Matriz Asociada a una Transformación Lineal. Una Mirada desde la Teoría APOE

Isabel **Maturana** Peña
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Chile
isamatup@hotmail.com
Marcela **Parraguez** González
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Chile
marcela.parraguez@ucv.cl
María **Trigueros** Gaisman
Instituto Tecnológico Autónomo de México.
México
trigue@itam.mx

Resumen

Basados en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), investigamos desde una postura cognitiva las construcciones y mecanismos mentales necesarios para construir la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. Diseñamos una descomposición genética para el teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, esto es, investigar, mediante la metodología usada en la teoría APOE propuesta por Dubinsky y el grupo RUMEC, los procesos de aprendizaje del concepto. Reportamos en este trabajo; un caso de estudio, las evidencias mostraron que los estudiantes que construyen el concepto de coordenadas de un vector, no necesariamente lo generalizan hacia una matriz de coordenadas.

Palabras clave: matriz asociada, Transformación lineal, Teoría APOE.

Introducción

Nuestra propuesta de investigación estudió en profundidad las estrategias de aprendizaje que los estudiantes ponen en juego para aprender el teorema matriz asociada a una transformación lineal, dicho estudio se realizó durante el año 2013, en una universidad de Chile.

La enseñanza del álgebra lineal es un tema que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemáticas para carreras como ingeniería, licenciatura en ciencias o en economía; es así que surge el interés por investigar los procesos de enseñanza y aprendizaje de sus conceptos. Existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que muestran los estudiantes para comprender conceptos relativos al álgebra lineal. Por ejemplo en la mayoría de las universidades, los cursos de álgebra lineal no son exitosos (Harel, 1989a; Harel, 1989b; Sierpinska, 2000; Sierpinska, Dreyfus y Hillel, 1999). Sobre el concepto de transformación lineal, y en particular el de matriz asociada podemos citar algunas de las investigaciones recientes: Karrer y Jahn (2008) presentan una investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones lineales y el uso del Cabri Géomètre, como herramienta de apoyo, a fin de explorar las tareas que implican distintos registros de representación; su estudio mostró que uso del Cabri Géomètre promueve la identificación de las relaciones entre lo gráfico, y la matriz asociada a una transformación lineal. Roa y Oktaç (2010), proponen un modelo de construcción del concepto Transformación Lineal, el cual se sustenta en la teoría APOE, proporcionando como resultado de investigación, una descomposición genética del concepto, que consideró dos perspectivas de construcción, determinados por diferentes mecanismos mentales: el primero por la coordinación de procesos y el segundo por la aplicación de acciones específicas sobre objetos iniciales. Montiel y Batthi (2010) abordan la problemática de enseñanza de los conceptos de la matriz cambio de base y la representación matricial de las transformaciones lineales, bajo el enfoque ontosemiotico, centrando su atención en el rol de problemáticas semánticas y gestuales en la interacción en el aula; Bagley, Rasmussen y Zandieh (2012) centran su investigación en la relación conceptual que los estudiantes establecen entre las matrices y las funciones lineales, en su informe determinan que algunos estudiantes concilian ambos conceptos, y que son estos capaces de trabajar con matrices sin dificultades. Por el contrario los que no articulan el concepto de función con el de matriz se les trae dificultades. Wawro, Larson, Zandieh y Rasmussen (2012) presentan en su trabajo una trayectoria hipotética de aprendizaje, sobre el concepto de transformación lineal y su relación con la multiplicación de matrices.

Sin embargo las investigaciones reportadas no han hecho énfasis, propiamente tal, en aspectos cognitivos importantes de la transformación lineal en su perspectiva matricial, como por ejemplo en el Teorema Matriz Asociada a una Transformación Lineal (TMATL), dicho teorema establece que; sean *V* y *W* espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo K, $T: V \longrightarrow W$ una transformación lineal, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de *V* y $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ una base de *W*. Los vectores $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ están en *W* y por lo tanto, cada uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base *B':*

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m. \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$[T(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \dots \ [T(v_n)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix};$$

y la matriz asociada a la transformación lineal *T* en las bases *B* y *B'*, que rotulamos como

$[T]_B^{B'}$ es $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

tal que $[T]_B^{B'}[v]_B = [T(v)]_{B'}$, para todo *v* en *V*. (Poole, 2006).

