



Diseño de categorías de aprendizaje en matemáticas

Patricia **Camarena** Gallardo

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional
México

pcamarena@ipn.mx

Irma Patricia **Flores** Allier

Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas, Instituto Politécnico Nacional
México

ipfallier@hotmail.com

Resumen

El problema de investigación que se identifica es la falta de claridad de los conceptos semilla en el currículo de matemáticas en estudios de ingeniería, donde éstos no se explicitan, sin embargo, son la base para constituir a los conceptos científicos incluidos en las profesiones; se aborda específicamente el concepto semilla de la variación. El objetivo de investigación es construir de forma metodológica las categorías para el aprendizaje del concepto semilla de la variación. El proyecto se ubica en la línea de investigación de la Matemática Social y se fundamenta en la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. Los resultados llevan a construir cuatro categorías de la variación, tomando como eje rector a la modelación matemática: concepto de variable, concepto de función como modelo matemático, la predicción y el lenguaje variacional. De hecho, la variación aislada de una matemática contextualizada no tiene sentido.

Palabras clave: categorías, concepto semilla, matemática social, matemática en el contexto de las ciencias, modelación matemática, variación, matemáticas en contexto.

Introducción

En la formación de docentes de matemáticas se ha identificado la necesidad de que conozcan las investigaciones que se realizan en educación matemática y que tendrán una mejor formación si los profesores también realizan investigación educativa en matemáticas (Camarena,

2006). De esta forma, el presente reporte ofrece una metodología de investigación para el diseño de categorías de aprendizaje de conceptos matemáticos.

Para ello, se parte de la problemática detectada sobre el hecho de que los docentes de matemáticas en el nivel universitario, cuando imparten un curso por primera vez, enfrentan conflictos con el currículo de la profesión donde laboran, ya que los programas de estudio son una lista temática que cada quien interpreta según su personal punto de vista (Camarena, 2002). En particular, en matemáticas existen conceptos que subyacen implícitos en las temáticas curriculares y el docente requiere de experiencia en la disciplina y en la docencia para identificarlos. Uno de éstos son los llamados conceptos semilla, los cuales son la base para constituir a los conceptos científicos incluidos en las profesiones, es decir, los conceptos semilla son aquellos sobre los que giran los conceptos científicos y en muchas ocasiones subyacen de manera implícita (Camarena, 2010). Por ejemplo, un concepto semilla es la variación, la cual está inmersa en todas las asignaturas de la llamada matemática superior; si el estudiante no ha construido este concepto semilla, difícilmente podrá construir el conocimiento de los conceptos matemáticos que lo requieren.

Así, por la importancia de los conceptos semilla, que son conceptos que se localizan en el currículo oculto ya que en ningún programa de estudios están incorporados de forma explícita y se espera que el estudiante los domine, se hace necesario desarrollar trabajo de investigación encaminado a la construcción y evaluación de este tipo de conceptos. Por la extensión del trabajo, en este documento solamente se presenta la primera parte de una investigación en la línea de la Matemática Social, la cual corresponde a la metodología de construcción de categorías de aprendizaje para el concepto semilla de la variación; el resto de la investigación se aboca a la construcción de los identificadores e indicadores del concepto matemático y al diseño y evaluación de actividades de aprendizaje para el concepto semilla de variación, incluyendo los eventos contextualizados de la Matemática en Contexto.

Objetivo. El objetivo de la investigación, correspondiente a este reporte, es construir de forma metodológica las categorías para el aprendizaje del concepto semilla de la variación.

La línea de investigación de la Matemática Social, incluye una teoría educativa denominada Matemática en el Contexto de las Ciencias, sobre la cual se fundamenta la presente investigación.

