Características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta

Maria Elisa Esteves Lopes **Galvão**
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN
Brasil
elisa.gal.meg@gmail.com
Vera Helena Giusti **de Souza**
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN
Brasil
verahgsouza@gmail.com
Ana Maria Pereira Pinto **Poggio**
Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil
anapoggio@gmail.com

Resumen

Apresentam-se os resultados de uma investigação sobre as características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta, com alunos do Ensino Médio. A pesquisa fundamentou-se nas ideias de Definição de Conceito e Imagem de Conceito de Tall e Vinner e dos Três Mundos da Matemática de Tall e buscou-se resposta para a questão: *"Com que características, entres formais, simbólicas e corporificadas, emergem as primeiras ideias de um grupo de alunos do último ano do Ensino Médio diante de uma questão que envolve proporcionalidade direta?"*. Aplicou-se um questionário a alunos do final do Ensino Médio (17-18 anos de idade) de uma escola pública de São Paulo, Brasil e verificou-se que as primeiras ideias que emergiram apresentam características corporificadas ou corporificadas formais, ligadas à "regra de três" como um procedimento que não faz parte do pensamento proporcional.

Palavras-chave: proporcionalidade direta, Três Mundos da Matemática, características.

Introdução

Consideramos que o conceito[1] de proporcionalidade é relevante por sua aplicabilidade no contexto matemático e em problemas práticos, por todas as ideias que lhe são subjacentes e por dar sustentação para muitos tópicos da Matemática, da Física e de outras áreas. Podemos considerá-lo como um possível fio condutor que passa pelos varios níveis de escolaridade, nos estudos de fração, semelhança, regra de três, porcentagem, grandezas direta e inversamente proporcionais, no Ensino Fundamental (6 a 14 anos de idade), atravessa o Ensino Médio (15 a 17 anos de idade), em problemas que envolvem razão e proporção, semelhança, representação gráfica de funções que relacionam grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais e tem aplicações no Ensino Superior, no estudo de objetos matemáticos como função e derivada, tanto em Matemática como em outros componentes curriculares. Com a constatação da importância do conceito de proporcionalidade, entendemos que o ensino de Matemática da Educação Básica deve contemplar situações que possibilitem sua efetiva aprendizagem e perguntamo-nos se o conceito de proporcionalidade, direta ou inversa, permanece com os alunos, depois de terem passado pelo seu ensino, e como as aplicam.

Lesh, Post e Behr (1988) consideram que a aprendizagem de proporcionalidade deve ser vista como um dos principais objetivos do ensino de Matemática, argumentando que o raciocínio proporcional abarca toda a Aritmética e representa o alicerce da Matemática dos anos seguintes

> "Vemos o raciocínio proporcional como um conceito fundamental. De um lado, é o ponto culminante da Aritmética das crianças no 1º ciclo do Ensino Fundamental; de outro, é a pedra fundamental de tudo o que se segue" (Lesh; Post e Behr, 1988, p. 94, tradução nossa).

Em outra pesquisa, Post, Behr e Lesh (1995)[2] ressaltam a importância do raciocínio proporcional no aprendizado de Álgebra e apontam que, até 1988, eram considerados capazes de raciocinar proporcionalmente aqueles que respondiam corretamente a problemas de valor ausente - em que são conhecidos três valores e deseja-se encontrar o quarto – em situações consideradas numericamente difíceis, envolvendo números não inteiros. Para estes pesquisadores, esta é uma visão limitada, pois estes problemas prestam-se apenas a resoluções algorítmicas . Post, Behr e Lesh (1995) apresentam três razões da importância do raciocínio proporcional no aprendizado de Álgebra: a representação algébrica das proporções; a igualdade entre duas razões; e os diferentes modos de representação, como tabelas, gráficos, símbolos, desenhos e diagramas, que são essenciais não apenas na Álgebra, mas também em outras áreas da Matemática. Acrescentam ainda que, para raciocinar proporcionalmente, um indivíduo precisa ter o domínio de vários conceitos sobre os números racionais, tais como ordem e equivalência, relação entre a unidade e suas partes, interpretação de uma razão e questões envolvendo a divisão. Concluem que é preciso

> "ter noções suficientemente sólidas para não se deixar afetar por números grandes ou 'complicados' ou pelo contexto em que se insere o problema. (...) a pessoa precisa ser capaz de distinguir entre situações proporcionais e não proporcionais. Isso tem implicações diretas para o ensino" (Post, Berh & Lesh, 1995, p. 91).

