



## **El impacto del Lenguaje Matemático en el aprendizaje. Una experiencia con alumnos del nivel superior.**

**Mónica Caserio**

Universidad Nacional de Rosario (UNR) - Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA)

Argentina

[mbcaserio@yahoo.com.ar](mailto:mbcaserio@yahoo.com.ar)

**Ana María Vozi**

Universidad Nacional de Rosario (UNR) - Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA)

Argentina

[amvozi@fceia.unr.edu.ar](mailto:amvozi@fceia.unr.edu.ar)

### **Resumen**

Indagamos respecto del conocimiento del lenguaje matemático en los estudiantes de los primeros años de las carreras de ingeniería y del profesorado de Matemática. Para lo cual implementamos una actividad en la cual se les solicita la lectura de símbolos y de términos del lenguaje matemático debiendo indicar al respecto su conocimiento e interpretación, y también se les presentan expresiones en lenguaje simbólico y expresiones en lenguaje coloquial para ser traducidas.

Pudimos notar que el conocimiento del lenguaje matemático así como su manipulación están muy por debajo de lo requerido para estudios del nivel superior. Esta falta de conocimiento del lenguaje influye notablemente en la posibilidad de abordar con éxito una carrera que tiene a la matemática como eje.

Diseñamos entonces una estrategia didáctica con el fin de mejorar el conocimiento y el uso del lenguaje matemático.

*Palabras clave:* educación, matemática, lenguaje matemático, aprendizaje.

### **Introducción**

Una diferencia importante entre la Matemática y otras ciencias aparece en que los objetos matemáticos son abstractos motivo por el cual no pueden ser manipulados como objetos físicos y sólo se puede acceder a ellos a través de un sistema de representaciones.

Según Duval (2006) y D'Amore (2005) los sistemas de representación cumplen un rol de suma importancia en el trabajo con objetos matemáticos que supera a la designación y comunicación, los consideran indispensables en la función cognitiva del pensamiento, dado que ninguna acción matemática puede ocurrir fuera de un sistema de representación. La actividad matemática requiere además de permanentes cambios de representaciones. De acuerdo con estos autores, para que haya aprehensión conceptual de un objeto matemático debe haber algún tipo de representación del mismo.

En relación a las diversas posturas sobre los objetos de la Matemática, aparecen distintas concepciones: considerar el lenguaje como un aspecto secundario en relación con los objetos o sostener que la objetividad de la Matemática está estrechamente unida a su formulación lingüística, ellas son las posiciones sostenidas por las corrientes Intuicionista (Brouwer) y Formalista (Hilbert), respectivamente.

Asumimos pertinente, sostener que la construcción de los objetos matemáticos no es posible sin un lenguaje, como señala Popper (1974):

*“No puede haber construcción de los objetos matemáticos sin un control crítico constante y no puede haber crítica sin una formulación lingüística de nuestra construcciones”.*

Para explicar el mundo natural se usan las matemáticas, tal como lo expresó Eugene Wigner (premio Nobel en 1963):

*La enorme utilidad de las matemáticas en las ciencias naturales es algo que roza lo misterioso, y no hay explicación para ello. No es en absoluto natural que existan “leyes de la naturaleza”, y mucho menos que el hombre sea capaz de descubrirlas. El milagro de lo apropiado que resulta el lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes de la física es un regalo maravilloso que no comprendemos ni nos merecemos.*

### **Planteamiento del problema**

Nos proponemos indagar respecto de la adquisición y la utilización del lenguaje de la matemática en el aprendizaje como un factor que posibilite al estudiante “aprender a aprender”.

En las experiencias realizadas, como docentes de los primeros cursos de matemática en carreras de Ingeniería y del Profesorado de matemática, detectamos un desconocimiento casi general, de los elementos que hacen a la construcción de ese lenguaje, que exige rigor en el simbolismo, seguridad en el análisis de gráficos, establecimiento de relaciones, que les permita a los alumnos desenvolverse con mayor seguridad frente a las exigencias del conocimiento matemático.

Matemática es la única asignatura que se estudia en todos los países y en todos los niveles educativos. Supone un pilar básico de la enseñanza en todos ellos.