Marco Teórico

La teoría educativa de la Matemática en el Contexto de las Ciencias nace en 1982 en el Instituto Politécnico Nacional (IPN) de México, ésta se enfoca a carreras universitarias en donde la matemática no es una meta por sí misma, es decir, donde no se van a formar matemáticos (Camarena, 1984; 1999; 2008; De Pavia, 2006; García, 2000; Muro, 2004; Muro *et al.*, 2002; Olazábal, 2003; Trejo, 2005). La Matemática en el Contexto de las Ciencias reflexiona acerca de la vinculación de la matemática con otras ciencias, con situaciones profesionales y laborales, así como con actividades de la vida cotidiana. Se quiere construir en el estudiante una matemática para la vida, es decir, una matemática que lleve al individuo a actuar de forma razonada, lógica, analítica, tomando en cuenta todas las variables que afectan los problemas y situaciones que se le presentan en su actividad laboral y profesional, así como en su vida diaria (Camarena, 1984).

La teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias concibe al ambiente de aprendizaje como un sistema en donde hacen presencia las cinco fases de la teoría: fase

cognitiva, desarrollada desde 1992, la fase didáctica que se establece desde 1987, la fase curricular, cuyo origen es de 1982, la fase epistemológica que se aborda desde 1988 y la fase docente definida desde 1990, ver la figura 1. Además, toma en cuenta que las cinco fases se encuentran inmersas en un sistema complejo donde interactúan entre sí cada una de ellas, además de no estar aisladas las unas de las otras. El supuesto filosófico educativo de la teoría es que el estudiante esté capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se vean favorecidas, porque se pretende contribuir a la formación integral del estudiante (Camarena, 1987, 1990).

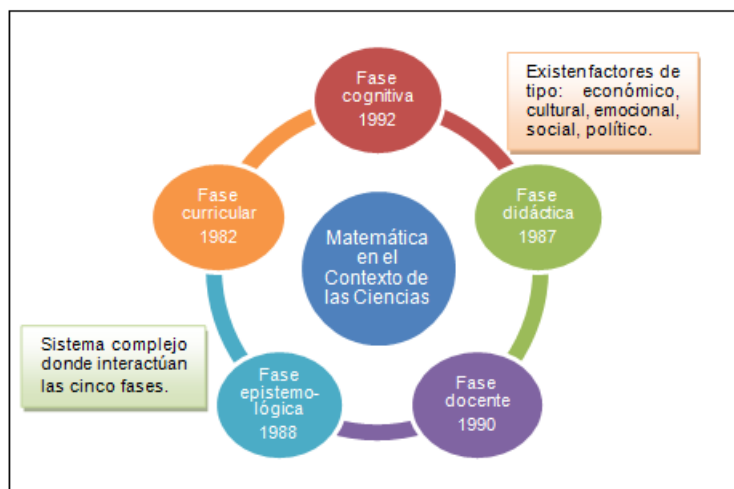


Figura 1. Fases de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias.

Como teoría, en cada una de sus fases se incluye una metodología con fundamento teórico, acorde a los paradigmas en los que se sustenta, donde se guían los pasos para el diseño curricular, se explica el funcionamiento cognitivo de los alumnos cuando trabajan una matemática contextualizada y se proporcionan elementos epistemológicos acerca de los saberes matemáticos vinculados a las actividades de los profesionistas, se describe la didáctica a seguir la cual emplea eventos contextualizados, entre otros (Camarena, 1984, 1987, 1990, 1999). La presente investigación incide en la fase epistemológica de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, la cual se describe brevemente a continuación.

Fase Epistemológica

Entre muchas otras investigaciones, en la fase epistemológica se muestra que así como los contextos de otras ciencias le dan sentido y significado a la matemática, ésta, le da sentido y significado a los temas y conceptos de las ciencias del contexto, reconceptualizándolos (Muro, 2002; Camarena, 1987).

En la fase epistemológica se han llevado a cabo investigaciones que han verificado cómo gran parte de la matemática que se incluye en los cursos de áreas de ingeniería nace en el contexto de problemas específicos de otras áreas del conocimiento y a través del tiempo pierden su contexto para ofrecer una matemática "pura" que es llevada a las aulas de clases sin que tenga sentido para los estudiantes que no van a ser matemáticos (Camarena, 2008).

Por otro lado, hay situaciones donde el ingeniero emplea procesos o métodos sin conocer su origen, la fase epistemológica de la Matemática en el Contexto de las Ciencias pone a la luz

estas génesis (Camarena, 1987), como el caso de las impedancias complejas en circuitos eléctricos.

