ISSN: 2739-039X
www.reviem.com.ve
Asociación Aprender en Red
Asociación Venezolana de Educación Matemática
Vol. 3, No. 1
DOI: 10.54541/reviem.v3i1.59

Aquiles, la tortuga y los modelos tácitos

Achilles, the tortoise and tacit models

Aquiles, a tartaruga e os modelos tácitos

Tamara Díaz-Chang [1]

Elizabeth-H. Arredondo [2]

[1] Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile

[2] Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile

Recibido: 04/11/2022 – Aceptado: 30/01/2023 – Publicado: 01/02/2023

Remita cualquier duda sobre esta obra a: Tamara Díaz-Chang.
Correo electrónico: tamara.diaz@uach.cl

Resumen

En este artículo se estudian ciertos tipos de modelos mentales que utilizan los estudiantes para representar de manera simplificada nociones originales, con el objetivo de propiciar y estimular el proceso de comprensión, a través del análisis de las respuestas de un grupo de estudiantes de la Universidad Austral de Chile, a un cuestionario inspirado en la famosa paradoja de Aquiles y la tortuga. Los resultados obtenidos muestran la tendencia natural de los estudiantes a pensar en términos de estos patrones de razonamiento simplificados, que luego se vuelven implícitos, tácitos o inconscientes, controlando sus razonamientos de manera automática, conduciendo a una comprensión errónea del infinito matemático. En particular, se identifican seis de estos modelos, sobre los cuales los estudiantes deben tomar conciencia para lograr una comprensión adecuada de este concepto matemático. Se argumenta que este tipo de estudios nos permite poner atención y reflexionar sobre la inconsistencia de nuestros propios mecanismos de razonamiento e intuiciones en relación con éste y otros conceptos matemáticos, al mismo tiempo que nos permite validar estas inconsistencias, al comprender su epistemología, basada en parte en nuestras limitaciones motosensoriales, determinadas por las características de nuestros cerebros.
***Palabras clave*:** Infinito matemático; Modelos tácitos; Enseñanza universitaria.

Abstract

This article studies certain types of simplified mental models that help students to represent original identities with the aim of facilitating and stimulating the comprehension task, through the analysis of the responses to a quiz inspired by the famous paradox of Achilles and the tortoise of a group of students from the Universidad Austral de Chile. The results obtained show the natural tendency of students to think in terms of these simplified

mental models that then become implicit, tacit, or unconscious, controlling their reasoning automatically, leading to a wrong understanding of mathematical infinity. Six of these models are identified, about which students must become aware to achieve an adequate understanding of this mathematical concept. It is argued that the incorporation of this type of studies allows us to pay reflect on the inconsistency of our own reasoning mechanisms and intuitions in relation to this and other mathematical concepts, at the same time it allows us to validate these inconsistencies, by understanding their epistemology, based in part on our motor-sensory limitations which are determined by the characteristics of our brains.
***Keywords*:** Mathematical infinity; Tacit models; Higher education.

Resumo

Este artigo estuda alguns tipos de modelos mentais simplificados que ajudam os alunos a representarem noções originais com o objetivo de facilitar e estimular a tarefa de compreensão, através da análise das respostas de um grupo de alunos da Universidade Austral de Chile, a um questionário inspirado pelo famoso paradoxo de Aquiles e a tartaruga. Os resultados obtidos mostram a tendência natural dos alunos de pensarem em termos desses modelos mentais simplificados que depois se tornam implícitos, tácitos ou inconscientes, controlando seu raciocínio automaticamente, levando a uma compreensão errada do infinito matemático. Em particular, identificam-se seis destes modelos, sobre os quais os alunos devem tomar conhecimento para alcançarem uma compreensão adequada deste conceito matemático. Defende-se que a incorporação deste tipo de estudos permite-nos atentar e refletir sobre a inconsistência de nossos próprios mecanismos de raciocínio e intuições em relação a este e outros conceitos matemáticos, ao mesmo tempo que nos permite validar essas inconsistências, pela compreensão de sua epistemologia, baseada em parte em nossas limitações sensório-motoras, determinadas pelas características de nossos cérebros.
***Palavras-chave*:** Infinito matemático; Modelos tácitos; Ensino universitário.

INTRODUCCIÓN

El concepto de infinito es esencial para comprender nociones fundamentales dentro de las matemáticas, debido a su trascendencia desde el punto de vista epistemológico, y por estar estrechamente relacionado con numerosos tópicos en la enseñanza de diversas disciplinas, así como en general, en la enseñanza obligatoria y universitaria. Sin embargo, la definición formal de este concepto matemático no aparece en el currículo escolar en ningún nivel de enseñanza, y no es fácil hallar referencias explícitas sobre su significado en ningún contexto educativo. Además, en el aprendizaje de las matemáticas durante la enseñanza básica y media, se presenta solo de manera simbólica o bien como sinónimo de algo muy grande o muy pequeño. Por otra parte, dado su carácter abstracto y singular, despierta gran interés en los estudiantes.

Por otra parte, según la perspectiva sociocultural de Vygotsky (1995), los objetos matemáticos se consideran como símbolos de unidades culturales, que emergen de un sistema de usos relacionados con las actividades matemáticas que realizan colectivos humanos y que, por tanto, también evolucionan a lo largo del tiempo. Desde esta perspectiva, el emerger progresivo de los objetos matemáticos es determinado por las prácticas que se realizan en el seno de ciertas instituciones sociales. Como consecuencia, los significados de dichos objetos se relacionan estrechamente con los problemas afrontados históricamente y las actividades realizadas por los individuos en el transcurso del tiempo, por lo que el significado de un objeto matemático no se reduce solamente a su definición matemática.

Pero, ¿qué es el infinito matemático? ¿Acaso es, como algunos sugieren, una extrapolación de nuestra experiencia finita? Y si así fuese, ¿cómo dependen nuestras intuiciones sobre el infinito, del tipo de experiencia finita que extrapolamos? Los estudiantes, al tener experiencias distintas, llegan de manera intuitiva a diferentes tipos de ideas acerca del infinito matemático. Por ejemplo, si consideramos dos conjuntos no finitos distintos cuyos elementos están en correspondencia biyectiva, obtenemos al infinito actual asociado al concepto de número cardinal. Por otra parte, si queremos introducir al infinito potencial, podríamos considerar la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Estudiando su comportamiento, encontramos que a medida que x se aproxima a 1 por la izquierda, f(x) es positiva y se hace cada vez más grande; mientras que a medida que x se aproxima a 1 por la derecha, f(x) es negativa y se hace cada vez más pequeña. También podemos estudiar el valor de la función $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+1}$ cuando x crece indefinidamente. En este caso el valor de esta expresión se aproxima a 0 pues, aunque ambos términos (x+1) y $(2x^2+1)$ crecen sin límite a medida que x crece, $(2x^2+1)$ crece más rápido que (x+1). ¿Cómo reconciliar estos dos últimos ejemplos? ¿Es $+\infty$ lo mismo que $-\infty$? Si (x+1) tiende a $+\infty$ a medida que x crece indefinidamente, ¿cómo puede $(2x^2+1)$ tender a algo incluso más grande? ¿Cómo algo puede ser incluso mayor que infinito? ¿Existen infinitos más grandes que otros? ¿Cuántos infinitos existen? ¿Y qué sucede con lo infinitamente pequeño? ¿Qué es un infinitesimal y cómo se relaciona con lo infinitamente grande? ¿Cómo pueden los estudiantes reconciliar todas estas ideas?