---

[1] Neste trabalho, usamos a palavra *conceito* para designar uma *definição formal*, aceita pela comunidade matemática como tal.

[2] Proportionality and the Development of Prealgebra Understandings foi publicado em 1988 no *The Idea of Algebra K-12: Yearbook* National Council of Teachers of Mathematics (pp. 78-90) pela editora A. Coxford & A. Shulte.

Sierpinska (1992) traz à tona outra dificuldade associada ao entendimento da ideia de proporcionalidade e que, segundo ela, constitui-se em um obstáculo epistemológico, pois são

> "formas de compreensão baseadas em alguns esquemas inconscientes de pensamento, adquiridos culturalmente ou em crenças não questionadas sobre a natureza da matemática e sobre as categorias fundamentais, tais como número, espaço, causa, probabilidade, infinito, ... inadequados em relação à teoria atual [3] "(Sierpinska, 1994, p. xi, tradução nossa).

Nessa pesquisa, Sierpinska categoriza dezesseis obstáculos epistemológicos associados ao conceito de função e o de número 9 é especialmente ligado à ideia de proporcionalidade: *"(Um esquema inconsciente de pensamento) Proporção é uma forma privilegiada de relação*"[4] (Sierpinska, 1992, p. 43, tradução nossa). Observou que *"há, na proporcionalidade, uma espécie de simplicidade, de obviedade, que se impõe sobre nós, às vezes até mesmo contra os fatos... pelo menos em pequenos intervalos"* (Grize, 1968, p. 171, apud Sierpinska, 1992, p. 42). Como a "lei algébrica" não aparece explicitamente na definição formal, isso pode ser considerado como um obstáculo e podemos afirmar que todos os sujeitos o enfrentam, o que explicaria o equívoco em definir uma relação como de proporcionalidade direta "quando duas grandezas aumentam" ou de proporcionalidade inversa "quando uma variável aumenta e a outra diminui" ou mesmo em considerar sempre proporcional uma relação entre duas grandezas.

No Brasil, segundo as orientações curriculares, o desenvolvimento do raciocínio proporcional é um dos objetivos do ensino de Matemática, sendo muito valorizado, por ser uma ideia Matemática fundamental e ainda se recomenda

> "resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três" (Brasil, 1998, p. 82).

Miranda (2009) propôs-se a fazer uma revisão sistemática de pesquisas brasileiras sobre o pensamento proporcional, para responder a pergunta "*Quais questões têm sido colocadas nas dissertações e teses do Estado de São Paulo sobre o tema?"* (Miranda, 2009, p.15). Encontrou duas: a de Ruiz (1985), que trabalhou com atividades para introduzir o conceito de proporcionalidade, com alunos do Ensino Fundamental e a de Perotti (1999), que trabalhou com atividades para o estudo da reta, a partir de grandezas diretamente proporcionais, com alunos do Ensino Médio. Com o trabalho de Miranda (2009), percebemos a escassez de pesquisas sobre o assunto. Com as pesquisas de Post, Behr e Lesh (1995, 1988) e de Sierpinska (1992, 1994) atentamos para possíveis equívocos na compreensão do conceito de proporcionalidade e algumas questões emergiram: "Será que alunos do Ensino Médio têm presentes, na estrutura cognitiva, os conceitos de proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa?"; "Como trabalham com esses conceitos?"; "Utilizam gráficos, tabelas, textos ou símbolos?"; "Sabem reconhecer se uma relação é de proporcionalidade direta, inversa ou não proporcional?"; "Reconhecem as expressões correspondentes?". De maneira particular, perguntamos quais são as primeiras ideias que emergem diante de um problema que envolve a proporcionalidade direta e com que características dos Três Mundos da Matemática, pois consideramos importante que um sujeito

[3] ways of understanding based on some unconscious, culturally acquired schemes of thought and unquestioned beliefs about the nature of mathematics and fundamental categories such as number, space, cause, chance, infinity,…inadequate with respect to the present day theory (Sierpinska, 1994).

[4] (An unconscious scheme of thought) Proportion is a privileged kind of relationship.

saiba reconhecer a ideia e trabalhar com ela. Para obter respostas a esses questionamentos, optamos por estruturar um questionário diagnóstico sobre a ideia de proporcionalidade e aplicá-lo a alunos do 3º ano do Ensino Médio, com pelo menos uma questão de aplicação.