La causa fundamental de esa universal presencia radica en que las matemáticas posee un lenguaje «poderoso, conciso y sin ambigüedades» (según la formulación del Informe Cockroft, 1985). Ese lenguaje se pretende que sea aprendido por nuestros alumnos, hasta conseguir que lo

"hablen". En general por medio de la contemplación de cómo los hacen otros (sus profesores), y por su aplicación a situaciones muy sencillas y ajenas a sus vivencias.

La utilización de un lenguaje requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse, por supuesto, pero; sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese lenguaje, a esforzarse en lograrlo, y desde luego, de técnicas para hacerlo.

Nos proponemos generar un debate en nuestra comunidad académica, que permita, entre otras cosas, aportar inquietudes y reflexiones que enriquezcan la actividad docente, el trabajo áulico, de modo que la utilización del lenguaje matemático, entendido como medio verbalizado de comunicación que permite a una persona compartir un pensamiento con otra y establecer una relación efectiva entre docente y alumnos en una clase, posibilite una mejor apropiación de los conocimientos matemáticos por parte de nuestros alumnos así como brindarles a través del dominio de dicho lenguaje, la posibilidad de continuar aprendiendo en forma autónoma.

### **Antecedentes y fundamentación teórica**

Somos docentes investigadoras en el área de educación matemática, nuestra tarea docente la realizamos en las facultades de Ingeniería de las Universidades Nacional de Rosario (FCEIA-UNR) y Tecnológica (UTN-FRRO) y en las carreras de profesorado de Matemática y de Física del IES Olga Cosettini de la ciudad de Rosario, dependiente del ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. En lo relativo a nuestra labor investigativa, la hemos vinculado especialmente a las dificultades del aprendizaje de matemática en carreras no matemáticas, en nuestro primer proyecto abordamos la detección de las dificultades antes referidas, de las conclusiones del mismo se derivó nuestro segundo proyecto donde investigamos sobre la importancia del libro de texto en la producción de los conocimientos, aquí analizamos el impacto que produce en los estudiantes el abordaje de la lectura de textos específicos matemáticos, uno de los emergentes de éste segundo proyecto es el conocimiento del lenguaje matemático, su utilización y la repercusión en el aprendizaje. Es entonces ésta la temática que emprendemos en la actualidad.

Sabemos que el saber científico, el saber sabio, según Chevalard, debe sufrir adaptaciones y restricciones para ser transformado en un "saber a enseñar", que no se pueden considerar sólo como una simplificación del saber científico sino, ajustes efectuados sobre él en el marco del contrato didáctico establecido, como señala el autor: "Transposición didáctica es el pasaje de un contenido de saber preciso a una versión didáctica de este objeto de saber".

Entendemos que el lenguaje es un factor de gran relevancia en el contrato didáctico, para Brousseau (1986), la comunicación y el lenguaje forman parte de un proceso complejo en el sistema profesor - estudiante - medio, donde el juego es la clave de dicho proceso.

En la actividad matemática en el aula se utiliza gran cantidad de elementos del lenguaje, pero la resolución de problemas tiene específicamente el lenguaje como medio de interacción entre conceptos y procedimientos. Pensamos que, una de las funciones del lenguaje es establecer puentes en lo que respecta al desarrollo de la actividad matemática.

En este contexto tiene importancia relevante mejorar sustantivamente el reconocimiento y la utilización del lenguaje matemático, simbólico, formal y gráfico con la finalidad de facilitar el desarrollo de competencias de forma explícita durante el proceso de formación de modo tal que el desarrollo de dicha competencia le permita al estudiante realizar, en forma autónoma, toda actividad que implique avanzar en su progreso.

Si las ciencias en general y la matemática en particular se expresan y se difunden a través de su lenguaje y no podrían ser comprendidas sin él. Es importante, entonces desarrollar la comprensión de dicho lenguaje, que involucra operaciones cognitivas y un complejo de conocimientos. Supone un conjunto de saberes (discursivos, enciclopédicos, lingüísticos, semióticos) y saber-haceres, procedimientos de diferente nivel de complejidad.