El infinito matemático es uno de los conceptos más complejos a los que se enfrentan los estudiantes, e incluso, los profesores, en el estudio de diversas temáticas en el nivel universitario y a pesar de que, por esta misma razón, ha sido extensamente estudiado desde diferentes perspectivas teóricas en didáctica de la matemática, no se puede afirmar que se comprenden los complejos mecanismos cognitivos que se desarrollan con relación a su aprendizaje. Autores como Dubinsky *et al*. (2005) aseguran que, debido a su naturaleza, el sistema cognitivo de un individuo no puede apropiarse de este concepto matemático mediante manipulaciones operativas representadas por proposiciones formalmente rigurosas.

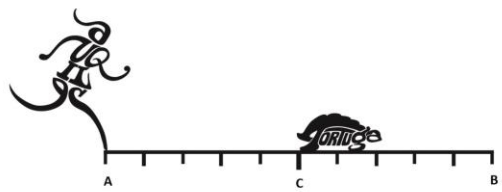
Por todo lo expuesto anteriormente, en este trabajo nos proponemos estudiar las contradicciones que desde el punto de vista intuitivo nos presenta este concepto matemático, a través de las respuestas a un cuestionario que tiene como tema central al infinito como concepto matemático, inspirado en la famosa paradoja de Aquiles y la tortuga (Bolzano, 1991), introducida por Zenón de Elea en el siglo V a. C. y que aparece con frecuencia en el estudio de sucesiones y sumas de series, revelando además las diferencias entre el infinito en su concepción *potencial* y en su concepción *actual* (Aristóteles, 1985).

LA PARADOJA DE AQUILES Y LA TORTUGA

Esta famosa paradoja se puede enunciar, para los propósitos de nuestro estudio, de la siguiente manera: Aquiles, el héroe griego de *La Ilíada* de Homero, quiere competir en una carrera con la lenta tortuga, recorriendo una pista recta cuya longitud es distinta de cero, que comienza en el punto A y termina en el punto B. Dado que Aquiles es el doble de rápido con relación a la tortuga, en un gesto de generosidad, Aquiles decide permitirle a la tortuga comenzar la carrera en el punto C, justo en la mitad del trayecto, como se observa en la Figura 1, de manera que $AC = CB = AB/2$.

Figura 1

Aquiles y la tortuga (Cortesía de Duhamel Xolot - Proyecto Antropografía)



Una vez comenzada la carrera, cuando Aquiles llega al punto C, la tortuga ya se ha desplazado al punto que representa la mitad del trayecto que resta. De manera similar, en la siguiente etapa, cuando Aquiles ha alcanzado el punto donde estaba la tortuga, ésta ya se ha desplazado de nuevo, al nuevo punto que marca la mitad del camino que quedaba. Y así sucesivamente. En todas las etapas de la carrera, la tortuga siempre estará por delante de Aquiles, justo a la mitad de la distancia que quedaba por recorrer en la etapa anterior. Supongamos entonces que ya ambos recorrieron toda la distancia, lo que se quiere determinar entonces es quién ganó la carrera, y si fue Aquiles, en cuál punto de la pista Aquiles alcanzó a la tortuga.

La paradoja se produce porque aparentemente Aquiles nunca logra alcanzar a la tortuga, debido a que se asume que la distancia y el tiempo se pueden subdividir infinitamente y esto nos resulta contraintuitivo, puesto que, según nuestra experiencia cotidiana, es evidente que Aquiles la alcanzará en algún momento. Recordemos que, generalmente, una paradoja se produce cuando estamos ante un razonamiento aparentemente correcto cuya conclusión es evidentemente falsa, o ante un “hecho o expresión aparentemente contrarios a la lógica” (Real Academia Española, 2014, p. 6519).

Lo que sucede aquí está muy relacionado con el fenómeno de convergencia de una serie y las dificultades que surgen al considerar que la suma de un número infinito de términos podría tener un resultado finito, y está muy relacionado con patrones y estructuras cognitivas que resultan ser insuficientes para comprender este concepto y que aparecen de manera inconsciente en nuestro razonamiento en este caso. En particular, una de las suposiciones que se hace es la de asumir que un número infinito de trayectos deben sumar una distancia infinita y necesitan un tiempo infinito para ser sumados que, como ya sabemos, es incorrecta.

En efecto, la distancia total recorrida, tanto por Aquiles como por la tortuga, así como la distancia que los separa, es la suma de todos los términos de una progresión geométrica con razón $r = ½$, siendo $| r | < 1$. Por lo que sabemos que la suma converge y el resultado es finito, y que, de hecho, la distancia que separa a Aquiles de la tortuga es cero al finalizar la carrera.

En resumen, esta paradoja sugiere la complejidad que entraña el estudio del infinito desde el punto de vista matemático.

A continuación, se presentarán algunas consideraciones teóricas que utilizaremos para analizar este fenómeno.

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Antes de comenzar nuestro análisis, recordemos que Brousseau (1983) señala que los errores no siempre son producto de la ignorancia o de la inexactitud y que un obstáculo puede ser un conocimiento o algo que se comporta como tal en un cierto contexto, pero que, cuando este contexto es modificado, puede volverse insuficiente e inadecuado y ser fuente de errores. Además, estos errores pueden reaparecer aún después de haberse tomado consciencia de ellos.

Destaquemos que, en el aprendizaje de un determinado concepto en matemáticas, en general, se distinguen tres tipos de obstáculos: los ontogénicos, teniendo su origen en las características del desarrollo de los estudiantes; los didácticos, producto de la enseñanza; y los epistemológicos, intrínsecamente relacionados con la matemática bajo estudio. En este punto es válido recordar que Bachelard (2000) acuñó el término obstáculo epistemológico, refiriéndose a nuestra naturaleza mental, y al hecho de que, al momento de aprender o enseñar, nuestras mentes no se encuentran en blanco, sino que están influidas por conocimientos y pensamientos previos, por sistemas de creencias y preconcepciones ya adquiridos.

Por otra parte, el origen del problema al que se enfrenta un individuo cuando tiene ante sí un obstáculo epistemológico se puede estudiar, además, en parte, analizando las dificultades que los matemáticos de generaciones anteriores tuvieron que enfrentar ante situaciones similares a través de la historia. En el caso del infinito, este análisis histórico sugiere algunas de las dificultades que entraña la concepción de este objeto matemático (Díaz-Chang y Arredondo, 2021). En particular, algunos trabajos (e.g., Arrigo & D'Amore, 1999, 2004; Artigue, 1995; Fischbein, 2001) dan cuenta de la complejidad que tiene, en este caso, el obstáculo epistemológico.

