XIV CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Interamerican Conference on Mathematics Education
2015
3-7 mayo
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México

Alguns Exemplos da Relação entre o Pensamento Matemático Avançado e as Ideias de Fischbein

William **Vieira**
Instituto Federal de São Paulo – IFSP (*campus* São Roque) e Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil
wvieira@yahoo.com
Vera Helena Giusti de **Souza**
Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil
verahgsouza@gmail.com
Roberto Seidi **Imafuku**
Instituto Federal de São Paulo – IFSP (*campus* Bragança Paulista) e Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil
robertoseidi@yahoo.com.br

Resumo

Apresenta-se nesse artigo uma argumentação qualitativa e de caráter teórico que pretende mostrar a relação entre as ideias de Efraim Fischbein sobre a interação entre aspectos formais, algorítmicos e intuitivos e os processos relativos ao desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, segundo as posições de David Tall e Tommy Dreyfus. A partir dos principais conceitos e ideias relacionados a essas teorias, traça-se um paralelo entre elas, no qual é possível observar uma integração que possibilita uma aplicação compartilhada desses conceitos e ideias na interpretação de processos de aprendizagem, principalmente no Ensino Superior. Exibe-se também alguns exemplos para ilustrar a argumentação feita.

Palavras chave: Pensamento Matemático Avançado. Aspecto Intuitivo. Aspecto Formal. Aspecto Algorítmico.

Procuramos mostrar neste artigo como os processos relativos ao Pensamento Matemático Avançado (Dreyfus, 1991) e a interação entre aspectos intuitivos, formais e algorítmicos colocados por Fischbein (1994) estão inter-relacionados quando do desenvolvimento da instrução matemática de um sujeito. Na primeira parte, apresentamos as ideias e conceitos gerais dessas abordagens teóricas; na segunda parte analisamos algumas das inter-relações possíveis em três situações específicas: a primeira no estudo de permutações dentro da Teoria de Grupos, a segunda em um problema da Geometria Plana que é resolvido a partir da Geometria Analítica e a última na análise de uma equação que é resolvida usando gráficos de funções.

Fundamentação Teórica

Em seu artigo *The psychology of advanced mathematical thinking* (1991), David Tall coloca em discussão aspectos psicológicos relativos ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado e suas influências e determinações na produção e no ensino da ciência matemática.

Dreyfus (1991) destaca que podemos caracterizar o pensamento matemático avançado como uma inter-relação entre alguns processos cognitivos como visualização, representação, classificação, indução, generalização, justificação, síntese e abstração.

Segundo Tall (1991), muitos dos processos do pensamento matemático avançado já aparecem nos anos iniciais de ensino, onde se pode encontrar até mesmo os níveis de justificação; entretanto, nessa fase, o pensamento elementar é o que tem o grande papel e este não inclui os processos de abstração, caracterizados principalmente pelo estabelecimento de definições formais e pelo uso da lógica de deduções a partir dessas definições. Ele aponta também que a transição entre os níveis elementar e avançado é marcada pela mudança

> (...) do descrever para definir, do convencer para provar de uma maneira lógica com base nessas definições. (...) É a transição da coerência da Matemática elementar para a consequência da Matemática avançada (Tall, 1991, tradução nossa).

Esse processo de transição requer uma reconstrução cognitiva, que é enfrentada pelos estudantes durante os primeiros anos do Ensino Superior. Nesse sentido, Skemp (1971, apud Tall, 1991), observa que os métodos de ensino de disciplinas matemáticas na universidade tendem a apresentar aos alunos o produto final do pensamento matemático, ao invés dos processos do pensamento matemático. Assim, neste nível de ensino há uma supervalorização de processos de abstração e métodos dedutivos, em detrimento do desenvolvimento de processos heurísticos. Tall (1991) reforça que esta forma de apresentação do conhecimento matemático não cumpre o papel de dar ao estudante todo o poder do pensamento avançado, na sua multiplicidade de processos e abordagens; além disso, reitera o autor, a lógica de apresentação normalmente não está adequada ao nível de desenvolvimento cognitivo dos aprendizes, o que acarreta no desenvolvimento de obstáculos cognitivos, fruto do conflito entre o conhecimento estruturado das disciplinas universitárias e aqueles trazidos pelos alunos. Estes conflitos têm, em grande medida, sua origem na não diferenciação entre a definição formal dos conceitos matemáticos e os processos cognitivos pelos quais estes conceitos são construídos.