Como otras ciencias, la matemática posee un lenguaje específico que simplifica y clarifica la comunicación, designando de una manera exacta sus contenidos. En el Lenguaje Matemático, los enunciados se presentan en forma genuina, sin ambigüedades, aportando demostraciones de su veracidad. El desconocimiento de este lenguaje produce errores de construcción y de interpretación, dificultando la comunicación entre el profesor y los alumnos.

En este contexto, es pertinente entonces, contribuir al conocimiento de este lenguaje específico intentando mejorar la comunicación entre docentes y estudiantes cómo entre estudiantes y contenidos disciplinares de manera explícita durante el proceso de formación, lo cual supone revisar las estrategias de enseñanzas y aprendizajes de manera de propender a que los estudiantes puedan realizar en forma autónoma, actividades que le permitan avanzar en su desarrollo.

Entre nuestros objetivos, se encuentran:

Detectar las dificultades en el aprendizaje de los contenidos matemáticos y su relación con una insuficiente comprensión del lenguaje formal en los alumnos.

Diseñar estrategias innovadoras para la comprensión y utilización del lenguaje matemático en situaciones específicas.

### **Metodología**

La población, en estudio, está constituida por los alumnos de primer año de Carreras de Ingeniería en la FCEIA, UNR y FRRO, UTN, así como por estudiantes del Profesorado de Matemática del Instituto de Educación Superior Olga Cosettini.

El marco elegido es el de una investigación activa, por entender que ella se dirige a su aplicación inmediata y no al desarrollo de teorías. Su propósito es el de mejorar la práctica educativa y al mismo tiempo perfeccionar a quienes han de mejorar sus métodos.

Por ese sentido, nos ubicamos tanto a nivel didáctico cómo a nivel de investigación, en el cuadro de la Ingeniería Didáctica, puesto que consideramos que en el contexto de un paradigma cualitativo el “saber a enseñar” y el “caso a investigar” son susceptibles de ser tratados a través de ella.

### **La experiencia**

En el marco de este proyecto realizamos un cuestionario solicitando la interpretación de símbolos, términos y expresiones del lenguaje matemático. Analizamos la interpretación que los estudiantes expresaron, donde se observa la escasa comprensión de los mismos, lo que nos motivó a diseñar una intervención didáctica con la intención de promover una correcta utilización del lenguaje matemático en el aula.

Esta tarea nos llevó a discutir sobre cómo se utilizan los diferentes lenguajes (coloquial y el formal) y su influencia en la comprensión, por parte de los estudiantes, de los contenidos abordados.

Entendemos que la matemática utiliza en su lenguaje su propia sintaxis representando números, conjuntos de números, cantidades, relaciones con letras y signos, y terminología específica, que no siempre coincide con la del lenguaje común, por lo cual no deberíamos inferir que los alumnos la reconocerán por ellos mismos.

El lenguaje formal de la matemática, que tan frecuentemente utilizan los docentes, resulta dificultoso para los alumnos, generalmente no pueden decodificar correctamente los mensajes. Suelen recurrir a esfuerzos de memorización, transformando así un concepto en un conjunto de palabras sin significado.

La correcta comprensión del lenguaje de la matemática requiere del estudiante un ejercicio de análisis, síntesis, traducción, comprensión, etc., actividades para las cuales, en general, no se encuentra lo suficientemente ejercitado. Es función del docente diseñar actividades que le permitan al alumno incorporar dichas prácticas, de modo que el lenguaje no resulte un obstáculo para la comprensión de los contenidos matemáticos.

Pimm (1999), sugiere que antes de la iniciación de los contenidos matemáticos, se fortalezca el lenguaje matemático, para que esto vaya en beneficio de la salud del proceso de esta disciplina científica formal y de esta manera las características de la ciencia en cuestión cobren vigencia en cada conocimiento del área previamente subrayada.

A partir de estas premisas es que incluimos en el desarrollo de los contenidos específicos de las asignaturas un espacio destinado específicamente a la interpretación de la simbología involucrada.

El trabajo consistió en formar grupos de alumnos, a cada grupo se le asignaba una tarea que involucre la decodificación de textos a símbolos y viceversa.