En esta fase, también se ha determinado un constructo teórico denominado transposición contextualizada; en donde la matemática que han aprendido los estudiantes en la escuela sufre transformaciones para adaptarse a la forma de trabajar de otras ciencias (Camarena, 2001), como el caso de la delta de Dirac para modelar una señal eléctrica impulsiva. Es más, así como existe la transposición didáctica (cuya intención es la enseñanza), la cual modifica el saber científico al saber a enseñar (Chevallard, 1991), también existe la transposición contextualizada (cuya intención es la modelación matemática), la cual es un constructo teórico que modifica este saber a enseñar a un saber de aplicación (Camarena, 2001), como se muestra en la figura 2.

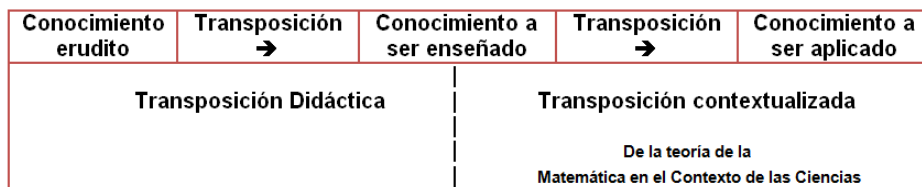


Figura 2. Transposiciones.

Como parte de esta etapa se cuenta con una serie de situaciones de matemática contextualizada para ser usadas en clase, como el curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en el contexto de los Circuitos Eléctricos (Camarena, 1987), Cálculo Vectorial en el contexto de la Teoría Electromagnética (Ongay, 1994), Análisis de Fourier en el contexto del Análisis de Señales Electromagnéticas (Camarena, 1993), Ecuaciones Diferenciales Parciales en el contexto de la cuerda vibrante (Camarena, 2004), Transformada de Laplace en el contexto de los Circuitos Eléctricos (Suárez, 2000), Serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa (Muro, 2002), etc.

Los obstáculos epistemológicos, como han sido definidos por Brousseau (1983), se identifican en esta fase para ser usados en la planeación didáctica de los cursos, a través del diseño de actividades de aprendizaje que ayuden a enfrentar estos obstáculos.

Otra vertiente de la fase epistemológica de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias es el análisis de los conceptos científicos desde diversas perspectivas, como el caso que ocupa esta presentación, donde se describen las categorías, identificadores e indicadores de un concepto para el aprendizaje y la posterior evaluación de éste.

Metodología

La metodología de investigación es de tipo documental donde la muestra de estudio son investigaciones en el área de educación matemática que inciden en el concepto de variación.

El método de trabajo es uno de los proporcionados en la fase epistemológica de la teoría de la Matemática en el contexto de las Ciencias, donde depende de qué se busca para saber con qué ojos mirar los documentos, en este caso se trata de ir agrupando los elementos que se han identificado en investigaciones, como son los que ayudan a la construcción del concepto, considerando semejanzas y diferencias para formar agrupaciones y luego con éstas, formar categorías.

Una categoría se forma con palabras tipo y símbolos que describen propiedades del concepto, donde estas palabras o símbolos son los representantes de la categoría. Luego se

emplea el método de reducciones comparativas, comparar las categorías formadas y reagrupar algunas de éstas y así sucesivamente. A medida que el proceso continúa, las categorías se hacen más explícitas, produciendo reducciones en el número de categorías. El proceso de agrupación de datos termina cuando todas las categorías representan diferentes propiedades del concepto, entonces se dice que se llega a una fase de saturación, ésta se alcanza cuando los datos no sugieren nuevas categorías y entonces se considera que la investigación es teóricamente estable (Glaser y Strauss, 2006).

La muestra está formada por investigaciones que son reportadas en revistas, tesis y reportes institucionales de investigación.

De las revistas se tomó la más antigua dedicada a publicar artículos de investigación en educación matemática, del nivel superior: "Educación Matemática" de la Editorial Santillana.

Las tesis se buscaron en las dos instituciones que se dedican a posgrados de maestría y doctorado en educación matemática, del nivel superior: el Cinvestav y el Cicata, ambos del Instituto Politécnico Nacional de México.