De acordo com Tall (1991), o conhecimento matemático deve ser abordado a partir de estratégias que privilegiem a estrutura do conhecimento e o processo de pensamento dos estudantes, pois, segundo ele, para que os estudantes atinjam os mais altos níveis do pensamento matemático, devem adquirir *insights* dos métodos e processos da Matemática avançada, mas por caminhos que respeitem a transição de seus processos de pensamento. Por exemplo, em Matemática, ao contrário das ciências naturais, só temos acesso aos conceitos e objetos por meio de suas representações; por isso, o processo de representação desempenha papel central no desenvolvimento do pensamento matemático e deve ser considerado em todas as suas possibilidades, quando ensinamos um novo conceito. Ora, uma das representações possíveis para todo conceito matemático é o símbolo associado ou atribuído a ele: essas representações simbólicas são indispensáveis no desenvolvimento e no ensino da Matemática, entretanto elas trazem consigo um lado perigoso, que pode ter impactos bastante nocivos no processo de aprendizagem de novos conceitos, se não forem respeitados os processos de pensamento dos sujeitos.

Segundo Dreyfus (1991), os símbolos estão associados a signos (sinais) e a significados; eles tornam explícitos os significados do conhecimento implícito que um indivíduo tem sobre um dado conceito; contudo, para que um novo símbolo seja funcional, para que possa ser utilizado, é preciso que alguns significados associados ao conceito em questão sejam desenvolvidos, antes que o símbolo seja estabelecido, sob pena do estudante trabalhar com um símbolo que não possui qualquer significado para ele. Este autor reitera ainda que esse processo de articulação dos vários significados de uma noção, antes do estabelecimento do simbolismo associado a ela, é frequentemente negligenciado no ensino de Matemática.

Outro significado das representações, que desempenha um papel ainda mais decisivo no pensamento e no processo de aprendizagem da Matemática, é o conceito de representação mental. Ao discutir um conceito, procedimento ou noção matemática, cada um de nós relaciona a ideia em questão com algo que vem à mente: essa é a representação mental que temos de tal conceito. Dreyfus (1991) destaca a diferença entre as representações simbólicas e mentais e o papel que cada uma delas desempenha no processo de comunicação e entendimento do mundo por parte de um indivíduo.

> "Representar um conceito, então, significa gerar um caso, um espécime, um exemplo, uma imagem dele. Mas esta breve descrição é insuficiente para nós, porque não especifica se a ocorrência gerada é simbólica ou mental, nem indica o que "gerar" significa em termos de processos pelos quais as representações mentais vêm à tona e como elas se desenvolvem. Uma representação simbólica é exteriorizada de forma escrita ou falada, geralmente com o objetivo de tornar a comunicação sobre o conceito mais fácil. Uma representação mental, por outro lado, refere-se a esquemas internos ou sistemas de referências que uma pessoa usa para interagir com o mundo exterior. É o que ocorre na mente quando se pensa em uma parte específica do mundo exterior e pode variar de pessoa para pessoa" (Dreyfus, 1991, tradução nossa).

A visualização é um dos processos pelos quais as representações mentais podem passar a existir. Segundo Kaput (1987, apud Dreyfus, 1991), a geração de representações mentais depende dos sistemas de representação, de produções externas, concretas, que podem ser materialmente percebidas pelo sujeito. Dreyfus (1991) sustenta que as representações mentais são criadas com base nesses sistemas de representações concretas; ele aponta ainda que um sujeito pode criar, para certo conceito, uma única e simples representação, mas destaca que para ter sucesso na Matemática é necessário ter muitas representações mentais de um conceito e que essas representações precisam estar relacionadas a vários aspectos desse conceito.

Representações pobres, que articulem poucos elementos de um conceito, não conferem a flexibilidade necessária à resolução de problemas e podem ter impacto negativo no processo criativo do sujeito. Para Dreyfus (1991), essa é uma característica observável em muitos estudantes, que se manifesta na dificuldade em resolver problemas que trazem pequenas mudanças nas estruturas ou enunciados, possível reflexo da incapacidade de estabelecer articulações entre diversas representações de um conceito; como exemplo, cita que é comum que estudantes do Ensino Médio pensem somente em termos de fórmulas algébricas ao lidarem com funções, mesmo quando são capazes de dar uma definição em termos de relações entre conjuntos.