Además, en el estudio de un determinado concepto, desde el punto de vista histórico y epistemológico, no solo se analiza la función y estructura de dicho concepto, sino también la complejidad de los desarrollos teóricos que se producen y que dan lugar a elementos de discursos matemáticos con determinados significados, reconocidos en una época dada.

El clásico debate filosófico sobre el infinito en sentido actual y en sentido potencial, originado en la antigua Grecia por Aristóteles (1985), ha inspirado diferentes investigaciones (e.g., Bagni, 2004;

Moreno & Waldegg, 1991; Tsamir & Tirosh, 1994). Por ejemplo, Arrigo y D'Amore (2004) afirman que la evolución de la concepción del infinito matemático en su sentido actual se produce lentamente, de modo contradictorio, tras un largo proceso de maduración y sistematización cognitiva.

En algunos trabajos se considera que las intuiciones acerca del infinito emergen en consideración de procesos recursivos y como una extrapolación de nuestra experiencia que es finita (Arrigo & D'Amore, 2004). Los niños en edad escolar conciben el infinito potencial a través del proceso de conteo sin fin de los números naturales. Luego, cuando se introduce el símbolo $\mathbb{N}$ para denotar al conjunto de los números naturales, los estudiantes asumen que se puede considerar la totalidad de estos números. Según un estudio realizado por Tall (1981), la mayoría de los estudiantes universitarios pierden la concepción del infinito potencial en relación con los números naturales a partir del estudio de la Teoría de Conjuntos, adoptando la noción de infinito actual introducida por Cantor.

Otra de las convicciones intuitivas más difundidas entre los estudiantes es considerar que en un segmento más largo hay más puntos que en un segmento más corto (e.g., D'Amore & Martini, 1997; Tall, 1981), lo que se conoce como *dependencia* de los cardinales transfinitos a hechos relativos a la medida (D'Amore, 2011). Por otra parte, varios estudios (e.g., Dubinsky *et al.*, 2005; Fischbein, 2001; Mena-Lorca *et al.*, 2015) evidencian que muchas de las conocidas paradojas sobre el infinito (como la paradoja de Zenón sobre Aquiles y la tortuga) (Bolzano, 1991) se originan a partir de ciertas convicciones intuitivas, provocando dificultades en el proceso de emergencia de este concepto en los estudiantes.

En particular, Fishbein (2001) plantea que este tipo de convicciones intuitivas, como la que especifica D'Amore (2011), constituyen *modelos tácitos*, implícitos, que surgen de manera inconsciente cuando se trata con conceptos demasiado abstractos o complejos. En estos casos, existe una tendencia natural a representar las identidades que se intentan comprender en términos de modelos mentales simplificados, facilitando y estimulando así la comprensión o resolución. Sin embargo, Fishbein (2001) afirma que, en algunas ocasiones, luego se pierde conciencia de todo esto, y estos modelos se vuelven implícitos o tácitos, controlando nuestro razonamiento de forma inconsciente.

El término *modelo tácito* tiene su origen en el conocimiento tácito de Polanyi (1958). Este filósofo de la ciencia argumenta que, dada nuestra naturaleza, no es posible poner nuestro foco de atención en todo lo que percibimos de nuestro entorno a través de nuestros sentidos, por lo que la mayoría de nuestra experiencia en el mundo no es consciente. La dimensión cognitiva de este conocimiento inconsciente incluye modelos mentales, creencias, valores, esquemas y percepciones que influencian las formas de pensar y actuar de un individuo, reflejando la imagen que se tiene de algo y que se ha formado de manera implícita e inconsciente, sin habérsele prestado atención consciente. En este punto, vale la pena destacar que, en los últimos años, los experimentos de la neurociencia cognitiva han confirmado sus argumentos (ver, por ejemplo, Kihlstrom, 2018).

Por todo lo anterior, se considera importante el estudio de estos modelos inconscientes, puesto que su análisis nos podría ser especialmente útil en la comprensión de obstáculos y dificultades que aparecen en este caso. En Belmonte y Sierra (2011) y sus referencias, se incluye una detallada revisión de las publicaciones relacionadas con estos *modelos tácitos* relacionados con el infinito matemático. Estos trabajos nos muestran que la construcción del infinito matemático es un proceso complejo y lleno de obstáculos, y algunos de ellos (e.g., Arrigo & D'Amore, 2004; Fischbein, 2001) afirman que, para que éstos sean superados, hay que ayudar a los estudiantes a tomar consciencia de estos modelos implícitos inconscientes que controlan sus procesos mentales. Por ejemplo, Arrigo y D'Amore (2004) recomiendan que para rectificar la creencia de que en un segmento más largo hay más puntos que en un segmento más corto, se ayude a los estudiantes a separarse del modelo inconsciente del segmento como "collar", cuyas "perlas" se hallan estrechamente ordenadas.

Desde la didáctica de la matemática, el obstáculo epistemológico que surge en relación con el infinito matemático en esta paradoja está relacionado con la noción de límite. En concreto, los estudiantes, de la misma manera que Zenón en su tiempo, tienen dificultades al imaginar una serie infinita que converge. Además de la dificultad que presentan para aceptar la noción de que el límite puede existir an cuando no se alcance. Esto además constituye uno de los *modelos tácitos* o inconscientes definidos por Fishbein (2001) que habíamos mencionado anteriormente. O sea, en este caso, los estudiantes asumen que un proceso infinito no puede comportarse como uno finito, porque son esencialmente diferentes, es decir, un proceso recursivo finito puede completarse, pero uno infinito no. Dicho de otra manera, los estudiantes presentan la dificultad de hacer el paso del infinito potencial al infinito actual.

A menudo, cuando los estudiantes no resuelven estos conflictos, se concluye que hay algo que no está correcto en estas intuiciones sobre el infinito. Sin embargo, desde la perspectiva de la cognición encarnada (Rosch *et al.*, 1991) (apoyada por los resultados de la neurociencia obtenidos en las últimas décadas), se propone que la concepción del infinito se basa en nuestros mecanismos cognitivos, que se ven limitados por las peculiaridades de nuestro cerebro, por nuestras experiencias sensoriomotoras basadas en mecanismos básicos de discriminación cuantitativa limitados por la biología de nuestros cerebros, por experiencias cinestésicas con relación a la comparación de tamaños y asociación de elementos (Gallese & Lakoff, 2005; Núñez, 2005). Por lo tanto, desde esta perspectiva, no hay nada incorrecto con estas intuiciones y el surgimiento de estos modelos en el aprendizaje del infinito matemático es una consecuencia directa de nuestras limitaciones y las características de nuestros cerebros.