De los reportes de investigaciones se tomaron tres referencias, una nacional y dos internacionales: Los estados del conocimiento en educación matemática de la última década del Consejo Mexicano de Investigación Educativa COMIE (2013), los reportes del International Group for the Psychology of Mathematics Education y los trabajos de la Red Internacional de Investigación en Matemática en el Contexto de las Ciencias (MaCoCiencias).

En las tres fuentes citadas se identificaron aquellos documentos que abordan el aprendizaje del concepto de variación ya sea de forma explícita o implícita, este último caso se identifica cuando el autor aborda los conceptos que están íntimamente relacionados con este concepto semilla, como son las funciones, tanto de una como de varias variables y toda operación matemática que se realiza con éstas.

Resultados

Se inicia con la búsqueda de elementos que ayudan a la construcción del concepto de la variación, en los documentos citados en la muestra. A continuación se presentan algunos ejemplos de los resultados.

- La noción de variable se construye en forma relacional, es decir, se requiere de establecer relaciones primarias entre objetos o procesos cambiantes. La idea de variable deriva de acciones y experiencias en donde hay que establecer relaciones y comparaciones, en donde el tiempo juega un papel importante (Gómez, 2007).

- Usos de la variable en el contexto escolar: como incógnita, como número generalizado y como relación funcional (Ursini, 1994).

- La necesidad de utilizar símbolos, por parte de los estudiantes, para generalizar una relación entre cantidades y expresar esa generalización en lenguaje formal, favorece el tránsito de la aritmética al álgebra de manera menos difícil, además de contribuir de esta manera a desarrollar la comprensión de la noción de variable (Kieran *et al*, 1990).

- Introducción de la noción de variable a través de patrones de exploración. La idea es, dado un modelo (gráfico, tabla de datos, etc.), los alumnos mediante la exploración, pueden determinar la regularidad que presenta el modelo haciendo una

descripción verbal de su comportamiento construyen su generalización empleando símbolos algebraicos (English *et al*, 1998).

Elementos asociados a la variación	Categorías incipientes
1. Variable	Variable
2. Proporcionalidad entre variables	Variable
3. Variables y constantes implícitas y explícitas	Contexto
4. Variar parámetros	Registros de representación
5. Identificar patrones en datos	Función
6. Identificar la variable dependiente e independiente	Función
7. Decir cómo varían las variables	Función
8. Dar sentido a las variables en el evento	Contexto
9. Transitar entre registros	Registros de representación
10. Predicción	Contexto
11. Exploraciones gráficas y numéricas	Registros de representación
12. Dado un modelo matemático identificar el tipo de fenómeno	Contexto y Actividades
13. Identificar y analizar el comportamiento de manera local y global de funciones para estudiar fenómenos que involucran cambio	Función
14. Comparar estados (seguidos e inicial y final)	Función
15. Lenguaje del cambio (cambió poco, cambió mucho)	Lenguaje
16. Tendencias en el comportamiento	Función

Figura 3. Categorías incipientes de elementos asociados a la variación.

A partir de los resultados se obtienen elementos relacionados con el concepto de variación: Variable, Proporcionalidad entre variables, Variables y constantes implícitas y explícitas, Variar parámetros, Identificar patrones en datos, Identificar la variable dependiente e independiente, Decir cómo varían las variables, Dar sentido a las variables en el evento, Transitar entre registros, Predicción, Dado un modelo matemático identificar el tipo de fenómeno, Identificar y analizar el comportamiento de manera local y global de funciones para estudiar fenómenos que involucran cambio, Comparar estados (seguidos e inicial y final), Lenguaje del cambio (cambio poco, cambio mucho), Tendencias en el comportamiento, ver primera columna de la figura 3.

Como se puede observar, de los resultados se identifica que dichos elementos son de diferente naturaleza, por lo tanto se procede a describir categorías incipientes, quedando las siguientes: Variable, Contexto, Registros de representación, Función, Contextos y actividades, Lenguaje, ver segunda columna de la figura 3.