Nesse sentido, a situação desejada no processo de aprendizagem é aquela na qual várias representações de um mesmo conceito se complementam, podendo eventualmente se integrar em uma única representação do conceito. Essa situação pode ser melhor descrita como o desenvolvimento de várias representações inter-relacionadas, que são simultaneamente selecionadas e eficientemente mudadas, de acordo com o problema sobre o qual o sujeito se debruça (Dreyfus, 1991).

O processo de mudança entre representações é parte fundamental do processo de aprendizagem e deve ser aplicado e desenvolvido amplamente, pois é a familiaridade com este processo que trará a habilidade em resolver problemas; a existência de várias representações de um conceito não é suficiente para conferir um uso flexível e articulado deste conceito, é preciso saber transitar entre elas, de acordo com as situações que a resolução de um problema impõe. O processo de tradução, que está relacionado de forma estreita com o processo de mudança entre representações, diz respeito à reformulação de um problema ou proposição matemática em outro, de maneira a viabilizar ou facilitar a resolução do problema original (Dreyfus, 1991).

Fundamental para a aprendizagem matemática, o processo de representação está presente em todos os níveis do pensamento matemático, mesmo nos mais elementares; outros processos, contudo, são desenvolvidos a partir do refinamento das habilidades e experiências dos estudantes, que acontecem à medida que estes entram em contato com conteúdos matemáticos mais avançados. A generalização e a síntese são dois desses processos e, aliados ao processo de representação, constituem a base para o desenvolvimento da abstração, um dos principais objetivos no desenvolvimento do pensamento matemático avançado. Na atividade matemática, o processo de generalização consiste em deduzir ou induzir resultados gerais a partir de casos particulares e das características semelhantes identificadas, expandindo os domínios de validade das conclusões originais para contextos mais amplos; já o processo de síntese se refere à capacidade de combinar ou compor partes de maneira a formar um todo, uma entidade; contudo, este todo frequentemente agrega mais que a soma das partes que o compõem. Trata-se, de fato, de um processo que busca inter-relacionar resultados, ideias e algoritmos que foram aprendidos de maneira isolada, fragmentada e que ressurgem como fusão, mesclados em um novo resultado, um novo conhecimento, mais coeso e poderoso (Dreyfus, 1991).

Thurston (1990) destaca que as capacidades de generalização e síntese tornam a Matemática compressível e estão entre os grandes prazeres proporcionados por essa ciência.

> "Matemática é surpreendentemente compressível: você pode lutar muito tempo, passo a passo, trabalhar por algum processo ou ideia a partir de várias abordagens. Mas, assim que você realmente entendê-lo e adquirir uma perspectiva mental para vê-lo como um todo, muitas vezes acontece uma tremenda compressão mental. Você pode arquivá-lo, recuperá-lo de forma rápida e completa quando precisar dele, e usá-lo apenas como um passo em algum outro processo mental. A visão que se passa com essa compressão é uma das verdadeiras alegrias da Matemática" (Thurston, 1990, tradução nossa).

Este processo de compressão é irreversível e traz consigo uma questão relevante para o ensino da Matemática, pois “Depois de dominar os conceitos matemáticos, mesmo após grande esforço, torna-se muito difícil se colocar de volta no estado de espírito de alguém a quem eles são misteriosos” (Thurston, 1990, tradução nossa).

Dreyfus (1991) sustenta que o processo de síntese não costuma ser muito trabalhado na sala de aula; enquanto certos detalhes de um conceito são explicados em profundidade pelo professor e exercitados pelos estudantes, poucas atividades são destinadas para que os alunos sejam levados a elaborar sínteses entre os diferentes aspectos de um conceito ou entre conceitos, dentro de um campo de conhecimento. Embora bons professores realizem sumários e algumas sínteses durante os cursos que ministram, estabelecendo conexões e relações entre conceitos, essa atitude acaba deixando transparecer aos estudantes que a atividade de síntese é papel do matemático e nada tem de relação com os problemas que eles devem resolver. Essa característica fica evidente nos exercícios tradicionais que são propostos nos cursos, que não requerem qualquer necessidade de estabelecimento de relações entre conceitos e não fomentam processos de síntese.