Como fundamentação teórica, escolhemos os Três Mundos da Matemática (Tall, 2004), uma teoria que está preocupada em entender o desenvolvimento cognitivo do ser humano, em Matemática, desde a infância até a idade adulta e que defende que, para esse desenvolvimento, são necessárias atividades que englobem diferentes tipos de pensamento matemático, que categorizam em três diferentes mundos: *mundo conceitual corporificado, mundo proceitual simbólico e mundo axiomático formal.* Essa teoria ainda traz as ideias subjacentes de *imagem de conceito* e de *definição de conceito* (Tall &Vinner, 1981). Escolhido esse quadro teórico, reformulamos nossos questionamentos e, dentre as questões que elaboramos, vamos apresentar, neste artigo, a que se refere ao uso da proporcionalidade direta em um problema "Que características, entre formais, simbólicas e corporificadas, emergem como primeira ideia, diante de um problema que envolve proporcionalidade direta?"

Referencial Teórico

Buscamos aporte na teoria dos *Três Mundos da Matemática* (Tall, 2004) e nas ideias subjacentes de *imagem de conceito* e *definição de conceito* (Tall & Vinner, 1981) para formular as questões referentes ao pensamento proporcional, elaborar o instrumento de coleta de dados e analisar os protocolos gerados por um grupo de alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Imagem de conceito e definição de conceito

Tall e Vinner (1981) consideram que o desenvolvimento cognitivo de um indivíduo, em Matemática, é atingido pela diversidade de ideias e experiências que o indivíduo acumula, relacionadas a cada conceito e que, para este ser compreendido é pedagogicamente aconselhável que sua definição seja acompanhada por uma ampla gama de ideias associadas ao conceito e que irão favorecer a formação do que Tall e Vinner (1981) chamam de *imagem de conceito*.

> "Usaremos o termo imagem de conceito para descrever a estrutura cognitiva total associada a um conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece"[5] (Tall & Vinner,1981, p. 152, tradução nossa).

A *imagem de conceito* não é uma estrutura estática e pode modificar-se ao longo do tempo, de acordo com o desenvolvimento cognitivo individual, com novas concepções incluídas e antigas excluídas ou modificadas. Faz parte da *imagem de conceito* o que Tall e Vinner (1981) chamam *definição de conceito,* que é o conjunto de palavras utilizadas por um indivíduo para definir um conceito matemático. A *definição de conceito* é, portanto, individual e pode ter sido decorada ou construída, a partir das ideias presentes na *imagem de conceito* e pode estar relacionada, em maior ou menor grau, a uma *definição de conceito* formal, como a que é aceita pela comunidade matemática (Tall & Vinner, 1981). Por exemplo, à pergunta "O que é

[5] We shall use the term *concept image* to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures. (Tall & Vinner, 1981).

proporcionalidade direta?”, um sujeito pode dar uma definição formal, como a instituída pela comunidade científica ou ainda descrever uma das concepções presentes na sua *imagem de conceito*, como “Duas quantidades são diretamente proporcionais se o gráfico cartesiano for uma reta com inclinação positiva e que passa pela origem”. Vinner (1991) ainda acrescenta que tanto a *definição de conceito* como a *imagem de conceito* podem ser inexistentes, se “*nenhum significado é associado ao nome do conceito*” [6]. (Vinner, 1991, p. 70, tradução nossa) e isto pode ocorrer por várias razões: a definição foi memorizada, sem que lhe seja atribuído um significado; um conceito é introduzido utilizando apenas sua definição; ou ainda, a definição permanece desativada.

Os Três Mundos da Matemática

Nos Três Mundos da Matemática, Tall (2004) afirma que para a aprendizagem são necessárias atividades que englobem diferentes tipos de pensamento matemático e os categoriza em três mundos distintos: *Mundo Corporificado, Mundo Simbólico* e *Mundo Formal*, que não são hierárquicos nem obrigatórios e cada indivíduo traça o próprio caminho entre eles. À medida que o indivíduo “viaja” pelos mundos, surgem dificuldades, que necessitam de ideias anteriores para serem superadas, de modo que a viagem é individual e não é a mesma para cada viajante.

> “indivíduos diferentes lidam com os vários obstáculos de modos diferentes, que levam a uma variedade de desenvolvimentos pessoais, alguns dos quais permitem que o indivíduo progrida com sofisticação crescente, de forma significativa, enquanto outros acarretam em concepções alternativas, ou mesmo fracassos[7]” (Tal, 2004, p.286, tradução nossa).