Identificadores de la variación en la modelación matemática de eventos contextualizados
I. Identificación de lo que varía
II. Dependencia de un elemento asociado a otro
III. Concepción de variable
IV. Cómo varía una variable respecto a otra
V. Función
VI. Predicción
VII. Identificadores de la modelación matemática
i. Identificar variables y constantes del problema, se incluye la identificación de lo que varía y lo que permanece constante, ya sea de forma implícita o explícita.
ii. Establecer relaciones entre éstas a través de los conceptos involucrados en el problema, implícita o explícitamente, ya sean del área de la matemática o del contexto.
iii. Validar la "relación matemática" que modela al problema, para lo cual hay que regresarse y verificar que involucre a todos los datos, variables y conceptos del problema. Dependiendo del problema, algunas veces se puede validar el modelo matemático a través de ver si la expresión matemática predice la información otorgada o la información experimental. En otros casos, para validar el modelo, es necesario dar la solución matemática para ver que se predican los elementos involucrados.

Figura 4. Identificadores de la variación en la modelación matemática.

La literatura revisada proporciona elementos específicos del concepto de variación, pues cada una de las investigaciones incide en un aspecto de éste, a excepción del trabajo "Epistemología de lo variacional" (Camarena *et al*, 2012) de la Red MaCoCiencias, donde trabajan la matemática en contexto, el cual posee un enfoque hacia la modelación matemática, razón por la cual se decidió analizarlo por separado. Los autores de "Epistemología de lo variacional" mencionan que para conocer la naturaleza de la variación en la modelación matemática de procesos dinámicos, es necesario tomar en cuenta desde las nociones embrionarias del concepto de variación con un enfoque matemático, que permita la identificación de los elementos que hacen presencia en procesos variantes inmersos en eventos contextualizados, con ello definen identificadores de la variación en la modelación matemática, como se muestran en la figura 4.

Luego, se procede a efectuar un contraste entre las categorías incipientes y el estudio sobre "Epistemología de lo variacional". Este análisis comparativo, consistió en identificar diferencias y similitudes (intersecciones) entre los resultados encontrados en ambos casos. Lo anterior con el propósito de identificar y unificar categorías. Para presentar la idea general del análisis comparativo, y hacer más explícito y detallado este análisis, ver figura 5, se describe brevemente los pasos de la secuencia realizada, ya que los posteriores son análogos.

TABLA COMPARATIVA			
1	3	concepto variable	1
2	4	conocimientos previos	
7	1	lo que varía	2
3,6,8	7	modelación matemática	3
4,9,11		registros representación	
5,13	8	identificación	
10	6	predicción	4
12		Modelo fenómeno	5
14	4	funciones	
16	5	concepto función	6
15		lenguaje	7
	2		
	patron	patrones	8

Figura 5. Tabla comparativa.

Respecto a la figura 5, en el primer renglón, se observan los números 1 y 3, los cuales corresponden al concepto de variable, de acuerdo a la numeración que aparece en las figuras 3 y 4, respectivamente. Éstos conforman la primera categoría asociada a la variación, identificada como "concepto de variable".

En el tercer renglón se aprecian los números 7 y 1, los cuales corresponden a cómo varían las variables y a la identificación de lo que varía, de acuerdo a la numeración que aparece en las figuras 3 y 4, respectivamente. Éstos constituyen la segunda categoría asociada a la variación, señalada como "identificación de lo que varía". Como se mencionó anteriormente, los demás renglones son analizados e interpretados de manera análoga.

A partir del contraste de resultados realizado anteriormente, se lograron identificar ocho categorías asociadas a la variación, ver figura 6.

Primera identificación de categorías asociadas a la variación
1. Concepto de variable
2. Identificación de lo que varía
3. Modelación matemática y sus identificadores
4. Predicción
5. Dado un modelo, identificar el tipo de fenómeno asociado
6. Manejo conceptual de función
7. Lenguaje de la variación y el cambio
8. Patrones

Figura 6. Primeras categorías de variación.