O processo de abstração, talvez o principal objetivo a ser alcançado no desenvolvimento do pensamento matemático avançado, é um processo construtivo, que vai da compreensão das propriedades dos objetos matemáticos e das relações entre elas para a compreensão das estruturas dessas propriedades e relações; a construção dessa abstração pressupõe, assim, uma mudança no foco de atenção, que deve migrar dos objetos particulares para se concentrar em estruturas específicas e apropriadas das propriedades dos objetos e das relações entre estas (Dreyfus, 1991).

O psicólogo romeno Efraim Fischbein, em seu artigo *The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive componentes in a mathematical activity* (1994), coloca em discussão a necessidade da interação entre aspectos formais, algorítmicos e intuitivos ligados a qualquer conceito em Matemática, quando observamos um sujeito em atividade matemática. Estes são, segundo o autor, os três aspectos básicos a serem considerados quando tratamos a Matemática como uma atividade humana, feita por seres humanos.

Segundo Fischbein (1994), ao considerarmos a interação desses três aspectos, estamos olhando a Matemática como um processo criativo e não como um corpo de conhecimentos estruturado e já estabelecido. Atentar para este processo criativo significa entender essa ciência como uma atividade humana, que envolve momentos de iluminação, hesitação, aceitação e refutação. Essa perspectiva deve guiar nossas escolhas quando ensinamos Matemática, se desejamos que os estudantes sejam capazes, eles mesmos, de produzir afirmações matemáticas, construir provas e avaliar, formal e intuitivamente, a validade dessas produções. Discutimos a seguir cada um dos aspectos apontados por Fischbein (1994).

O aspecto formal refere-se aos axiomas, definições, teoremas e demonstrações. Estes elementos compõem, de fato, o núcleo das ciências matemáticas e precisam ser levados em conta quando analisamos o processo de criação matemático. Fischbein reitera que:

> “Axiomas, definições, teoremas e provas têm de penetrar como um componente ativo do processo de raciocínio. Eles devem ser inventados ou aprendidos, organizados, checados e usados ativamente pelo estudante” (Fischbein, 1994, tradução nossa).

Fischbein (1994) alerta também que o pensamento proposicional e o uso de construções hipotético-dedutivas não são adquiridos espontaneamente pelos jovens e que somente um adequado processo de ensino pode dar a esses elementos formais características verdadeiramente funcionais.

O aspecto algorítmico corresponde às técnicas e procedimentos de resolução. Esta componente também tem um caráter fundamental no processo de entendimento e criação, uma vez que apenas o conhecimento das estruturas formais (axiomas, definições, teoremas) não é suficiente para conferir habilidade em resolver problemas. Essas habilidades, sustenta Fischbein (1994), devem ser sistematicamente treinadas para que sejam adquiridas.

O aspecto intuitivo diz respeito a uma intuição cognitiva, um entendimento intuitivo, uma solução intuitiva. A intuição cognitiva é o que um sujeito considera autoevidente e não vê necessidade de prova ou justificação. Consideramos autoevidentes, para quase todos os sujeitos, afirmações do tipo "A parte é menor que o todo", "Uma série infinita tende ao infinito, pois somamos valores indefinidamente" ou "Se o termo geral de uma série tende à zero, então a série é convergente". Pela sua natureza, o conhecimento intuitivo exerce um papel coercitivo no raciocínio, definindo caminhos e estratégias para a resolução de problemas. Por vezes, isso se torna um facilitador do processo de conhecimento, se estiver de acordo com verdades logicamente justificáveis; em outros casos, torna-se um caminho para contradições e equívocos – como no caso das afirmações apresentadas neste parágrafo – e, desta forma, podem se configurar em dificuldades e obstáculos para o processo de aprendizagem (Fischbein, 1994).

Sobre o papel que o conhecimento intuitivo desempenha no processo de aprendizagem, Fischbein et al. (1981) alertam que:

> "O problema de identificar os vieses intuitivos naturais do aluno é importante porque afetam - às vezes de uma maneira muito forte e permanente – seus conceitos, suas interpretações, sua capacidade de compreender, de resolver e de memorizar em uma determinada área. Estamos naturalmente inclinados a manter interpretações que se adequam a esses vieses naturais e intuitivos, e esquecer ou distorcer aqueles que não se encaixam a eles" (Fischbein et al., 1981, tradução nossa).