Consideramos son dos las principales razones de por qué es importante el aprendizaje de este teorema. En primer lugar, el Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, proporciona una manera eficiente de llevar las transformaciones lineales a un equipo digital. La segunda razón es teórica; consideremos *A* matriz asociada a una transformación lineal *T*, esta elección depende de bases *B* y *B′*, normalmente uno elegiría *B* y *B′* para hacer el cómputo de matrices de coordenadas, tan simple como sea posible, cuando esto se hace en la forma correcta la matriz *A* puede proporcionar información importante sobre la transformación lineal.

Como objetivos de Investigación nos propusimos determinar las construcciones y mecanismos mentales que pone en juego un individuo como estrategia cognitiva para construir el Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. En el lenguaje de la teoría APOE: diseñar y evidenciar una descomposición genética del teorema.

Teoría APOE

La investigación usó la teoría APOE desarrollada por Dubinsky y el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Actualmente en Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014) se presentan los elementos de la teoría y su uso en investigaciones en Educación Matemática. Dubinsky se basa en la abstracción reflexiva de Piaget para describir la construcción de objetos mentales, y distingue varios tipos de mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, y reversión. Estos originan diferentes construcciones mentales: acciones, procesos, objetos, esquemas (APOE).

Consideremos *F* de concepto matemático –Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal–. Un individuo posee una concepción acción de *F* si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso de *F* si puede realizar una operación interna que hace (o imagina) esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. Si piensa en un proceso como un todo, donde realiza y construye transformaciones sobre su totalidad ha encapsulado el proceso en una concepción objeto de *F*. Un esquema de aquel trozo es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. La coherencia es la capacidad para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si este permite solucionar una situación matemática particular y usarlo en tal caso. Un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado.

Una descomposición genética, (DG), describe en detalle los aspectos constructivos de *F* para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales. Tal DG no es única, pues depende de los caminos de construcción y de las estructuras mentales previas.

Diseño Metodológico de la investigación

En esta investigación se propuso comprender los procesos mentales que operan en las estrategias de aprendizaje del Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal; para ello, se utilizará la teoría cognitiva APOE como marco teórico y metodológico, al cual se le incorpora el estudio de caso (Stake, 2010). Los estudio de caso son particularmente apropiados para realizar investigaciones en un determinado periodo de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad de su enseñanza-aprendizaje Arnal, J. del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Las unidades de estudio fueron alumnos chilenos de una universidad del país, de las carreras de pedagogía y licenciatura en matemática. Los estudiantes de esta unidad de estudio trabajada como "caso", se vinculan con las siguientes categorías e indicadores: estudiantes exitosos académicamente, experiencias previas, avance curricular, ejercitan ampliamente en matemática, estudiantes voluntarios, heterogeneidad en los procesos de formación de los estudiantes, accesibilidad de los investigadores.

Se trabajó con una unidad de análisis de 20 estudiantes, atendiendo a los criterios antes señalados y se diseñaron protocolos de entrevistas semi-estructuradas, previstas por la teoría las cuales se video grabaron. Al caso de estudio se le aplicó el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual estableció: un análisis teórico, conocido como DG; un diseño, basado en la DG teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Arnon *et al.,* 2014). La aplicación de este ciclo permite obtener una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que realizan los estudiantes; y a partir del análisis de los datos obtenidos, se lo puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos.

Descomposición genética hipotética

A continuación presentamos parte del relato de la descomposición genética propuesta en la investigación para construir la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. Bajo la hipótesis de la teoría APOE y las nociones matemáticas sobre la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, sostenemos que:

Para que un estudiante construya la Matriz Asociada a una Transformación Lineal como objeto, es necesario que muestre una construcción objeto del concepto espacio vectorial de dimensión finita, de esta forma consideramos dos espacios vectoriales V y W, con dimensiones finitas: digamos n y m respectivamente, para luego, desencapsular de este objeto; por una lado bases ordenadas $B=\{v_1,v_2,\dots, v_n\}$ y $B'=\{w_1,w_2,\dots, w_m\}$ de los espacios V y W respectivamente como procesos y la pertenencia de un vector w al espacio vectorial W, también como proceso. Paso seguido se dan dos coordinaciones de los procesos antes mencionados a través, uno de la transformación lineal y el otro por medio de la combinación lineal de vectores. Específicamente, la primera coordinación, mediante la transformación lineal, es entre los procesos de las bases ordenadas B y B' de V y W respectivamente, donde se calculan mediante la transformación lineal las imágenes de los vectores de la base B. La segunda coordinación es entre los procesos base ordenada B' de W, con la pertenencia de un vector w a W, se coordina a través de la combinación lineal de vectores, dando origen al proceso de expresar w como combinación lineal de los vectores de la base ordenada B' de W, este nuevo proceso se encapsula en el objeto coordenada de vector w en la base B', es decir, $[w]_{B'}$. En la Figura 1 se muestra en el esquema la coordinación de los procesos que se obtienen de desencapsular el objeto coordenada y el proceso que obtuvimos de la coordinación mediante la transformación lineal, ambos nuevamente serán coordinados por la generalización dada por el cuantificador que determina que el proceso se repetirá en todos los vectores de la base ordenada B de V, de esta forma se obtiene la matriz de coordenadas , es decir un ordenamiento de las coordenadas de la imágenes, este proceso es encapsulado en el objeto matricial y rotulado como $[T]_B^{B'}$.

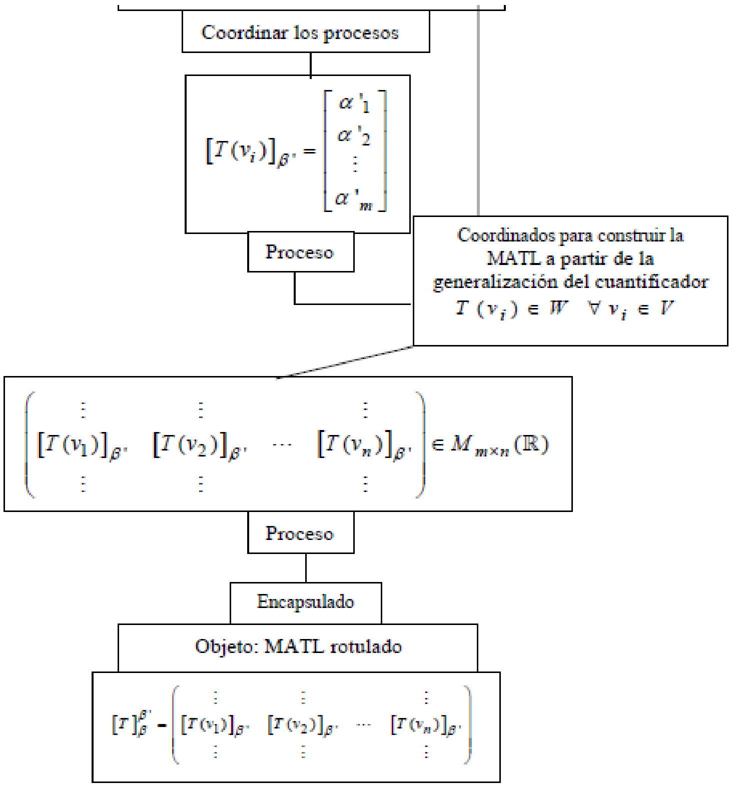

Figura 1. Detalles de la DG de la Matriz Asociada a una Trasformación Lineal.

Por otra parte, la DG da cuenta de la desencapsulación de los objetos matriz rotulada de coordenadas y las coordenadas de un vector v de V, ambos objetos desencapsulados como procesos son coordinados por el producto matricial, formando una matriz resultante de dicho producto, es decir $[T]_B^{B'}[v]_B$ lo cual es un proceso el que se podrá encapsular en un objeto matricial y posteriormente rotular como $[T(v)]_{B'}$.

En búsqueda de evidencias empíricas para la DG

Diseñamos un cuestionario de 5 preguntas, con la intención de documentar las construcciones y mecanismos mentales necesarios para construir la Matriz Asociada a la Transformación Lineal. En anexo 1 y tabla 1, se encuentran las preguntas realizadas en el cuestionario completo. Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada una de las preguntas. Hemos seleccionado dos preguntas del cuestionario, para mostrar parte de las evidencias obtenidas, que a continuación serán analizadas a la luz de la DG.

Pregunta 4 del cuestionario

Determine la matriz asociada a la transformación lineal definida desde $IP_2[x]$ (polinomios de grado menor o igual a dos) a $\mathbf{R}^3$, por $T(ax^2+bx+c)=(a+c, a-b, b)$, en las bases $B_4=\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$ y $B_5=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,01)\}$ de $IP_2[x]$ y $\mathbf{R}^3$ respectivamente.