Una vez ya señaladas las categorías asociadas a la variación, se procedió a establecer una caracterización de identificadores e indicadores del concepto variación. Durante la realización de este proceso, se empezaron a tener diversos problemas, pues la información que se iba obteniendo, de acuerdo a cada categoría, resultó ser bastante amplia y en varias ocasiones repetitiva, es decir, se apreciaba que en más de una categoría aparecían repetidos (implícitamente y explícitamente) identificadores e indicadores. Además, éstos se percibían de manera integrada, pues era prácticamente imposible enfocarse exclusivamente a un indicador sin incidir en otros indicadores.

Estas condiciones dan cuenta de que es necesario reconocer que la información con la que se está trabajando es bastante delicada, en el sentido de que las categorías establecidas resultaron, de una u otra manera, estar íntimamente relacionadas una con otras y que difícilmente se podrían estudiar por separado. Precisamente, a partir de este momento, todo el estudio realizado anteriormente, empezó a evidenciar las deficiencias que tenía la primera identificación de categorías. Situación por la cual se analizó de manera puntual dicha identificación y posteriormente se volvió a estructurar. A continuación se presentan las acciones realizadas y los resultados obtenidos.

Con base en los resultados del análisis de la identificación de las categorías, de manera específica a las intersecciones que se observaron entre las categorías al querer establecer los identificadores, se procedió a articular aquellas que más se relacionaban entre sí, obteniendo como resultado una primera reducción de categorías, ver figura 7, que consta de 5 categorías asociadas a la variación.

Reducción de categorías asociadas a la variación
1. Concepto de variable
2. Manejo conceptual de función
3. Predicción
4. Lenguaje <u>variacional</u>
5. Modelación matemática

Figura 7. Primera reducción de categorías.

De acuerdo a la reducción se establecieron de nuevo identificadores e indicadores asociados a la variación en cada una de las categorías. Sin embargo, en esta ocasión, se percibió que los identificadores de las categorías: concepto de variable, manejo conceptual de función y predicción, están muy relacionados (intersecciones) entre sí. Lo anterior, en el sentido de que al estudiar por separado cada una de las categorías y mantener constantes las demás, la estudiada se ve también influenciada y afectada por ellas, motivo por el cual al querer estudiarlas como ajenas entre sí se presentan problemas de incongruencia.

Identificadores de la modelación matemática	Categoría de influencia
Identificar variables y constantes del problema, se incluye la identificación de lo que varía y lo que permanece constante, ya sea de forma implícita o explícita.	Concepto de variable
Establecer relaciones entre éstas a través de los conceptos involucrados en el problema, implícita o explícitamente, ya sean del área de la matemática o del contexto.	Manejo conceptual de función
Validar la "relación matemática" que modela al problema, para lo cual hay que regresarse y verificar que involucre a todos los datos, variables y conceptos del problema.	Predicción

Figura 8. Categorías de mayor influencia en los identificadores de modelación matemática.

Además, los identificadores de las categorías: concepto de variable, manejo conceptual de función y predicción, están fuertemente asociados a los indicadores de la categoría modelación matemática. Esto último se menciona, ya que al realizar un análisis, de tipo comparativo entre los identificadores de la modelación matemática y las categorías anteriores, se observaron ciertas conexiones. Es decir, que dichos identificadores están fuertemente influenciados por el concepto de variable, el manejo conceptual de función y la predicción, tal y como se indica en la figura 8.

Es importante mencionar que en el análisis realizado se observa que las demás categorías también ejercen influencia en los identificadores, aunque en menor grado. Por ejemplo, en el primer identificador de la modelación matemática, de manera implícita, la noción de predicción entra en juego al momento de discriminar entre lo que varía y lo que permanece constante, ya que permite reconocer que de la gran cantidad de variables vinculadas con el fenómeno, sólo un subconjunto de ellas serán consideradas variables y al resto, se les asumirá constantes, pues la ausencia de su variación no se considera que contribuya significativamente en la predicción buscada.

Por otra parte, con respecto al segundo identificador, el análisis permite vislumbrar, que para los fines perseguidos por el presente estudio, no interesa considerar todo el contenido asociado al concepto función, ya que por ejemplo, abordar aspectos referentes a su definición conjuntista, carecería de poco interés y significado en el desarrollo del concepto y lenguaje variacional. Esta idea, es fuertemente apoyada por Posada *et al* (2006), quienes señalan que como la definición conjuntista de función no depende de los elementos pertenecientes a los conjuntos que la determinan, siempre y cuando la regla de correspondencia cumpla la condición dada, desaparece la importante idea de ver en este concepto un objeto matemático que atrapa la variación y el cambio, es decir, como un modelo matemático.