Análise de Situações

Discutimos a seguir situações nas quais podemos observar a inter-relação entre os processos de desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado e a interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais relativos aos conceitos e ideias matemáticas envolvidos em cada uma delas.

Vamos considerar o exemplo do grupo de permutações de n objetos. Esta estrutura é frequentemente chamada de grupo simétrico de grau n e identificada pela notação (símbolo) S_n. Quando discutimos tal conceito, esse símbolo pode ser a representação mental de um indivíduo; contudo, há outras possibilidades. Um sujeito pode pensar nas simetrias possíveis de um quadrado, como na Figura 1.

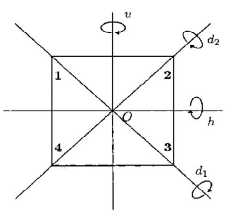

Figura 1. Simetrias do quadrado.

Outra alternativa seria pensar a representação de uma das simetrias do quadrado, como a rotação de 90^o no sentido horário, indicada na Figura 2.

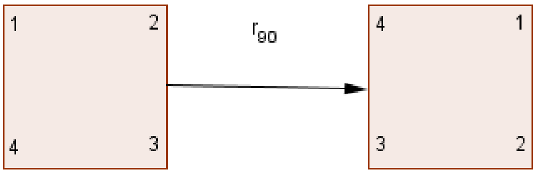

Figura 2. Representação gráfica da rotação de 90^o do quadrado.

Ainda trabalhando sobre a rotação de 90^o do quadrado, destacada na Figura 2, há representações algébricas (simbólicas), que traduzem outras representações mentais possíveis, como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 3. Representação simbólica da rotação de 90^o do quadrado.

Ou a representação $(1, 2, 3, 4)$, que usa a notação e o conceito de ciclos. Podemos ainda escrever:

$1 \rightarrow 2$ $\quad$ $2 \rightarrow 3$ $\quad$ $3 \rightarrow 4$ $\quad$ $4 \rightarrow 1$

Figura 4. Representação esquemática da rotação de 90^o do quadrado.

O esquema apresentado na Figura 4 também pode ser representado usando a notação de função: $r_{90}(1) = 2$; $r_{90}(2) = 3$; $r_{90}(3) = 4$; $r_{90}(4) = 1$, que destaca outro aspecto formal associado às permutações.

As representações das Figuras 1 e 2 envolvem aspectos intuitivos numéricos relativos às permutações, ao apresentar duas aplicações geométricas deste conceito; por outro lado, as representações $(1, 2, 3, 4)$, a notação de função e a da Figura 3 destacam aspectos formais (simbólicos) relacionados a este objeto matemático. Observe que a articulação entre as Figuras 2 e 3 pode proporcionar uma interação entre aspectos intuitivos e formais relacionados aos conceitos de rotação e permutação, o que possibilita uma ressignificação destas ideias.

O esquema da Figura 4 faz uma tradução esclarecedora com a notação de ciclos $(1, 2, 3, 4)$ e também tem papel importante no desenvolvimento de aspectos algorítmicos relacionados à composição de permutações (ou transformações do quadrado). Vejamos um exemplo dessa situação. Considere também a reflexão horizontal h do quadrado destacada na Figura 5, que na notação de ciclos se escreve $(1, 4)(2, 3)$.

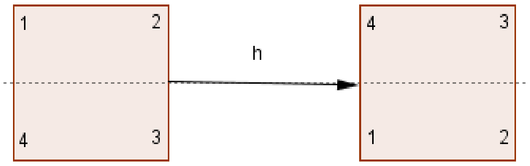

Figura 5. Representação gráfica da reflexão horizontal do quadrado.

Representada segundo o esquema da Figura 4, a reflexão horizontal se escreve

$1 \rightarrow 4$ $\quad 2 \rightarrow 3$ $\quad 3 \rightarrow 2$ $\quad 4 \rightarrow 1$

Figura 6. Representação esquemática da reflexão horizontal do quadrado.