METODOLOGÍA

La metodología usada fue mixta, los resultados cuantitativos se conjugaron con instrumentos propios de la metodología cualitativa. Para ello se elaboraron preguntas abiertas dirigidas a que los estudiantes pudieran justificar sus respuestas y expresar sus ideas, concepciones o intuiciones. De esta manera se recabó información cualitativa complementaria a la información recogida por el análisis cuantitativo de las respuestas obtenidas.

La elaboración del cuestionario se basó en criterios estándares en este caso (Cohen *et al.*, 2007). Se diseñó un cuestionario inicial para observar la bondad de las preguntas. Se valoró necesidad, redundancia, precisión, sesgos no equilibrados e información que poseyesen los estudiantes. Además, se consideraron las posibilidades de malentendidos, información superflua, longitud de los enunciados y precisión en la redacción de las preguntas. Tras someterlo a triangulación de expertos, aplicarlo a grupos piloto de estudiantes de la población considerada y realizar el correspondiente análisis de las respuestas, se procedió a redactar el cuestionario definitivo que fue respondido por los estudiantes en esta fase del estudio.

Dicho cuestionario fue aplicado como parte de las actividades de clases en el lapso de un año. El tiempo máximo de respuesta fue de 40 minutos. De la población de estudiantes de los primeros años de pregrado de la Universidad Austral de Chile, se tomó una muestra de 156 estudiantes. Entre éstos, se tenían 69 estudiantes del sexo femenino y 87 del sexo masculino, 12 eran estudiantes de Ciencias, mención Matemática, y los demás pertenecían a otras carreras de pregrado. La elección de la muestra, no probabilista, fue por conveniencia. Los estudiantes habían dado su consentimiento antes de participar en el experimento, por escrito.

Por último, con la finalidad de obtener información complementaria, se realizó una serie de entrevistas semiestructuradas a 32 de los 156 estudiantes que respondieron el cuestionario, que se basaron en la metodología de estimulación de recuerdos (conocida en inglés como *stimulated recall interview*). Éste es un tipo de metodología de investigación cualitativa introspectiva, que implica la verbalización de procesos cognitivos de manera retrospectiva y fue usada en este caso para inducir a los estudiantes a conversar sobre los procesos de razonamiento que utilizaron para responder a las preguntas del cuestionario.

La elección de los estudiantes que participaron, por parejas, en estas entrevistas, se realizó después de analizar las respuestas, teniendo en cuenta su riqueza en cuanto al número y las diferencias y variaciones registradas en cada una de éstas. Se seleccionaron parejas de estudiantes que tuviesen respuestas opuestas en al menos algunas preguntas del cuestionario, con la intención de que usaran sus propios argumentos para contrastar y resolver contradicciones. Las preguntas de estas entrevistas semiestructuradas estaban personalizadas para cada una de estas parejas, en función del registro escrito de sus respuestas a las preguntas del cuestionario. Para implementar la metodología de estimulación de recuerdos, ya mencionada anteriormente, se les presentaron los registros escritos de sus respuestas, compartiendo dicho registro en la pantalla de Zoom durante las entrevistas.

ANÁLISIS

En la Tabla 1, se muestra que el porcentaje más bajo de respuestas correctas se obtuvo en las preguntas N° 8 (16,02%) y N° 7 (16,67%), mientras que las preguntas N° 4 (28,21%) y N° 6 (30,77%) le siguen en orden. El mayor porcentaje de respuestas correctas se obtuvo en la pregunta N° 1 (65,38%), mientras que en las preguntas N° 2 (43,59%), N° 3 (44,23) y N° 5 (41,03) se obtuvo un porcentaje moderadamente alto, aunque menor.

Tabla 1

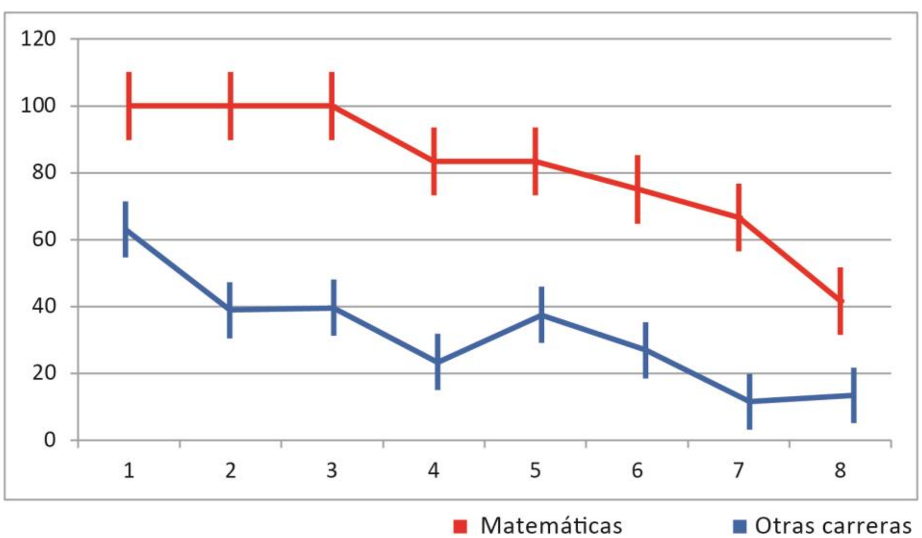
Porcentaje de respuestas correctas

Pregunta	% respuestas correctas
N° 1	65,38
N° 2	43,59
N° 3	44,23
N° 4	28,21
N° 5	41,03
N° 6	30,77
N° 7	16,67
N° 8	16,02

En el grupo Matemáticas, el porcentaje de respuestas correctas (media = 0,81) fue más de dos veces mayor que en el del grupo de otras carreras (media = 0,32). La diferencia entre los grupos fue significativa [$F(1,156) = 0{,}58978$, $p < 0{,}05$], como se presenta en la Figura 2. Las mayores diferencias se observan en las preguntas N° 2 (media grupo otras carreras = 0,39, media grupo Matemáticas = 1,00), N° 3 (media grupo otras carreras = 0,4, media grupo Matemáticas = 1,00) y N° 4 (media otras carreras = 0,24, media grupo Matemáticas = 0,83).

Figura 2

Diferencias en el porcentaje de respuestas correctas entre los grupos: Matemáticas y otras carreras



A continuación, presentamos las tablas que muestran los resultados del análisis cualitativo de las respuestas, a cada una de las preguntas del cuestionario, y los principales argumentos presentados para justificar dichas respuestas, así como sus respectivas frecuencias. Estos argumentos fueron registrados de manera escrita, así como de manera oral, a través de las entrevistas. De esta manera, se observan distintas variaciones en los argumentos adoptados por los estudiantes ante la contradicción descrita por la paradoja, en un contexto numérico dado por una representación que destaca su aspecto iterativo. Se nota que no hubo diferencias entre los argumentos dados por los estudiantes de Matemáticas con relación a los argumentos dados por los estudiantes de otras carreras, mostrando que la aparición de estos modelos tiene muy poco o nada que ver con el entrenamiento previo de los estudiantes.