La pregunta propone determinar si el estudiante muestra una construcción proceso del Teorema Matriz Asociada a Transformación Lineal. Para ello, como se muestra en la figura 1, se considera el tramo en la DG, donde debe coordinar los procesos e incorporar la generalización.

Es así que el estudiante da evidencias de tener una construcción proceso producto de la generalización de la matriz constituida por las coordenadas de las imágenes de los vectores de la Base B_4.

En la respuesta esperada**,** un estudiante debe calcular las imágenes de los vectores de la base B_4, es decir:

$T\left(x^2\right)=\left(1,\ 1,\ 0\right)$, $T\left(x^2+\mathrm{x}\right)=\left(1,\ 1,\ 1\right)$ y $T\left(x^2+\mathrm{x}+1\right)=\left(2,\ 0,\ 1\right)$. De esta forma calcula las coordenadas de cada vector imagen, es decir $\left(1,\ 1,\ 0\right)=\alpha_1(1,1,0)+\beta_1(0,1,0)+\delta_1(0,0,1)$, $\left(1,\ 1,\ 1\right)=\alpha_2(1,1,0)+\beta_2(0,1,0)+\delta_2(0,0,1)$ y $\left(2,\ 0,\ 1\right)=\alpha_3(1,1,0)+\beta_3(0,1,0)+\delta_3(0,0,1)$, de esta forma se obtienen los valores de las coordenadas de cada vector imagen, ordenado los sistemas que se obtienen en una matriz se tiene $\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, de donde la Matriz Asociada a una Transformación Lineal corresponde a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pregunta 5 del cuestionario

Considere la transformación lineal $F:\left\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\right\rangle \to \left\langle x^2, x+1\right\rangle$ *, definida por* $\left[F\right]_B^{B'}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$*; donde* $B=\left\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\right\rangle$ *y* $B'=\left\langle x^2, x+1\right\rangle$ *determine las coordenadas de la imagen del vector* $\left[v\right]_B=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

La pregunta permite observar si la construcción de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal es un objeto encapsulado del cual se reconoce su propiedad de continuar siendo una función. En la respuesta esperada, un estudiante para determinar las coordenadas del vector, debe aplicar $\left[F\right]_B^{B'}\left[v\right]_B=\left[F(v)\right]_{B'}$,por lo que se tiene que las coordenadas del vector pedidas son: $\left[F(v)\right]_{B'}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$.

El desempeño de los estudiantes y análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, a continuación presentamos una selección del trabajo realizado por cuatro estudiantes del caso a las preguntas antes descritas.

Análisis a posteriori Pregunta 4

La Figura 2, el estudiante E4 muestra una construcción objeto del concepto Matriz Asociada a una Transformación Lineal; al describir la construcción indicando las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base del espacio de partida, en un arreglo matricial.

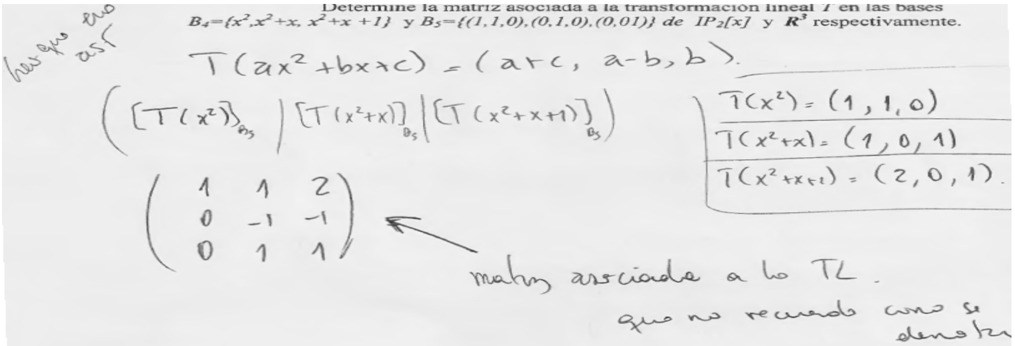

Figura 2. Producción del estudiante E4.

Esto nos permite decir junto con su trabajo a las otras preguntas que coordina las construcciones proceso de la imagen de un vector con el concepto de matriz, mediante la base, lo que hemos entendido como la generalización de los procesos de formación de las coordenadas de las imágenes mediante la transformación lineal.