Então, pergunta-se: *qual é a transformação resultante da composição da rotação de* 90^o *e da reflexão horizontal?* Essa questão se traduz na relação $r_{90} * h = (1,2,3,4) * (1,4)(2,3)$, que pode ser resolvida usando o esquema de setas destacado anteriormente e se traduz em um novo esquema, representado na Figura 7.

$1 \xrightarrow{h} 4 \xrightarrow{r_{90}} 1$ $\quad 2 \xrightarrow{h} 3 \xrightarrow{r_{90}} 4$ $\quad 3 \xrightarrow{h} 2 \xrightarrow{r_{90}} 3$ $\quad 4 \xrightarrow{h} 1 \xrightarrow{r_{90}} 2$

Figura 7. Representação da composição da rotação de 90^{o} e da reflexão horizontal do quadrado.

Essa composição resulta na transformação diagonal d_1, que pode ser representada de maneira resumida conforme a Figura 8.

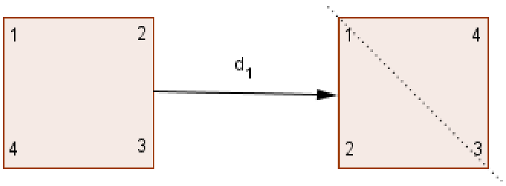

Figura 8. Representação gráfica da reflexão horizontal do quadrado.

O aspecto algoritmo da composição de permutações (transformações do quadrado) fica esclarecido a partir do esquema da Figura 7, que evidencia a ordem da operação composição, que parte da reflexão horizontal e segue para a rotação do quadrado. Entendemos que uma articulação adequada entre os aspectos algorítmicos destacados no esquema da Figura 7 e os aspectos formais da representação de composição de ciclos $r_{90} * h = (1,2,3,4) * (1,4)(2,3)$ pode facilitar a compreensão da composição de permutações, além de favorecer o processo de generalização dessa operação, a partir apenas da notação de ciclos. A mudança entre representações no caso particular das transformações do quadrado combinada às interações entre aspectos algorítmicos, intuitivos e formais relativos a essas transformações podem possibilitar que um sujeito generalize essas ideias para o grupo de permutações S_n.

Como segundo exemplo, vamos considerar o problema: *Verifique se, num triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa tem por medida a metade da medida da hipotenusa*.

Uma das possibilidades para a resolução dessa questão seria considerar um triângulo retângulo qualquer no plano cartesiano, como na Figura 9, determinar as coordenadas do ponto médio da hipotenusa $M = \left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$, calcular a medida da hipotenusa e a distância entre os pontos A e M e concluir que é verdadeira a afirmação do problema.

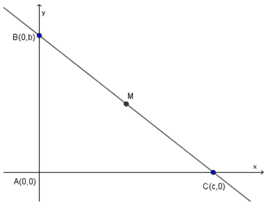

Figura 9. Triângulo retângulo BAC.

A mudança da Geometria Plana para a Geometria Analítica constitui uma tradução do problema para outra representação e possibilita uma abordagem que permite estabelecer a resolução do problema geométrico; no entanto, para que essa mudança entre representações (ou tradução) seja possível, é preciso que aspectos formais, algorítmicos e intuitivos relativos a conceitos centrais de Geometria Analítica estejam estabelecidos de forma clara para o sujeito. De fato, a resolução pressupõe a representação do triângulo retângulo com o ângulo reto em $A(0,0)$ e os demais vértices como $B(0, b)$ e $C(c, 0)$, o que evidencia uma interação entre aspectos intuitivos – no uso dessa representação específica – e aspectos formais – no uso das notações de pontos do plano; observa-se também que essa representação dos pontos faz uso do processo de generalização, ao indicar as coordenadas de forma genérica $(0, b)$ e $(c, 0)$, ao invés de valores particulares. Na determinação das coordenadas do ponto $M = \left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$, possivelmente aplicando o Teorema de Tales, aspectos formais e algorítmicos interagem fortemente. Por fim, aspectos algorítmicos novamente aparecem no cálculo das distâncias AM e CM, que possibilitam a resolução do problema.

Cabe destacar que, embora o sujeito precise ter um conhecimento amplo de Geometria Analítica, para lançar mão desse tipo de abordagem, essa não é a única condição para que o problema seja resolvido dessa maneira. O processo de tradução que faz migrar o problema da Geometria Plana para a Analítica precisa ser ensinado, sistematicamente trabalhado pelo professor, para que o aluno adquira essa postura de buscar articulações entre conhecimentos de campos distintos da Matemática, como uma estratégia para a resolução de problemas. O problema seguinte, aplicado para um estudante do 2º ano do Ensino Médio, busca elucidar essa questão.