En este mismo sentido, lo relacionado al estudio del concepto de función se desarrollará apelando a la noción de variación y en consecuencia a mirarlo como un modelo matemático con sentido dinámico, que permita su uso para matematizar el evento que invariablemente posee variación. De esta manera, la categoría, manejo conceptual de función, adopta un nuevo enfoque y es vista desde una perspectiva variacional, entendiéndola en un primer momento como un modelo matemático (sentido dinámico), y desde allí construir puentes que permitan entenderla como un objeto matemático analítico (sentido estático).

Así, eliminando aspectos que no interesaban del concepto función y entendiendo dicho concepto desde una perspectiva variacional, la segunda categoría es examinada y reformulada,

quedando finalmente como: "El concepto de función como modelo matemático desde una perspectiva variacional".

Con base en los resultados del análisis realizado, de manera específica tomando en cuenta las conexiones y relaciones presentes entre los identificadores de la modelación matemática y las categorías: concepto de variable, el concepto de función como modelo matemático desde una perspectiva variacional y la predicción, se tomó la decisión de ya no considerar a la modelación matemática como una categoría, sino como el eje central de estudio, más aún es considerado como aquella práctica (actividad) que norma las acciones (actividades) asociadas al desarrollo del concepto y lenguaje variacional.

Además, el proceso de modelación matemática consta de tres momentos (Camarena, 2009), conformados por sus respectivos identificadores, los cuáles son puestos en sintonía con las categorías: concepto de variable, el concepto de función como modelo matemático desde una perspectiva variacional y la predicción. También se identifica que el lenguaje variacional está presente y vinculado en cada uno de los momentos de dicho proceso.

En función de la modelación matemática de la figura 4, se procedió a identificar y reducir categorías, obteniendo los conceptos, procesos variantes o nociones embrionarias asociadas al concepto de variación, tomando como eje rector a la modelación matemática. En la siguiente figura 9, se puede apreciar la reducción final de las categorías establecidas.

La modelación matemática
I. Concepto de variable
II. El concepto de función como modelo matemático
III. Predicción
IV. Lenguaje variacional

Figura 9. Categorías de variación, con eje rector la modelación matemática¹.

Conclusiones

A través del desarrollo de la investigación se puede ver que la variación está totalmente relacionada con la modelación matemática de eventos contextualizados, su estudio aislado de una matemática contextualizada no tiene sentido.

Finalmente, este reporte da a conocer el proceso metodológico seguido para establecer las categorías de un concepto semilla con la línea de pensamiento de la teoría de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* dentro de la Matemática Social, una matemática con sentido y utilidad para la sociedad.

Es más, el desarrollo de habilidades para la matematización de lo variacional se correlaciona con las habilidades para la modelación matemática de eventos contextualizados y viceversa. Con lo cual se implica que el desarrollo de las habilidades de modelación matemática de eventos contextualizados permite la construcción del concepto semilla de la variación.

Concluyendo con la descripción del proceso metodológico, se puede decir que para el diseño de categorías de aprendizaje, se requieren tomar en cuenta las investigaciones en educación matemática que se han realizado en torno al concepto a trabajar, y para dejar bien establecidas las categorías (o reducciones de categorías) de aprendizaje de conceptos

¹ Se agradece la participación activa del estudiante Edwin Ríos Briceño de la Universidad Autónoma de Yucatán, quien realizó una estancia de investigación en el Verano de la Investigación de la Academia Mexicana de Ciencias.

matemáticos, es necesario, tomar en cuenta tanto los identificadores como indicadores del aprendizaje del concepto.