### Discusión de resultados

Trabajamos con grupos de alumnos. La actividad incluyó en todos los casos interpretación del lenguaje matemático, formal, simbólico y gráfico así como la traducción entre esos lenguajes y el coloquial, aplicado a conceptos previamente desarrollados.

A continuación exponemos a modo de ejemplo, la tarea llevada a cabo con algunas unidades temáticas de las asignaturas Álgebra Lineal y Análisis Matemático correspondientes al primer año de las carreras de Ingeniería y del Profesorado de Matemática.

Se les solicitó a los alumnos que respondieran algunas cuestiones:

1.- Demostración guiada obtenida del texto Fundamentos de Álgebra lineal, 6ta. ed de R. Larson y D. Falvo. Pag. 232 ej 84

Sea  $S$  un conjunto generador de un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita.  
Demuestre que existe un subconjunto  $S'$  de  $S$  que forma una base para  $V$ .

Inicio:  $S$  es un conjunto generador, pero quizá no sea una base debido a que puede ser linealmente dependiente. Usted necesita eliminar los vectores extra para que el subconjunto  $S'$  sea un conjunto generador y sea también linealmente independiente.

- (i) Si  $S$  es un conjunto linealmente independiente, no hay que demostrar. En caso contrario, elimine algún vector  $v$  que sea combinación lineal de los otros vectores de  $S$ .

- (ii) Designe este conjunto como  $S_1$ . Si  $S_1$  es linealmente independiente, no hay nada que demostrar. En caso contrario continúe eliminando vectores dependientes hasta que se produzca un conjunto  $S'$  linealmente independiente.
- (iii) Concluya que este subconjunto es el conjunto mínimo generador  $S'$ .

Las respuestas obtenidas mostraron que los estudiantes, en un número importante, necesitaron la colaboración del docente para reproducir simbólicamente las indicaciones dadas en las guías, por ejemplo:

El espacio vectorial  $V$  tiene dimensión finita  $\rightarrow \dim(V) = n$

$S$  es un conjunto generador del espacio  $V \rightarrow$   
 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ , con  $k \geq n$  tal que si  $v \in V$ , existen escalares  $c_1, c_2, \dots, c_k$   
 de modo que  $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k$

2.- Sea  $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a = 2c - d \quad \forall a, b, c, d \in \mathfrak{R} \right\}$  un subespacio vectorial del espacio  $M_{2 \times 2}$ .

a) Indicar cual o cuales de las siguientes matrices pertenecen al conjunto  $H$ .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- i)  $\{B, C\} \in H$ .
- ii)  $M = B + 2C$  entonces  $M \subset H$ .
- iii)  $\{C, D\} \subset H$ .
- iv)  $N = D + 3C$  entonces  $N \in H$ .

En esta oportunidad importa destacar que les resultó dificultoso traducir desde el lenguaje simbólico al coloquial, ya que si bien leían correctamente los símbolos les resultaba dificultoso aplicar la restricción indicada en los casos particulares presentados.

Así también pudimos observar en el apartado (b) que no distinguían claramente el significado de pertenencia e inclusión matemáticamente hablando.

3.- Dado el campo escalar  $f(x, y)$  indique:

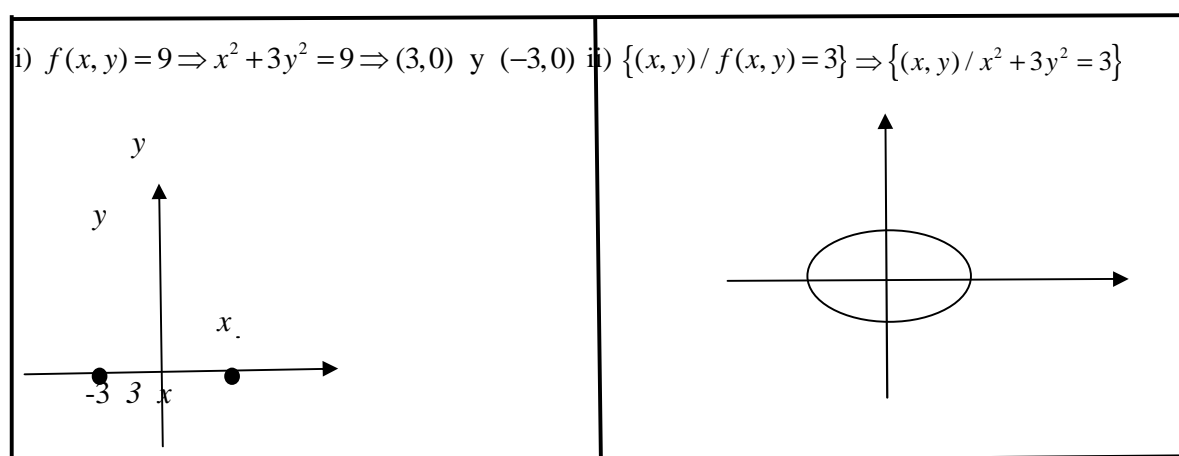
- i) cuales de las siguientes afirmaciones es correcta.
- ii) cuales de ellas son equivalentes.
- a) Es condición necesaria para que el campo escalar dado sea diferenciable que él mismo sea derivable.
- b) Es condición suficiente para que el campo escalar dado sea diferenciable que existan las derivadas parciales del mismo.
- c) Si es campo escalar dado es derivable, entonces es diferenciable.
- d) Si existen las derivadas parciales del campo escalar dado, entonces éste es diferenciable.

En esta ocasión pudimos observar que aparecía un obstáculo en cuanto a la interpretación de condiciones necesarias y suficientes, así como las expresiones que aparecen con frecuencia en el área de Matemática "Si tal cosa, entonces tal otra".

4.- Si  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$  se solicita:

- i) Para que pares  $(x, y)$  se cumple  $f(x, y) = 9$ . Representar gráficamente.
- ii) Mostrar  $\{(x, y) / f(x, y) = 3\}$ .
- iii) Hallar  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$  Interpretar geoméricamente.
- iv) Hallar el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto  $A(1, 2)$  a la curva de intersección entre la gráfica de  $f(x, y)$  y el plano de ecuación  $x = 1$ .

Analizando el trabajo de los alumnos observamos que la formulación de la pregunta del ítem (i) que no contiene la notación de conjunto, los indujo a cometer error en la respuesta que mostraba pares aislados como  $(3, 0)$  ó  $(-3, 0)$ , mientras que en el ítem (ii) dichos errores no se cometían.



En el ítem (iii) fue hallada la derivada solicitada sin inconvenientes, respecto de la interpretación geométrica no se mostraba ninguna representación gráfica y aparecían expresiones erróneas, vagas e incompletas como:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 12 \rightarrow \text{recta tangente}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 12 \rightarrow \text{pendiente de la recta tangente}$$

En el ítem (iv) no advertían que la respuesta ya la habían obtenido en el ítem anterior, fue necesario instarlos a representar gráficamente colaborando en la lectura del lenguaje gráfico para interpretar tanto lo solicitado cómo su respuesta.

En general notamos que la comprensión de los conceptos no fue la esperada, no realizaron las asociaciones necesarias entre los lenguajes coloquial, formal y simbólico, si bien en su gran mayoría, podían reproducir las definiciones estudiadas, no lograban aplicarla en situaciones diferentes a los ejemplos trabajados.

Continuamos llevando a cabo este tipo de actividades periódicamente, como forma de ejercitación en la utilización de los distintos tipos de lenguaje que se usan en las clases y en los textos de matemática.

Si bien no hemos realizado un estudio cuantitativo, dado que nuestra metodología se inspira en la investigación-acción pudimos notar en los alumnos con los que trabajamos un notable avance en la interpretación de nuevos conceptos, así como en la comunicación de sus resultados, los que en muchos casos pasaron a ser “legibles y coherentes”.

### **Conclusiones**

En el aprendizaje de la matemática confluyen una gran cantidad de factores, no obstante uno de los obstáculos más estables que se observa es la falta de coordinación entre los distintos registros de representación, coordinación que es necesario construir ya que no sucede espontáneamente.

Las traducciones entre los lenguajes (coloquial y simbólico) cuando no son congruentes producen dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje y no siempre son consideradas en la práctica docente.

