles de razonamiento de Van Hiele en estudiantes de séptimo grado. *South Florida Journal of Development*, *3*(1), 685-702. https://doi.org/10.46932/sfjdv3n1-050

Mahlaba, S. C., & Mudaly, V. (2022). Exploring the relationship between commognition and the Van Hiele theory for studying problem-solving discourse in Euclidean geometry education. *Pythagoras*, *43*(1), 2-11. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v43i1.659

Marín, L. K. (2017). *La maleta viajera de Euclides, como estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento espacial y los sistemas geométricos* [tesis de maestría, Universidad Autónoma de

Bucaramanga]. Repositorio de la Universidad Autónoma de Bucaramanga. http://hdl.handle.net/20.500.12749/2354

Ministerio de Educación [MINEDU]. (2017). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. MINEDU.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencia y ciudadanas*. MEN.

Moise, E., & Downs, F. (1986). *Geometría moderna*. Addison Wesley Iberoamericana S. A.

Musa, M. R., Ikhsan, M., & Zaura, B. (2017). Peningkatan kemampuan berpikir kritis melalui penerapan model pembelajaran berbasis teori Van Hiele di kelas IX SMP negeri nanda aceh. *Jurnal Ilmiah Mahasiswa Pendidikan Matematika*, *2*(2), 9-17.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Naufal, M. A., Abdullah, A. H., Osman, S., Abu, M. S., & Ihsan, H. (2021). Reviewing the Van Hiele model and the application of metacognition on geometric thinking. *International Journal of Evaluation and Research in Education*, *10*(2), 597-605. https://doi.org/10.11591/ijere.v10i2.21185

Passos, A., Buriasco, R. L. C. D., & Soares, M. T. C. (2019). Ideias de Van Hiele e educação matemática realística: algumas aproximações. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(65), 1533-1548. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a26

Pérez-Díaz, H. M. (2023). Estilos de aprendizaje y los niveles de pensamiento. *Con-Ciencia Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 3*, *10*(19), 33-36.

Quintero, Z. (2020). *Diseño de software "viaje por la geometría" según el modelo de van Hiele para fortalecer el aprendizaje de los poliedros en estudiantes del grado noveno* [tesis de maestría, Universidad Francisco de Paula Santander]. Repositorio Digital de la Universidad Francisco de Paula Santander. http://repositorio.ufps.edu.co/handle/ufps/3823

Robles, D. (2020). *El modelo de Van Hiele basado en el origami para mejorar el aprendizaje de la geometría en los estudiantes del primer grado de secundaria de la I.E. N° 88190 Mayas, Áncash – 2019* [tesis de maestría, Universidad Católica los Ángeles de Chimbote]. Repositorio Institucional de la Universidad Católica los Ángeles de Chimbote. https://hdl.handle.net/20.500.13032/19323

Rodríguez-Nieto, C. A. (2021). Conexiones etnomatemáticas entre conceptos geométricos en la elaboración de las tortillas de Chilpancingo, México. *Revista de Investigación Desarrollo e Innovación*, *11*(2), 273-296. https://doi.org/10.19053/20278306.v11.n2.2021.12756

Rodríguez-Nieto, C. A., & Escobar-Ramírez, Y. C. (2022). Conexiones etnomatemáticas en la elaboración del sancocho de guandú y su comercialización en Sibarco, Colombia. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *36*(74), 971-1002. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a02

Rodríguez-Nieto, C. A., Escobar-Ramírez, Y. C., Font, V., & Aroca, A. (2023). Ethnomathematical and mathematical connections activated by a teacher in mathematical problems posing and solving. *Acta Scientiae*, *25*(1), 86-121. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7356

Rodríguez-Nieto, C. A., Font, V., Borji, V., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2022a). Mathematical connections from a networking theory between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(9), 2364-2390. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071

Rodríguez-Nieto, C. A., Velásquez-Calderón, D. A., Muñoz-Orozco, A., Mercado-Porras, K. A., & Cervantes-Barraza, J. A. (2022b). Investigando las conexiones etnomatemáticas entre las formas de quesos y tambores musicales en Chilpancingo, México. Una contribución a la didáctica de la geometría. *Journal of Mathematics and Culture*, *16*(1), 119-152.

Sanabria, A. (2018). *Propuesta didáctica para la enseñanza de los conceptos de semejanza y congruencia, dirigida a estudiantes de grado octavo* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional de la Universidad Nacional de Colombia. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/63892

Sará, E., & Míguez, A. (2018). Una experiencia de aprendizaje basada en el modelo de Van Hiele. *Educ@ción en Contexto*, *4*(8), 90-117.

Silva, V., & Wall, K. (2022). (2022). *Conocimientos de los profesores de matemática sobre el modelo de Van Hiele en geometría de la Región de Ñuble* [tesis de pregrado, Universidad del Bío-Bío]. Sistema de Bibliotecas de la Universidad del Bío-Bío. http://repobib.ubiobio.cl/jspui/handle/123456789/3655

Vargas, G., & Gamboa, R. (2013a). El modelo de van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Revista Uniciencia*, *27*(1), 74-94.

Vargas, G., & Gamboa, R. (2013b). La enseñanza del teorema de Pitágoras: experiencia en el aula con el uso del GeoGebra, según el modelo de Van Hiele. *Revista Uniciencia*, *27*(1), 95-118.

Wulandari, S., Syahbana, A., Tanzimah, T., Shang, Y., Weinhandl, R., & Sharma, R. (2021). Analysis of students' thinking level in solving Pythagoras' theorem problems based on Van Hiele's theory. *Malikussaleh Journal of Mathematics Learning (MJML)*, *4*(2), 124-130. https://doi.org/10.29103/mjml.v4i2.3905

Zapata, G. (2014). *El desarrollo del pensamiento espacial a través del aprendizaje por descubrimiento* [tesis de pregrado, Universidad de Antioquia]. Repositorio Institucional de la Universidad de Antioquia. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/22838

Cómo citar este artículo:
Manjarrés-Calderón, A. L., Muñoz-Díaz, Y. J., Rodríguez-Nieto, C. A., Valencia-Chávez, I., & Bermejo-García, G. (2023). Razonamiento geométrico de un estudiante universitario activado al resolver problemas de congruencia contextualizados. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, *3*(1), e202305. https://doi.org/10.54541/reviem.v3i1.61