A partir de estos resultados, podemos analizar cómo se desglosan las actitudes de los estudiantes en cuanto a las estructuras cognitivas que utilizan para responder a las preguntas, mostrando cómo éstas conducen a la aparición de los diversos *modelos tácitos* presentes. Notemos que cuando el cuestionario fue respondido, los estudiantes de otras carreras aún no habían estudiado el concepto de límite, por lo que tenían conocimiento de las sucesiones solo como una colección infinita y, tal vez, algunas nociones intuitivas sobre el límite a través de la estimación de cotas de algunas sucesiones que se estudian como ejemplos. En cambio, los estudiantes de Matemáticas ya estaban familiarizados con este concepto.

Para cada una de las ocho preguntas se categorizaron las respuestas y para cada una de estas categorías o respuestas tipo, se representa sus respectivas frecuencias. La primera pregunta (ver Tabla 2) solo tiene la intención de iniciar el proceso iterativo y esbozar la noción de la divisibilidad indefinida, al preguntar de manera explícita por los resultados del proceso iterativo de forma sucesiva, a través del cálculo de los primeros términos de la sucesión numérica que representa la distancia entre Aquiles y la tortuga en cada paso. En concreto, se pide encontrar los patrones de desplazamientos de Aquiles y la tortuga generados por el proceso iterativo, así como las sumas parciales de estos desplazamientos en cada paso. En esta pregunta notamos un alto porcentaje de respuestas correctas, y un bajo porcentaje de respuestas incorrectas, incompletas, contradictorias o en blanco. En cambio, se registra un porciento menor de respuestas correctas en la segunda pregunta, en relación con la distancia total recorrida por la tortuga, debido fundamentalmente a un mismo error en el paso inicial, como se muestra en esta misma tabla.

Tabla 2

Categorización de las respuestas a las preguntas 1 y 2

<table>
<tr><th>Respuestas
Pregunta</th><th>Resp. Correcta</th><th>Resp. Inco-rrecta</th><th>Nin-guna Resp.</th><th>No se puede conocer</th><th>Con-trad./ incom-pleta</th></tr>
<tr><td>1. Cuando Aquiles llegue al punto C, ya la tortuga se ha desplazado hasta el punto D, pero cuando Aquiles llegue al punto D, ya la tortuga se ha desplazado hasta el punto E. A su vez, cuando Aquiles llegue al punto E, ya la tortuga se ha desplazado hasta el punto F, y cuando Aquiles llegue al punto F, ya la tortuga se ha desplazado hasta el punto G. En la tabla aparece la distancia total recorrida por Aquiles desde la etapa 1 hasta la 5. ¿Cuál será la distancia total recorrida por Aquiles en la n-ésima etapa?
<table>
<tr><th>Etapa</th><th>Distancia total recorrida por Aquiles</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\frac{\overline{AB}}{2}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{4}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{4}+\frac{\overline{AB}}{8}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{4}+\frac{\overline{AB}}{8}+\frac{\overline{AB}}{16}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{4}+\frac{\overline{AB}}{8}+\frac{\overline{AB}}{16}+\frac{\overline{AB}}{32}$</td></tr>
</table></td><td>102</td><td>28</td><td>16</td><td>1</td><td>9</td></tr>
<tr><td>2. Teniendo en cuenta las tablas de las dos preguntas anteriores, y realizando un razonamiento similar, elabore una tabla donde aparezca la distancia total recorrida por la tortuga desde la etapa 1 hasta la 5. ¿Cuál será la distancia total recorrida por la tortuga en la n-ésima etapa?</td><td>68</td><td>64</td><td>17</td><td>1</td><td>6</td></tr>
</table>

En la pregunta 3, como se observa en la Tabla 3, se obtiene un porciento similar de respuestas correctas, puesto que la mayoría de los estudiantes arrastran el error cometido en la pregunta 2.

Tabla 3

Categorización de las respuestas a la pregunta 3

Respuestas / Pregunta	Distancia correcta	Distancia incorrecta	Sin Respuesta	Respuesta contradictoria
3- ¿Cuál es la distancia que separa Aquiles de la tortuga en la *n*-ésima etapa?	69	53	26	8

En la pregunta 4 (ver Tabla 4), se obtienen cinco categorías de respuestas: (1) se da una distancia entre éstos sin responder de manera directa si Aquiles alcanza o no a la tortuga, (2) Aquiles alcanza a la tortuga, (3) Aquiles no alcanza a la tortuga, (4) no se da respuesta y (5) se dan respuestas contradictorias.

Las ideas vertidas en estas respuestas, obtenidas mediante las entrevistas, nos permiten determinar de manera muy clara los *modelos tácitos* que aparecen en este caso. Por ejemplo, la respuesta contradictoria: "parece que la alcanza porque la distancia se hace cada vez más pequeña, pero no puede alcanzarla", refleja la aparición del *modelo tácito* de *inagotabilidad*. Además, el 50% de las respuestas presentó estos argumentos a favor de la idea de que Aquiles se aproximará a la tortuga sin alcanzarla nunca, lo que revela la formación del *modelo tácito*, que hemos llamado *inalcanzable*. Algunos estudiantes dan argumentos del tipo "tomará mucho tiempo, pero al final la alcanzará" (actitud finitista (Ewald, 1996)) o, "la alcanzará porque al final ya no se puede avanzar la mitad, y estará muy cerca".

Tabla 4

Categorización de las respuestas a la pregunta 4

Respuestas / Pregunta	Da distancia entre estos (ambigüedad)	Aquiles alcanza a la tortuga	Aquiles no alcanza a la tortuga	Sin Respuesta	Respuesta contradictoria
4- ¿Alcanzará en algún momento Aquiles a la tortuga?	11	44	78	19	4

En cuanto a las respuestas que se pronuncian en el sentido de un proceso iterativo sin final, aparecen de manera significativa, en primer lugar, los argumentos "la distancia se va acercando a cero" y "la distancia se hace infinitamente pequeña o muy pequeña". La imagen "acercarse a" o "hacerse cada vez más pequeño", que aparece a partir de esta pregunta, indica una tendencia natural a la concepción del infinito en su sentido potencial. También observamos la respuesta "el resultado es infinito", que aparece en un porcentaje muy bajo.

Por otra parte, esta pregunta desarrolla aún el proceso iterativo iniciado en las preguntas anteriores, y la divisibilidad indefinida, pidiendo de manera explícita, en cada paso, los resultados del proceso iterativo. En este caso notamos que los porcentajes de preguntas sin respuesta han tenido un pequeño ascenso y que las respuestas contradictorias han tenido un pequeño descenso.

En este contexto es más interesante centrarnos en los argumentos que se utilizan para justificar la imposibilidad de alcanzar el límite de la sucesión. Aquí nos encontramos con el argumento que refleja al infinito en su sentido potencial, sugerido en las respuestas: "porque es un proceso infinito" o bien "porque son/hay infinitos pasos", lo que refleja la presencia del *modelo tácito* de *inagotabilidad*; o "porque no se puede saber el resultado", lo que revela la formación del *modelo tácito* de *indefinición*.