A presença simultânea de características dos Três Mundos é que garantirá uma *imagem de conceito* rica o suficiente para que se possa afirmar que houve aprendizagem (Tall, 2004). A Figura 1 apresenta a integração entre os *três mundos* (Tall, 2004) e destaca que num determinado ponto do desenvolvimento cognitivo um indivíduo pode estar entre dois deles: "*simbólico corporificado*" (as características são símbolos e corporificações e o próprio simbolo pode ser corporificado); "*corporificado formal*” (o pensamento formal é sustentado pelas corporificações e as idéias corporificadas são traduzidas em estruturas formais); e "*simbólico-formal*” (as idéias simbólicas são traduzidas em formalismo).

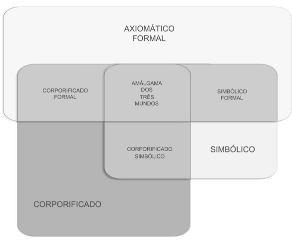

Figura 1. Três Mundos da Matemática.

Fonte: Lima e Tall (2010, tradução e adaptação nossa).

[6]... some meaning is not associated with the concept name. (Vinner, 1991).

[7] different individuals handle the various obstacles in different ways that lead to a variety of personal developments, some of which allow the individual to progress through increasing sophistication in a meaningful way while others lead to alternative conceptions, or even failure. (Tall, 2004).

Mundo Conceitual Corporificado

No *mundo conceitual corporificado*, observamos e descrevemos as propriedades que percebemos e sentimos de um objeto e as experiências envolvem objetos físicos: observação, manipulação, descrição de propriedades, embora o indivíduo não precise manipular fisicamente o objeto, pois pode fazê-lo em pensamento. Assim, ao pensar numa relação entre duas grandezas diretamente proporcionais, podemos corporificar este conceito, “vendo” ou esboçando o gráfico de uma reta pela origemn, com coeficiente angular positivo. No *mundo corporificado*, o conceito de proporcionalidade direta pode ser representado por gráficos, tabelas, exemplos numéricos ou por um texto na língua materna, sem se preocupar com uma linguagem formal.

Mundo Proceitual Simbólico

O *mundo proceitual simbólico* é aquele no qual os símbolos matemáticos são usados não só para representar e efetuar ações, mas também para representar o produto dessas ações. Segundo Tall (2004), o *mundo simbólico* é composto por símbolos matemáticos que representam as ações e as percepções do *mundo corporificado*. No *mundo corporificado*, duas grandezas diretamente proporcionais podem ser representadas por uma tabela ou por um exemplo numérico. No *mundo simbólico*, podem aparecer expressões do tipo $\boldsymbol{y = kx}$ $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ou $\boldsymbol{a: b:: c: d}$ (que se traduz por $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$).

Mundo Axiomático Formal

O *mundo axiomático formal* é o mundo das definições, axiomas e teoremas, que constituem o sistema axiomático da Matemática. Segundo Lima, R. (2007), o trabalho no *mundo formal* é caracterizado pela utilização de linguagem formal, com definições formais e axiomas para explicar um conceito matemático, a partir dos quais são feitas deduções e demonstrações. Em Lima *et al*. (2006), a definição de grandezas proporcionais tem características do m*undo formal*

> Uma proporcionalidade é uma função $f : IR \to IR$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c, x tem-se $f(cx) = c.f(x)$ (prorcionalidade direta) ou $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$, se c ≠ 0 (proporcionalidade inversa). (Lima *et al.*, 2006).

O indivíduo, ao definir o conceito de proporcionalidade direta, com *características corporificadas formais*, pode apresentar algo do tipo: “Seja a grandeza $\boldsymbol{y}$ uma função da grandeza $\boldsymbol{x}$, isto é, $\boldsymbol{y = f(x)}$. Dizemos que $\boldsymbol{y}$ é diretamente proporcional a $\boldsymbol{x}$ quando: $\boldsymbol{y}$ é uma função crescente de $\boldsymbol{x}$ e, se $\boldsymbol{x}$ for multiplicado por um número real $\boldsymbol{r}$, o valor correspondente de $\boldsymbol{y}$ fica multiplicado por $\boldsymbol{r}$. Logo: $f(r,x) = rf(x)$ $\boldsymbol{f(r.x) = {}^{1}/_{r}\ . f(x)}$ para todo valor de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{IR}$”.

A partir da teoria dos *Três Mundos da Matemática*, desenvolvemos o questionário diagnóstico de modo a obter quais e quão variadas são as imagens mentais, propriedades e processos, presentes na estrutura cognitiva do sujeito, referentes ao conceito de proporcionalidade direta.