Considere uma última situação estabelecida pelo problema: *Quantas soluções reais possui a equação* $3x = 2^x$?

Esse problema, cujas abordagens algébricas mais imediatas mostram-se bastante ineficazes, pode ser resolvido considerando os gráficos das funções $f(x) = 3x$ e $g(x) = 2^x$.

Em uma primeira tentativa, o aluno do 2º ano do Ensino Médio escolheu a resolução algébrica, que resultou infrutífera, conforme Figura 10. Neste caso, entram em ação aspectos algorítmicos e intuitivos, bastante desenvolvidos pela escola e fortemente arraigados nos estudantes, de lançar mão de técnicas algébricas na busca de soluções de equações, sem observar a estrutura da equação, antes de partir para uma resolução algébrica.

$$X = \frac{2^x}{3}$$

$$3 = \frac{2^x}{X}$$

$$3 = 2^x \cdot X^{-1}$$

Figura 10. Tentativa de solução algébrica apresentada por estudante do 2º ano do Ensino Médio.

Ao não obter sucesso com essa estratégia, o aluno vira-se para o pesquisador e lamenta: "Não consigo resolver". O pesquisador, então, apresenta uma motivação: "Por que você não tenta outra abordagem?". O aluno volta-se para o problema e, tomando uma iniciativa, diz: "Só se for chutando..." e apresenta as tentativas destacadas na Figura 11.

$x = 1$

$3 = 2$ (F)

$x = 2$

$6 = 4$ (F)

$x = 3$

$9 = 8$ (F)

$x = \frac{1}{2}$

$1,5 = \sqrt{2}$ (F)

$x = -1$

$-3 = \frac{1}{2}$ (F)

Figura 11. Tentativa de solução numérica apresentada por estudante do 2º ano do Ensino Médio.

Essa tentativa de solução numérica do problema reitera a força que aspectos algorítmicos e intuitivos, relacionados ao tratamento algébrico das equações, têm para o estudante, pois mesmo após ser motivado a tentar outra abordagem, permaneceu no campo algébrico.

Após as cinco tentativas exibidas na Figura 11, o estudante volta-se para os cálculos e comenta: "O x igual a 3 ficou mais próximo... mas não consigo resolver..."; vira-se para o pesquisador e diz: "Não é inteira a solução, né?" e, já respondendo à própria pergunta: "Ah! É número real, então pode ser número quebrado... mas acho que não consigo fazer essas contas com eles".

Ao perceber uma nova desistência do estudante, o pesquisador apresenta uma segunda motivação, dessa vez mais específica: "Por que você não tenta olhar como função?"; o aluno volta-se novamente para o problema e esboça os gráficos da Figura 12. Nesta situação, há uma interação entre aspectos intuitivos, relativos aos esboços grosseiros da representação com gráficos, e aspectos formais, relativos às funções, ao categorizá-las como função afim e função exponencial.

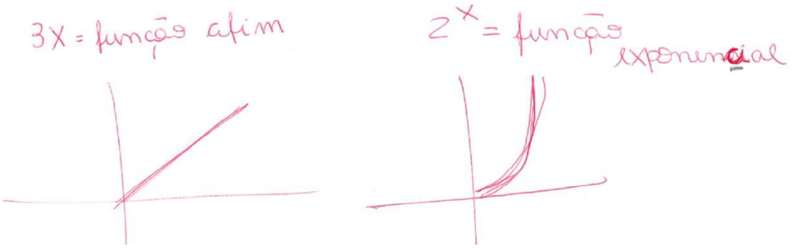

Figura 12. Esboços de gráficos apresentados por estudante do 2º ano do Ensino Médio.

Ao analisar os esboços feitos, o estudante refaz os gráficos com mais detalhes, como destacado na Figura 13 e após construir o esboço da função exponencial, percebe que deve desenhar os dois gráficos no mesmo sistema de coordenadas.