Por otra parte, la respuesta que indica que Aquiles alcanza a la tortuga "porque siempre hay un final" indica la presencia del infinito en su sentido actual con cierto grado de contradicción. En este caso, ambas versiones del infinito impiden a los estudiantes percibir el límite de la sucesión como un valor efectivamente alcanzable. En el primer caso, esto sucede debido a su carácter potencial y en el segundo, porque se está suponiendo que se tiene un proceso con final a través del "último término" de la sucesión, lo que queda en evidencia porque una parte significativa de los estudiantes asume que si la división termina es porque ya no queda "nada que dividir".

Ambos tipos de justificaciones presentan argumentos tanto "abstractos" como "concretos". Por ejemplo, el proceso es infinito ya que "en todo segmento hay un número infinito de puntos", o "siempre podemos continuar dividiendo el segmento" (nuevamente la *inagotabilidad*). De manera similar, el proceso es finito pues "el segmento está limitado", o sea, los estudiantes tienen una representación material del segmento, vale decir, como un espacio físico finito con medida, un espacio geométrico asociado a una distancia numérica, lo que representa al *modelo tácito* de *dependencia*. O el proceso es finito porque "todo tiene un final", lo que refleja nuevamente una actitud finitista (Ewald, 1996).

Un porcentaje de los estudiantes distingue entre el aspecto "teórico" y el "práctico" de la pregunta, explicando que "teóricamente" Aquiles no alcanza a la tortuga, pero que sí lo hace "en la práctica". La respuesta afirmativa (que Aquiles alcanza a la tortuga) se basa o bien en que el segmento es finito o bien en que el proceso de realizar bisecciones es finito. En contraposición, la respuesta negativa se justifica porque al ser un extremo, B no puede ser un punto de bisección, o bien debido a que el proceso de bisección puede aproximarse a B tanto como se quiera, pero nunca logra alcanzarlo. O sea, nuevamente se tiene una representación física, material del segmento, lo que está asociado al *modelo tácito* de *dependencia*; o se está considerando que el proceso de bisecar el segmento constituye un proceso infinito de bisecciones. De manera alternativa, los estudiantes consideran que el segmento es un conjunto de infinitos puntos, luego el proceso de bisección no puede ser finito, y por tanto tampoco se puede lograr que el punto de bisección coincida con el extremo. En este caso también podemos observar la formación del modelo de *dependencia*.

La pregunta número 4 se refiere a un tópico un poco menos explorado, estrechamente relacionado con la idea de divisibilidad indefinida, es decir, el de la suma de un número infinito de términos decrecientes y que permitiría explorar nuevas perspectivas sobre las actitudes que suponen procesos iterativos que tienen o no tienen final. Con relación a esto, se tiene el *modelo tácito* de *divergencia*, que sistemáticamente atribuye un resultado infinito a la suma de una cantidad infinita de términos, sin considerar la eventual convergencia de esta suma. En este caso, según Belmonte y Sierra (2011), sólo argumentos "externos", como los que se usan en un contexto geométrico debido a las limitaciones impuestas, pueden ayudar a aceptar dicha convergencia, o bien, el comportamiento del *n*-ésimo término si se tiene un contexto numérico.

En cuanto a las respuestas a la pregunta 5 (ver Tabla 5), vemos que el mayor porcentaje de éstas corresponde a "el resultado es 1", mientras que entre las 53 respuestas que niegan que dicho resultado sea uno, se tienen 30, o sea, el mayor porcentaje de éstas, que corresponde a "se acerca a 1"; por tanto, la suma de los dos tipos de respuestas que corresponden a la convergencia de la serie iguala más del 60% de las respuestas. Sin embargo, en la respuesta del resto de los estudiantes, otra vez aparece la *divergencia*. También se aprecia que la perspectiva impuesta por la noción del infinito en su sentido actual, que da respuesta "1", es mayoritaria respecto a la que proporciona la noción del infinito en su sentido potencial, que corresponde a la respuesta "se acerca a 1" (otra vez se observa el modelo *inalcanzable*). Por otro lado, en el porciento de las 53 respuestas que niegan que el resultado sea 1 también aparecen los modelos de *indefinición* y *dependencia*.

Sin embargo, en las respuestas a la pregunta 6, como se observa en la misma Tabla 5, vemos que más del 48% de éstas corresponde a "el resultado no será ½" (*inalcanzable*), o sea, se registra gran cantidad de respuestas que niegan que dicho resultado sea ½, lo que refleja una evidente contradicción con los resultados obtenidos en la pregunta anterior y la inseguridad de los estudiantes respecto a sus respuestas. Las justificaciones a las categorías de respuestas que proporciona el infinito en su sentido potencial en este caso ("porque nunca se acaba" – *inagotabilidad* – y "porque siempre se suma algo") dan lugar al *modelo tácito* de *divergencia*. "Sumar siempre es aumentar sin límite" es un patrón inconsciente que puede impedir considerar que una suma infinita pueda tener resultado finito y que se revela en este modelo. Algunos estudiantes plantean que "la suma cada vez crecerá menos" o bien que "cada vez crece más despacio". En cualquier caso, se expresa que la suma "siempre crecerá" (otra vez se presenta la *inagotabilidad*). Al igual que en el caso de la pregunta anterior, en las respuestas se observan también los modelos de *indefinición* y *dependencia*.

Los resultados obtenidos en la pregunta 7 muestran que la mayoría de los estudiantes consideran que $(½)^n$ "no puede ser igual a 0 en ningún momento porque no se puede saber el resultado" (*indefinición*), e indican que solo un pequeño porcentaje de los estudiantes que responden que "no sucederá" (*inalcanzable*) mantiene que "el resultado es infinito" (*divergencia, inagotabilidad*), mientras que la mayoría afirma que "se acerca a 0". Además, se nos muestra hasta qué punto el modelo que representa un proceso iterativo sin final está anclado en nuestras experiencias cotidianas. Aquí también aparece la subcategoría "aunque es una suma indefinida" que conlleva una contradicción, revelando el conflicto entre los dos modelos cognitivos: el que considera al proceso iterativo que tiene final y el que considera que no tiene final.

Tabla 5

Categorización de las respuestas a las preguntas 5, 6 y 7

Respuestas / Preguntas	No sucederá/ no es posible	Sin respuesta	Respuesta correcta	Respuesta contradictoria	Suma incorrecta/ sin suma
5- ¿Será posible efectuar la suma infinita $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$? En caso afirmativo, ¿será cierto que el resultado es igual a 1?	53	31	64	_	8
6- ¿Será posible verificar que la suma $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots=\frac{1}{2}$?	75	15	48	8	10
7- Teniendo en cuenta sus respuestas a las preguntas anteriores, ¿sucederá que $1/2^n = 0$ en algún momento de la carrera?[1]	84	7	26	39	_

Por otra parte, se muestra el argumento principal que justifica el carácter potencial del proceso iterativo de división de un segmento, mediante dos versiones que son equivalentes, pero que tienen implicaciones diferentes. En la primera versión "un segmento cada vez más pequeño" se refiere a la longitud de lo que "queda", el segmento que "va quedando"; en cambio en la segunda, "siempre hay una parte más pequeña", se hace una referencia espacial explícita, asociada al modelo de *dependencia*.