Procedimentos Metodológicos

Elaboramos um questionário com 17 questões abertas e semiabertas, envolvendo as definições de proporcionalidade direta e inversa e problemas que nos permitissem verificar com que características dos *Três Mundos* os alunos trabalham essas questões. O instrumento foi aplicado a 51 alunos do 3º ano do Ensino Médio, que passaram por todo o estudo de grandezas direta e inversamente proporcionais no Ensino Fundamental e trabalharam com problemas que envolvem razão, proporção e representação gráfica de funções, no Ensino Médio. Dentre essas questões, escolhemos apresentar, para esta comunicação, a questão 6, na qual é proposto um problema verbal, envolvendo uma ideia básica de proporcionalidade direta, ligada à Física, sobre a relação entre a distância percorrida e a velocidade de um automóvel. Esperávamos, com as respostas dadas a essa questão, verificar com que características dos Três Mundos da Matemática emergem as primeiras ideias, diante do problema proposto.

Análise

Vejamos o enunciado da Questão 6, a análise que fizemos das respostas e alguns exemplos.

6. Escreva com suas palavras qual sua **primeira ideia** para resolver o seguinte problema: “Um automóvel percorre uma distância de 48 quilômetros em 02 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 06 horas?”. **Explique o porquê desta ideia.**

O objetivo desta questão é identificar algumas características que estão presentes na *imagem de conceito* (Tall & Vinner, 1981) do sujeito da pesquisa e que sejam as primeiras a emergir diante do questionamento. Com a explicação dada, pretendemos identificar se ele percebe a ideia de proporcionalidade direta que está presente no movimento retilíneo uniforme, pois nele o espaço percorrido é diretamente proporcional ao tempo gasto em percorrê-lo, e como explica essa ideia. Para resolver o problema, o sujeito pode utilizar o método de redução à unidade/taxa unitária, que é achar a constante de proporcionalidade (a distância percorrida em 1 hora) e multiplicá-la por 6. Neste caso, vamos considerar esta resposta com *características formais* (F), pois a distância percorrida em 1 hora permite calcular a distância em qualquer tempo. Este problema também pode ser resolvido pelo método do fator de mudança/decomposição em parcelas: “se em 02 horas o automóvel percorre 48 km, mais 02 horas percorrerá 96 km e mais 02 horas percorrerá 144 km”. Neste caso, o sujeito apresenta *características corporificadas* (C). Para a resolução ser categorizada com *características formais* (F), por meio deste método, seria preciso verificar se o participante consegue resolver o problema com um tempo diferente, por exemplo 7 horas. Ou então, para resolver o problema, o sujeito pode aplicar a noção de proporcionalidade direta por meio da regra de três, onde a grandeza $\boldsymbol{d}$ (distância) é diretamente proporcional à grandeza $\boldsymbol{h}$ (horas): $\frac{\mathbf{48}}{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{d}.}{\mathbf{6}}$. Consideramos esta resolução com *características simbólicas* (S), pois este método pode ser olhado como um proceito, que encerra o conceito de proporcionalidade direta e o processo de que temos que fazer $48.6 = 2.d$, para calcular o $\boldsymbol{d}$. Utilizando qualquer um desses métodos, o sujeito sabe justificá-lo?

Quadro 1

Categorias de Análise da Questão 6

Classificamos por	Quando a resposta apresentou
Características corporificadas (C)	A resolução pelo método do fator de mudança/decomposição em parcelas, sem dar a entender haver uma relação de proporcionalidade direta
Características simbólicas (S)	Reconhecimento por meio do símbolo, do processo e do conceito, que representa (proceito), ou seja, manipulou os símbolos (processo) corretamente e mostrou o entendimento do conceito.

Características corporificadas formais (CF)	A constante de proporcionalidade pelo método de redução à unidade/taxa unitária, encontrando a distância percorrida em 1 hora e multiplicou por 6 horas. Dá a entender que encontrando a distância percorrida em 1 hora é possível calcular a distância em qualquer tempo
Características corporificadas simbólicas (CS)	O algoritmo da regra de três de maneira correta (S) e uma imagem corporificada.
Ausência de características (-)	Apresentou uma conta não relacionada a um problema de proporcionalidade direta, que só pode ser resolvido porque existe uma regularidade: em intervalos de tempos iguais são percorridos espaços iguais.
Entrevista (E)	Casos que não compreendemos a resposta do participante e pensamos seria interessante realizar uma entrevista.