La experiencia realizada nos muestra que si tomamos conciencia de ésta dificultad y explicitamos, en la actividad con nuestros alumnos, el manejo del lenguaje matemático, les estaremos brindando la posibilidad de avanzar en un aprendizaje autónomo y significativo.

### **Prospectiva**

Creemos oportuno generalizar y compartir las experiencias con los docentes del área realizando actividades de cooperación e integración en lo que se refiere a la utilización de los diferentes registros del lenguaje matemático en el aula y con los alumnos, entendiendo que dichas actividades operarán favorablemente en la promoción del autoaprendizaje.

En este contexto planteamos algunos interrogantes que pueden operar como hipótesis de trabajo:

¿De qué forma se utiliza el lenguaje matemático en la clase?

¿Qué condiciones y situaciones didácticas deberían cumplirse para favorecer la apropiación dicho lenguaje?

¿Qué influencia ejerce en la apropiación de los conocimientos la utilización del lenguaje matemático durante la formación previa?

¿Cómo impacta el discurso docente del nivel universitario en la comprensión de los conceptos matemáticos?

Respecto al Profesor:

¿Comprende que el lenguaje es difícil para los principiantes, que requiere mayor precisión que el lenguaje cotidiano?

¿Es consciente del uso de estrategias cognitivas en su propio proceso como traductor de conceptos, proposiciones e ideas al lenguaje específico matemático?

¿Reconoce en los estudiantes la construcción de sentido en el abordaje de un texto escrito en forma simbólica?



¿Es lo suficiente claro en la comunicación de los conceptos y consignas que involucran esta forma de expresarse tan específica?

¿Promueve la lectura compartida de los conceptos de los textos matemáticos para facilitar la “traducción” de los mismos?

### Algunas propuestas

Es nuestra intención que esta investigación contribuya a:

- reconocer la necesidad de ampliar nuestros conocimientos de los factores cognitivos afectivos, actitudinales y motivacionales que inciden en el desempeño de los alumnos.
- asumir, como docentes, la responsabilidad de apoyar el tránsito de los estudiantes del nivel Medio-Superior al Básico-Profesional.
- innovar y evaluar los distintos proyectos con la intención de mejorar nuestro desempeño profesional.
- promover instancias de encuentro y difusión, en las que podamos poner en común experiencias, proyectos y expectativas.

En éste marco, proponemos:

Orientar la interpretación de los diferentes registros del lenguaje matemático a través de guías de preguntas, remarcando los ítems importantes para la comprensión de los conceptos.

Realizar tareas de escritura “El problema con el manejo del lenguaje recién suele hacerse evidente cuando los alumnos escriben: allí es donde muestran sus incomprensiones, a partir de las cuales los docentes podemos retroalimentar sus interpretaciones iniciales” (P. Carlino 2004).

El egresado universitario, deberá manejarse en un mundo profesional competitivo que le demandará una permanente interrelación con diferentes lenguajes, por lo tanto, se hace necesario adquirir y desarrollar las competencias necesarias para participar de dicho "diálogo" entre colegas.

### Referencias y Bibliografía

- Brousseau. (1986). Fondement et méthodes de la didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 72, 33-115. Grenoble-France: La pensée sauvage.
- Browner. (2003). Thematica. *Revista de filosofía*, 30, 106-109.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascon, J. (1997). *Estudiar Matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Horsori: Barcelona, España.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. (2007). *La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Paradigma*. Disponible en: <[http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1011-22512007000200003&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512007000200003&lng=es&nrm=iso)>. ISSN 1011-2251.
- Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?, *Relime*, 9, extra No. 1.
- Hilbert, D. (1862-1943). Disponible en: <http://www.matematicasyfilosofiaenlaula.info/Epistemologia%202009/David%20Hilbert%20y%20el%20Formalismo.pdf>

Informe Cockroft. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Pimm, D (1999). *El lenguaje matemático en el aula*. España: Ediciones Morata S.R.L.

Popper, K: (1974). *The logic of Scientific discovery*. Londres: Hutchinson.

Wigner, E. (premio Nobel en 1963): <http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1ticas>.