Referencias y bibliografía

- Brousseau G. (1983). Obstacles épistémologiques de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2).
- Camarena Gallardo, P. (1984). El currículo de las matemáticas en ingeniería. *Memorias de las Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN*, México.
- Camarena Gallardo, P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. México: Editorial ESIME-IPN.
- Camarena Gallardo, P. (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*. México: Editorial ESIME-IPN.
- Camarena Gallardo, P. (1993). *Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas*. México: Editorial ESIME-IPN.
- Camarena Gallardo, P. (1999). Reporte de proyecto de investigación titulado: *Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería*. Registro: CGPI-IPN 990413. México: Editorial ESIME-IPN.
- Camarena Gallardo, P. (2001). *Las Funciones Generalizadas en Ingeniería, construcción de una alternativa didáctica*. Colección Biblioteca de la Educación Superior, Series Investigación, Editorial ANUIES, México.
- Camarena Gallardo, P. (2002). Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería. *Revista Innovación Educativa*, 2(10), 22-28, primera parte y 2(11), 4-12 segunda parte.
- Camarena Gallardo, P. (2004). Reporte de proyecto de investigación titulado: *La matemática en el contexto de las ciencias: las competencias profesionales*, Registro: CGPI-IPN 20040434. México: Editorial ESIME-IPN.
- Camarena Gallardo, P. (2006). La Matemática en el Contexto de las Ciencias en los retos educativos del Siglo XXI. *Revista Científica: The Mexican Journal of Electromechanical Engineer*, 10(4), 167-173.
- Camarena Gallardo, P. (2008). Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. *Actas del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 83-107). Conferencia Magistral, Perú.
- Camarena Gallardo, P. (2010). Reporte técnico de investigación titulado: *Procesos metodológicos que identifican competencias matemáticas*. Registro: SIP-IPN 20090244. México: Editorial ESIME-IPN.
- Camarena Gallardo, P. y Flores Allier, I. (2012). Epistemología de lo variacional. *Memorias del XIII Simposium Internacional: Aportaciones de las Universidades a la Docencia, la Investigación, la Tecnología y el Desarrollo*. México.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. El saber sabio al saber enseñado*. Aique Grupo Editor S. A.
- COMIE (2013). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México*. Coordinadores: Carrasco A, Gómez A, Guerra T, López G, Ramírez J. COMIE-

ANUIES

- De Pavia I. P. (2006). *Desarrollo de habilidades del pensamiento para la matemática en el contexto de las ciencias* (Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.
- English, L., & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teacher*, 1(2), 166-170.
- García G. L. (2000). *Nociones contextualizadas de las series en ingeniería* (Tesis de Maestría en Ciencias con Orientación en Enseñanza de la Matemática). Coordinación de Investigación y Postgrado de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.
- Glaser B., & Strauss A. (2006). *The Discovery of grounded Theory: strategies for qualitative research*. New York, USA: Aldine de Gruyter.
- Gómez J. (2007). *La construcción de la noción de variable* (Tesis de doctorado no publicada). Cinvestav-IPN, México.
- Kieran, C., Booker, G., Filloy, E., Vergnaud, G., & Wheeler, D. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. En P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 96-112). Cambridge, USA.: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Muro Urista. C. (2004). *Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia de masa* (Tesis de Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa). Instituto Politécnico Nacional, México.
- Muro Urista, C., & Camarena Gallardo, P. (2002). La serie de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa. *Revista "Científica" The Mexican Journal of Electromechanical Engineering*, 6(4), 159-163.
- Olazábal, A. M., & Camarena Gallardo, P. (2003). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico de la matemática en contexto*. Memorias del Congreso Nacional de Profesores de Matemáticas, México.
- Ongay, F. (1994). *Apuntes de un curso de Cálculo Vectorial en el contexto de la Teoría Electromagnética*. Inéditos.
- Posada F., & Villa, J. (2006). *El razonamiento algebraico y la modelación matemática*. Recuperado el 24 de julio de 2012
http://funes.uniandes.edu.co/1770/1/capitulo_proyantioqu.pdf
- Suárez Bueno, V., & Camarena Gallardo, P. (2000). La transformada de Laplace en el contexto de la ingeniería. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13, 124-130. República Dominicana.
- Trejo, E. (2005). *La Ecuación Diferencial en el Contexto de las Reacciones Químicas de primer Orden* (Tesis en Maestría en Orientación Educativa). Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.
- Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Revista Educación Matemática*, 6(3), 90-108.