Quadro 2

Classificação da Questão 6 de cada aluno, na perspectiva dos Três Mundos da Matemática

1	CF	11	CF	21	C	31	C	41	CS	51	C
2	CF	12	C	22	C	32	n/r	42	C		
3	CS	13	C	23	CS	33	n/r	43	-		
4	CS	14	-	24	CS F	34	CF	44	C		
5	-	15	C	25	E	35	C	45	-		
6	C	16	-	26	C	36	S	46	C		
7	C	17	C	27	C	37	C	47	CF		
8	n/r	18	n/r	28	C	38	CF	48	CF		
9	-	19	n/r	29	CF	39	-	49	C		
10	CF	20	CF	30	CF	40	CF	50	CF		

Dentre os 46 sujeitos que responderam esta questão, observamos que apenas 11 sujeitos explicitaram a primeira ideia para resolver o problema, que é o que a questão pede, como o Aluno 34: "*A minha primeira ideia foi dividir o 48 por 2 e o resultado foi 24 então multipliquei o 24 por 6. Porque foi a ideia que achei mais lógica.*"; os outros 10 explicitaram a primeira ideia, se referindo à "regra de três", sem aparentemente fazer conexão com a proporcionalidade direta, e também resolveram o problema, dando um valor como resposta, como o Aluno 12: "*144. É só multiplicar por 3. 48x3=14. 2x3=6*". Os outros 35 sujeitos apenas resolveram o problema. No **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, damos um resumo dos métodos utilizados pelos alunos para resolver a

Questão 6

Quadro 3

Método de Resolução utilizado na Questão 6

1	TU	11	FM	21	FM	31	FM	41	RT	51	-
2	TU	12	FM	22	FM	32	-	42	FM		
3	RT	13	FM	23	RT	33	-	43	-		
4	RT	14	-	24	RT	34	TU	44	FM		
5	-	15	FM	25	-	35	FM	45	-		
6	FM	16	-	26	FM	36	RT	46	FM		
7	FM	17	FM	27	FM	37	FM	47	TU		
8	-	18	-	28	FM	38	FM	48	TU		
9	-	19	-	29	FM	39	-	49	-		
10	TU	20	TU	30	TU	40	FM	50	FM		

Quando o participante utilizou o método do fator de mudança, nem sempre pudemos ter certeza se o problema foi resolvido com *características formais* (F), pois ficou a dúvida: se os dados do problema não fossem números múltiplos, como será que ele o resolveria? (Figura 2). Se invés de 6h, tivéssemos usado 7h? Um fator que influenciou nossa análise a considerar a resposta com *características formais* (F) foi julgar se o sujeito resolveria o problema mesmo se o valor pedido da distância fosse o correspondente a 7 horas.

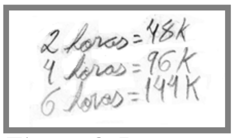

Figura 2. Resposta do Aluno 31 para a Questão 6, utilizando método do fator de mudança, classificada como características corporificadas (C).

Se o sujeito argumentou que em 1 h o carro anda 24 km e deu a entender ser esta a constante de proporcionalidade, consideramos a resposta com *características formais* (F), como o Aluno 01

> “A primeira ideia seria dividir o nº de quilômetros percorridos em 2 horas por 2 para se obter o nº de kms percorridos em 1 hora. Logo após, multiplicar esse valor por 6, que é o solicitado no exercício. Eu pensei nesta ideia para resolver o exercício porque essa é a maneira mais fácil para se achar o nº de kms percorridos seja qual for o tempo”.

Na análise desta questão, tivemos dúvida em algumas respostas, em que a palavra “aumenta” parece estar ligada à operação adição e não à multiplicação e fica subentendido que a proporcionalidade é direta porque aos valores de uma grandeza se soma um determinado valor e aos valores da outra também, como é o caso do Aluno 04, que utilizou o algoritmo da regra de três com processo e conceito corretos, mas ao apresentar os valores em uma tabela menciona que “soma 2 nas horas e soma 48 nos quilômetros”.