Fischbein (1987) plantea que las intuiciones que tienen los estudiantes acerca de la noción de límite se refieren por lo general a la idea de procesos sin final, sin considerar si el límite tiene un valor finito o no. Como ya hemos mencionado anteriormente y según varios autores (e.g., Núñez, 2005; Tall, 2006), la capacidad de reflexionar sobre la completitud de procesos potencialmente infinitos es contraintuitiva. La ecuación se lee como un proceso de cálculo (Tall, 1981), "un medio más un cuarto más un octavo más un dieciseisavo, más (así sucesivamente) da uno". Pero no es posible alcanzar el término derecho de la igualdad antes de haber efectuado completamente las operaciones implicadas en el término izquierdo. La suma infinita $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$ se interpreta como una sucesión infinita de operaciones de adición, un proceso iterativo sin final, una cantidad creciente que se aproxima a cierto valor numérico tanto como se quiera, pero que no llega a alcanzarlo, tal como muestran muchas de las respuestas.

Notemos también que algunos autores (e.g., Fernández & Solano, 2005) han estudiado la noción de divisibilidad indefinida que sugiere esta paradoja, afirmando que los estudiantes que son capaces de concebir el límite como un punto, como el resultado final del proceso de división sucesiva de un segmento, lo pueden hacer solamente mediante la consideración formal de una sucesión de operaciones.

[1] Nótese que no se está preguntando si existe un "n" para el cual se cumpla la igualdad. El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes se den cuenta de que al final de la carrera se tiene el límite de esta sucesión.

Respecto de la última pregunta del cuestionario, notamos que casi el 42% de las respuestas afirma que “la tortuga ganará la carrera”, mientras que “nadie gana la carrera” porque “nunca termina la carrera” ya que “ninguno de los dos llega a la meta” y las respuestas en blanco constituyen dos de las categorías de respuesta que debemos analizar más detalladamente en este caso.

En primer lugar, vemos que la respuesta “ninguno de los dos llega a la meta” se basa en argumentos similares a los usados en las preguntas anteriores. En particular, el modelo de *divergencia* hace que el estudiante ignore también las limitaciones geométricas que aparecen “porque el espacio es infinito”, que deberían favorecer al *modelo tácito* conocido como *acotado-finito*, poniendo de manifiesto la persistencia de este modelo de *divergencia*, apoyado en la *inagotabilidad* que se manifiesta también en el argumento “porque nunca se llega a recorrer toda la distancia”.

En la pregunta 8 (véase la Tabla 6), así como en la pregunta 7, aparece la noción de que “podemos acercarnos cuanto queramos al límite” pero “el límite nunca se alcanza”, que también refleja el *modelo tácito* que denominamos *inalcanzable*, y que tiene estrecha relación con los modelos de *divergencia* y de *inagotabilidad*, pero se refiere a una idea intuitiva diferente.

Tabla 6

Categorización de las respuestas a la pregunta 8

Respuestas / Pregunta	Gana Aquiles	Gana la tortuga	Empate / llegan a la vez	Nadie gana	Nunca termina la carrera	No responde/ Respuesta contradictoria	No se puede saber
8- Finalmente, ¿quién ganará la carrera?	6	65	25	24	9	24	3

Algunos de los estudiantes que afirman “se produce un empate”, se refieren a algunas de las limitaciones anteriores para argumentar su respuesta. Otros, contemplan argumentos que consideran procesos iterativos con final. De cualquier modo, el porcentaje de estudiantes que puede dar algún tipo de justificación es bastante bajo en este caso. Este hecho, además del alto porcentaje de estudiantes que afirma que “la tortuga gana la carrera”, muestra que los modelos mencionados anteriormente aparecen para facilitar o simplificar una situación en la que no se sabe cómo responder.

Por otra parte, la respuesta “Aquiles alcanza a la tortuga en la meta” se justifica también por el hecho de que los términos van disminuyendo muy rápidamente, lo que ha inducido a pensar en la finalización de la serie en una cantidad “alcanzable” de términos, o al menos en una estimación bastante aproximada despreciando una “cantidad infinita” de términos, lo que indica el cuestionamiento de los modelos *inalcanzable* y *divergencia*, respectivamente.

Por último, observamos que la categoría de respuesta “ninguno llega a la meta” o “ninguno gana la carrera” se apoya en argumentos como el de la imposibilidad de realizar los cálculos pertinentes, “porque no se sabe qué distancias los separan” o “porque las distancias ni se pueden medir”, o “porque no conocemos la magnitud del infinito” (*indefinición*), mientras que otros utilizan el modelo de *divergencia*: “porque siempre existe una distancia entre ellos”, o “porque cuando una cantidad es infinita, no se puede saber con exactitud el resultado”, etc. Además, se considera que el proceso iterativo no tiene final, lo que se manifiesta mediante argumentos como "el proceso no se acaba", o "continuará siempre" o porque "siempre se puede dividir entre dos", refiriéndose de manera evidente a la noción del infinito en su sentido potencial. También se presentan argumentos que consideran un proceso con final, o sea, “el proceso se acaba”, el cual representa un bajo porcentaje y dentro de este porcentaje, el resultado “la distancia entre ellos da 0” no supera el 3%. Por último, la opción “no se puede saber” se presenta en solo 3 respuestas, lo que nos indica que todos estos *modelos tácitos* aparecen aquí con persistencia y libertad, y que los estudiantes tienen gran confianza en estos mecanismos erróneos inconscientes.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados de nuestro análisis muestran la tendencia natural en los estudiantes a pensar en términos de estos *modelos tácitos*, es decir, estructuras cognitivas inconscientes, conformadas por patrones de razonamiento simplificados, que les permiten interpretar ciertas identidades primarias con el objetivo de facilitar e inducir el proceso de comprensión, pero que, al ser inconscientes, controlan sus razonamientos de manera automática, creando obstáculos y dificultades en los procesos de aprendizaje e impidiendo, finalmente, una comprensión adecuada del infinito matemático.

En la Tabla 7, nuestro análisis muestra seis de estos *modelos tácitos* que aparecen en los argumentos de los estudiantes: la *inagotabilidad* del proceso porque “no se puede calcular” debido a la *indefinición* que surge del hecho de considerar una sucesión infinita de términos, como *divergencia*, porque “siempre se suma” o “se sigue sumando”, además del modelo que hemos denominado aquí *inalcanzable*, en estrecha relación con los tres modelos anteriores; y la *dependencia*, cuando se asocia el segmento como espacio geométrico con una distancia numérica. De la misma manera, debido a las limitaciones geométricas, aparece el modelo *acotado-finito*.