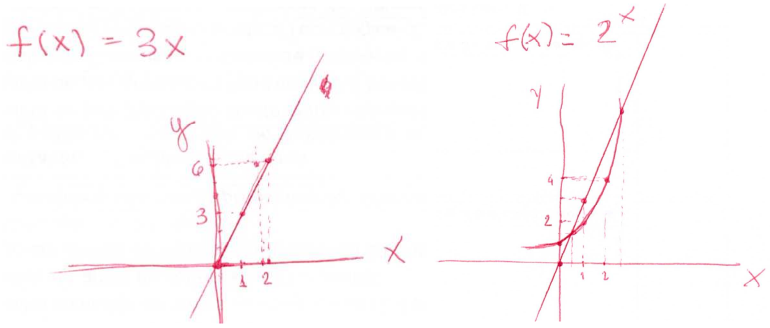

Figura 13. Solução apresentada por estudante do 2º ano do Ensino Médio.

Ao concluir o segundo gráfico, responde a questão para o pesquisador: "Tem duas soluções"; o pesquisador pergunta: "Por quê?" e o estudante responde: "Porque <u>as retas</u> se cruzam em dois lugares". O pesquisador intervém mais uma vez: "Mas os gráficos não vão se encontrar novamente?" e o estudante responde: "Não, porque essa reta (referindo-se ao gráfico de $f(x) = 3x$) vai se afastando cada vez mais pra cá (indica com o dedo na direção à direita do eixo y)". O pesquisador insiste: "E o outro gráfico?"; e o aluno responde: "Esse fica mais perto do y".

Nessas últimas construções, novamente aspectos intuitivos e formais interagem, como destacado nas construções da Figura 12 e há também uma forte presença de aspectos algorítmicos, na obtenção de pontos que permitem ao estudante construir um esboço "mais preciso" dos gráficos. A afirmação, por parte do aluno, de que há duas soluções pelo fato de "ver" a intersecção acontecer em dois pontos, mostra uma forte presença de aspectos intuitivos na obtenção da resposta, uma vez que não usa um argumento formal para sustentar sua posição; embora o estudante tenha mostrado uma boa articulação entre aspectos formais, algorítmicos e intuitivos, no trabalho com as funções, é possível observar confusões de natureza formal, como na referência ao gráfico da função exponencial como reta ou na própria afirmação de que existem duas soluções, porque "vê" duas intersecções no esboço feito e não argumenta sobre outras possíveis intersecções fora do trecho visto.

Observe que a solução da equação original, neste caso, pode ser obtida a partir da mudança de representação (tradução) do campo algébrico para o gráfico. Além disso, o processo de resolução deixa claro que, embora o estudante em questão tivesse os conhecimentos necessários para a resolução do problema (conhecimentos sobre funções), não foi capaz de articulá-los espontaneamente; ao contrário, precisou ser motivado pelo pesquisador, em dois momentos, a mobilizar outros conhecimentos e lançar um novo olhar sobre os elementos da equação. Essa situação reforça a posição destacada por Dreyfus (1991) – e que defendemos anteriormente – de que os processos relativos ao desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado precisam ser trabalhados pelos professores, para que os estudantes, que ainda estão construindo seus esquemas mentais, possam aprendê-los e adquiri-los como uma estratégia para a interpretação e resolução de problemas em Matemática.

Considerações Finais

Segundo Tall (1991), o Pensamento Matemático Avançado envolve todo o ciclo da atividade matemática, que vai desde o ato criativo da consideração de um problema, passa pela elaboração de conjecturas e estratégias de resolução, até chegar aos níveis de refinamento e prova; contudo, esse ciclo não é normalmente praticado nas disciplinas matemáticas no Ensino Superior. Nesse sentido, entendemos que fomentar a interação entre os aspectos algorítmicos, intuitivos e formais no desenvolvimento de conceitos e ideias matemáticas corresponde a colocar em prática o ciclo destacado por Tall. As situações que apresentamos nesse trabalho procuram mostrar a possibilidade e as potencialidades da relação entre os processos relativos ao desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado e os aspectos colocados por Fischbein.

Referências e bibliografia

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 25-41). Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (Vol. 13, pp. 231-245). Kluwer Academics Publishers.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics, 12*, 491-512.

Tall, D. O. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 3-21). Kluwer Academic Publishers.

Thurston, W. P. (1990). Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society, 37*(7), pp. 844-850.