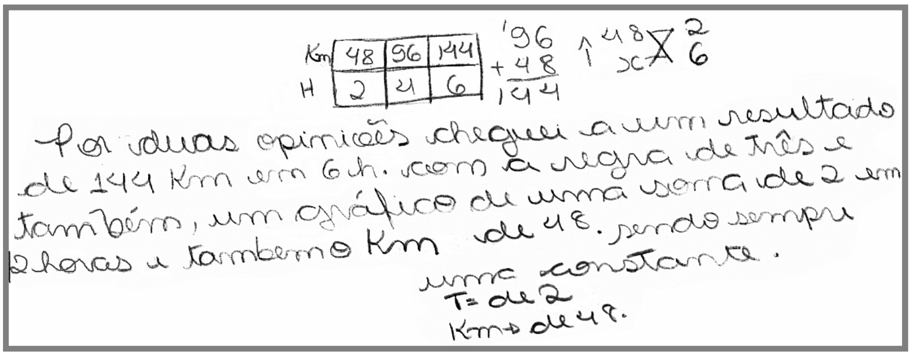

Figura 3. Resposta do Aluno 04 para a Questão 6, classificada com *características corporificadas simbólicas.*

Será que se este aluno visse a tabela que segue, consideraria existir uma proporcionalidade direta entre as grandezas x e y? Na linha de cima são somados 2 e na de baixo 4 e ambas 'aumentam".

x	2	4	6
y	5	9	13

Uma resposta, a do Aluno 24 (Figura 4), foi classificada com as características dos Três Mundos da Matemática, ou seja, interpretamos que nesta questão o participante transitou pelos Três Mundos (CSF), pois utilizou o método da regra de três ao escrever a equação das grandezas diretamente proporcionais; manipulou os números de maneira correta; e mencionou ser este um problema de proporcionalidade direta.

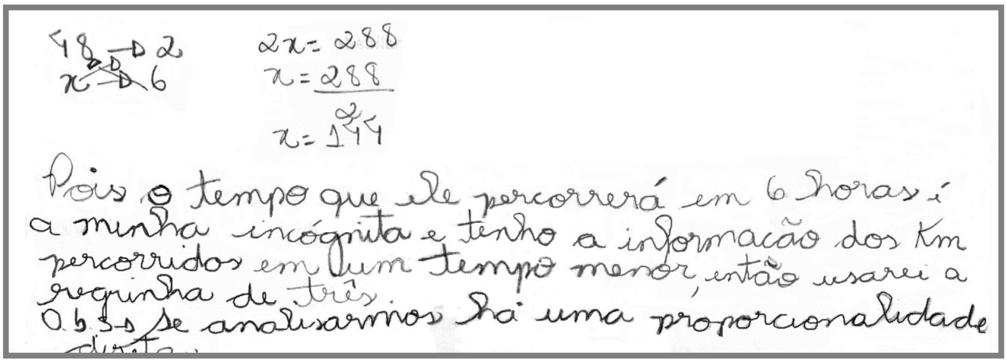

Figura 4. Resposta do Aluno 24 para a Questão 6 classificada como com características corporificadas, simbólicas e formais (CSF).

Dos alunos que responderam a questão, deixando suas contas e justificando seus resultados, 8 mostraram explicitamente que não têm, na *imagem de conceito*, que este tipo de problema só pode ser resolvido porque existe uma regularidade: em intervalos de tempos iguais são percorridos espaços iguais, isto é, a velocidade é a constante de proporcionalidade. 3 alunos acharam a resposta multiplicando 48 quilômetros por 6 horas, como o Aluno 39: "*Ele percorrerá 288 quilómetros em 6 horas. Este problema foi criado para saber quanto o carro percorrerá e para saber-se nós estamos bom na multiplicação*."

Quadro 4

Classificação geral da Questão 6 na perspectiva dos Três Mundos da Matemática

Questão 6	
Características corporificadas (C)	19
Características corporificadas formais (CF)	13
Características simbólicas (S)	01
Características corporificadas simbólicas (CS)	04
Características corporificadas simbólicas formais (CSF)	01
Ausência de características (-)	07
Respostas dadas	46
Não responderam (n/r)	05
Entrevista (E)	01

Conclusões

Com a análise dos protocolos, podemos responder nossa questão de pesquisa: *"Com que características, entres formais, simbólicas e corporificadas, emergem as primeiras ideias de um grupo de alunos do último ano do Ensino Médio diante de uma questão que envolve proporcionalidade direta?"*. No caso da questão 6, percebemos que obtivemos apenas 07 com ausência de características e 05 em branco. As demais apresentam características corporificadas (19), simbólicas (01), corporificadas formais (13) e apenas um sujeito com características dos Três Mundos, o que responde nossa questão de pesquisa.