Tabla 7

Modelos tácitos presentes

Pregunta	**Modelos tácitos**
N° 1	-
N° 2	-
N° 3	-
N° 4	*inagotabilidad*, *dependencia*, *divergencia*, *indefinición*
N° 5	*inagotabilidad*, *divergencia*, *indefinición*, *inalcanzable*
N° 6	*inagotabilidad*, *divergencia*, *indefinición*, *inalcanzable*
N° 7	*inagotabilidad*, *divergencia*, *indefinición*, *inalcanzable*
N° 8	*inagotabilidad*, *dependencia*, *divergencia*, *indefinición*, *acotado-finito*

Destaquemos que los bajos porcentajes de respuestas correctas obtenidos en las preguntas N° 7 y N° 8 parecen estar relacionados, fundamentalmente, con la aparición del modelo de *divergencia*, a juzgar por el análisis cualitativo de las repuestas presentado en las Tablas 5 y 6.

Notemos, además, que en este análisis no hemos pretendido hacer una revisión exhaustiva de los *modelos tácitos* que se han reportado en la literatura relacionados con el infinito matemático (para una revisión de este tipo, ver Belmonte & Sierra, 2011); nuestro interés ha estado enfocado en revelar la riqueza del análisis y la variedad de estos modelos que se da en el contexto de cualquier actividad relacionada con este concepto, mediante la elección de este cuestionario en particular, que ha sido diseñado sobre la base a la paradoja de Aquiles y la tortuga.

De acuerdo con los resultados de nuestro análisis, consideramos que este tipo de estudios nos permitiría también examinar otros *modelos tácitos* que podrían aparecer relacionados con las diferentes concepciones del infinito matemático, así como con procesos iterativos que de manera implícita conllevan a la noción de divisibilidad indefinida, dándonos, además, la posibilidad de profundizar en otros aspectos de interés en los modelos aquí identificados.

De manera similar, nos brinda información relevante para el diseño de propuestas didácticas que tienen como objetivo el aprendizaje de numerosos conceptos relacionados con el infinito dentro de varias disciplinas de las matemáticas modernas. Recordemos la importancia fundamental del infinito como concepto matemático desde la perspectiva histórica y epistemológica y para la formación de diversas disciplinas durante el siglo XIX y los comienzos del siglo XX. En este caso, el análisis nos muestra que es imposible aislarlo de otros conceptos que aparecen en las salas de clases universitarias (Weyl, 1949).

Concluimos, además, que para lograr una comprensión adecuada del infinito matemático debemos reconocer estos modelos en el razonamiento de los estudiantes, y como profesores, tenemos la posibilidad de diseñar actividades que conduzcan a los estudiantes a reconocerlos y a superarlos. Argumentamos que la incorporación de las reflexiones que se derivan de esta investigación podrían, potencialmente, transformar positivamente nuestra práctica como docentes universitarios. Este tipo de estudios nos permitiría poner atención y reflexionar sobre la inconsistencia de nuestros propios procesos de pensamiento e intuiciones en relación con éste y otros conceptos matemáticos, al mismo tiempo que nos permite validar estas inconsistencias, al comprender su epistemología, así como nuestras limitaciones motosensoriales, determinadas por las características de nuestros cerebros.

ACLARATORIAS

Las autoras no tienen conflictos de interés para declarar. El artículo ha sido financiado con recursos propios de las autoras.

REFERENCIAS

Aristóteles. (1985). *The complete works of Aristotle* (Oxford, trad.; J. Barnes, ed.). Princeton University Press.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (1999). Lo veo, pero no lo creo: obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación Matemática*, *11*(1), 5-24.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, *16*(2), 5-20.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios de cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico* (J. Babini, trad.). (23a. ed.). Siglo Veintiuno Editores. (Original publicado en 1938).

Bagni, G. T. (2004). Exhaustion argument and limit concept in the History of Mathematics: educational reflections. En F. Furinghetti, S. Kaiser, & A. Vretblad. (Eds.), *Proceedings of HPM 2004 - History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 94-103). Uppsala.

Belmonte, J. L., & Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 139-171.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito*. Universidad Nacional Autónoma de México.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problémes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. (6ta. ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203029053

D'Amore, B. (2011). La didáctica del infinito matemático. En AA. VV., *Memorias del XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística* (pp. 21-29). Universidad Distrital, Nacional y Pedagógica de Bogotá.

D'Amore, B., & Martini, B. (1997). Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. *Números*, (32), 26-32.

Díaz-Chang, T., & Arredondo, E-H. (2021). Del infinito potencial al actual: un recorrido histórico a través de la metáfora conceptual. *Revista Paradigma*, *42*(1), 106-132. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p106-132.id992

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 335-359. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Ewald, W. B. (1996). *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of Mathematics*. Oxford University Press.

Fernández, E., & Solano, I. (2005). Sobre la divisibilidad hasta el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, *Volumen Extra*, 1-4.

Fischbein, E. (1987). *Intuitions in Science and Mathematics*. Reidel Publ. https://doi.org/10.2307/3619981

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 309-329. https://doi.org/10.1023/A:1016088708705

Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: the role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, *22*(3), 455-479. https://doi.org/10.1080/02643290442000310

Kihlstrom, J. F. (2018). Unconscious cognition. *Reference Module in Neuroscience and Biobehavioral Psychology*, 1-7. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-809324-5.21860-9

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Montoya-Delgadillo, E., Morales, A., & Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(3), 329-358. https://doi.org/10.12802/relime.13.1832

Moreno, L., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 211-231. https://doi.org/10.1007/BF00368339

Núñez, R. (2005). Creating mathematical infinities: metaphor, blending, and the beauty of transfinite cardinals. *Journal of Pragmatics*, *37*(10), 1717-1741. https://doi.org/10.1016/j.pragma.2004.09.013

Polanyi, M. (1958). *Personal knowledge: towards a post-critical philosophy*. University of Chicago Press. https://doi.org/10.7208/chicago/9780226232768.001.0001

Real Academia Española (2014). *Diccionario de la lengua española*. RAE.

Rosch, E., Thompson, E., & Varela, F. (1991). *The embodied mind: cognitive science and human experience.* MIT Press. https://doi.org/10.7551/mitpress/6730.003.0005

Tall, D. (1981). Intuitions of infinity. *Mathematics in School*, *10*(3), 30-33.

Tall, D. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 195-215.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1994). Comparing infinite sets: intuitions and representations. *Actas del PME*, *18*(4), 345-352.

Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Ediciones Fausto.

Weyl, H. (1949). *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton University Press. https://doi.org/10.1063/1.3066316

Cómo citar este artículo:
Díaz-Chang, T., & Arredondo, E-H. (2023). Aquiles, la tortuga y los modelos tácitos. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, *3*(1), e202301. https://doi.org/10.54541/reviem.v3i1.59