A análise da quantidade e da qualidade dessas respostas nos fez repensar que os alunos podem ter respondido não porque têm familiaridade com a ideia de grandezas proporcionais, mas porque sabem aplicar um dos métodos: taxa unitária; regra de três; ou decomposição em parcelas e não associam estes métodos à proporcionalidade direta. Além disso, não pedimos para resolver a questão e sim explicitar a primeira ideia para resolvê-la, com a intenção de provocar uma resposta que deixasse claro se o sujeito associou a questão à proporcionalidade direta, mas apenas 11 explicitaram a "primeira ideia": apenas um deixou claro que estava lidando com proporcionalidade direta e os outros 10, com um problema de regra de três. Perguntamos: estes alunos perceberam que a proporcionalidade direta e a regra de três estão ligadas?

Considerando as respostas obtidas, julgamos que se este diagnóstico for reaplicado deveremos: não utilizar valores múltiplos; colocar exemplos em que o valor a ser obtido seja menor do que o dado, por exemplo, conhecendo a distância percorrida em 7 horas, determinar a percorrida em 3. Ficamos com uma pergunta: será que o equívoco da grande maioria desses sujeitos em definir a proporcionalidade direta como "quando um aumenta o outro aumenta" os induziu a tratar o problema como de proporcionalidade direta e consequentemente utilizar um "procedimento"?

Considerações gerais

Começamos nosso estudo buscando entender se alunos do Ensino Médio têm presentes, na estrutura cognitiva, os conceitos de proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa e como trabalham com esses conceitos: se usam gráficos, tabelas, textos ou símbolos. Nossa preocupação também foi verificar se reconhecem se uma relação é diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional e se reconhecem (ou conhecem) as expressões correspondentes. Aplicamos um questionário com 17 questões e apresentamos, nesta exposição, os resultados obtidos com uma delas, em que se pede para o sujeito identificar a primeira ideia que emerge diante de um problema de proporcionalidade direta, envolvendo o cálculo da distância percorrida por um automóvel que se move com velocidade constante.

Finalizando este trabalho, diante dos dados obtidos na análise dos protocolos, esperamos que as perguntas que surgiram pelo caminho tragam ideias para novas pesquisas: "Estes alunos perceberam que a proporcionalidade direta e a regra de três estão ligadas?", "Utilizando qualquer um dos métodos, da redução à unidade/taxa unitária, do fator de mudança/decomposição em parcelas ou a regra de três, o sujeito sabe justificá-lo?", "Se os dados da questão 6 não fossem os dados, como será que a resolveriam, se invés de 6h, tivéssemos usado 7h?", "Será que diante da tabela que segue, um sujeito consideraria existir uma proporcionalidade direta entre as grandezas x e y, uma vez que ambas aumentam, pela adição da constante 2 no x e da constante 4 no y?", "Será que o fato da grande maioria desses participantes definir a proporcionalidade direta como "quando um aumenta o outro aumenta" os induziu a tratar a questão 6 como de proporcionalidade direta e daí utilizar um 'procedimento'?"

x	2	4	6
y	5	9	13

Todas essas questões ficaram sem resposta, mas esperamos que nosso trabalho desperte o interesse em respondê-las, por meio de pesquisas na área de Educação Matemática que poderão contribuir para a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática e, em particular, do pensamento proporcional.

Referências

Brasil. Parâmetros curriculares nacionais. (1998). *Matemática: Ensino de quinta a oitava séries.* Brasília: MEC/SEF. Disponível em:http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 20 out. 2010.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. H. &. M. B. (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics. Disponível em: htpp://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/88 8.html. Acesso em: 02 abr. 2011.

Lima, E. L. (2011). Grandezas Proporcionais. In *Meu Professor de Matemática e outras histórias* (5ª. ed., pp. 125-141,). Rio de Janeiro: SBM. ISBN 978-85-85818-09-8.

Lima, E. L. et al. (2006). *A Matemática do ensino Médio, 1* (9ª. ed.). Rio de Janeiro: SBM. ISBN 85-85818-10-7.

Lima, R. N. (2007). *Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da Matemática* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). 358 p. PUC, São Paulo.

Miranda, M. R. (2009). *Pensamento proporcional: uma metanálise qualitativa de dissertações* (Dissertação de Mestrado). 137 p.

Post, T. R., Behr, M. J., & Lesh, R. (1995). A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In A. F. Coxford & A. P Shulte (Eds.). *As ideias da álgebra* (pp. 89-103). Tradução de

Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.

Sierpinska A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. (Vol. 25, 25-58). [S.l.]: Mathematical Association of America.

Tall, D. O. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 281-288). Bergen, Norway. Disponível em: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/proof.html. Acesso em: 24 abr. 2011.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 158-161. ISBN ISSN: 0013-1954.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.