Opuestamente a E4, en la Figura 3 se muestra la producción de E3, al que se le dificulta dar respuesta.

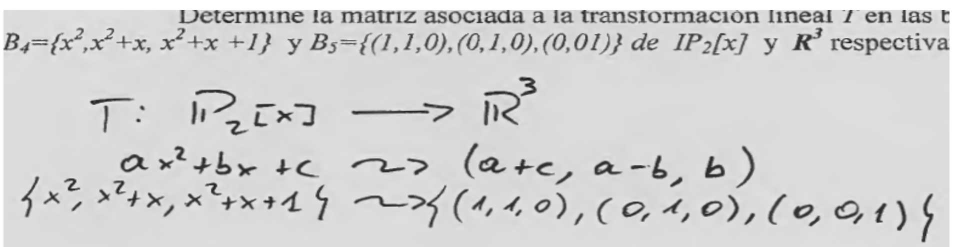

Figura 3. Producción del estudiante E3.

E3, no puede dar respuesta a la pregunta, pero en sus respuestas a las preguntas anteriores mostró una construcción proceso del concepto coordenadas de la imagen de un vector, esto es la construcción de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, a pesar de necesitar el concepto de coordenadas no es suficiente para asegurar su construcción.

Análisis a posteriori Pregunta 5

La Figura 4 muestra, la respuesta de E12 a la pregunta 5.

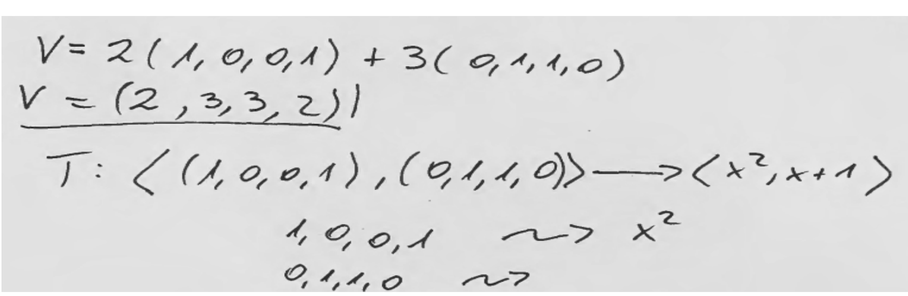

Figura 4. Respuesta que realiza el E12.

A la luz de la DG, podemos argumentar que no ha construido el concepto Matriz Asociada a una Transformación Lineal, pues a pesar de mostrar una construcción proceso del concepto combinación lineal y de base de un espacio vectorial, no le alcanza para dar respuesta, en las preguntas anteriores construye las coordenadas, peo no construye la matriz, lo que constituye un obstáculo para lograr dar respuesta a una pregunta que le pide operar con ella. Por el contrario el estudiante E9 muestra según Figura 5, la Matriz Asociada a una Transformación Lineal como una construcción mental objeto, la que desencapsula permitiéndole realizar transformaciones sobre él, y llegar a construir TMATL.

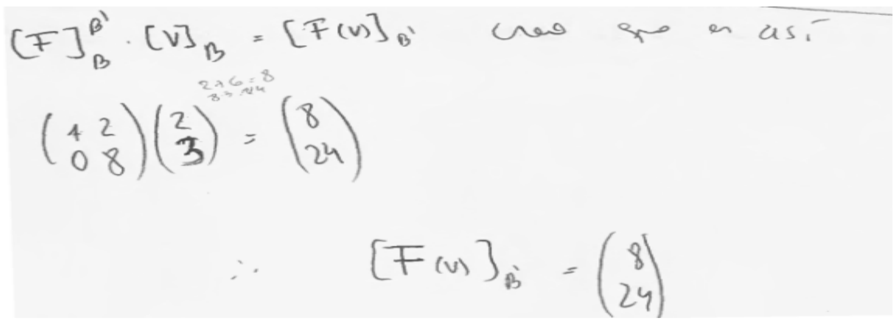

Figura 5. Respuesta que realiza el E9.

En el anexo 2 se encuentra la tabla 2, que resume la información sobre los análisis de las producciones escritas de todos los estudiantes del caso de estudio, y de todas sus respuestas al cuestionario completo, donde se ha determinado cuál es la construcción mental mostrada prevista en la DG.

Conclusiones

La investigación desde una postura cognitiva para el caso de estudio, muestra construcciones y mecanismos mentales para modelar el aprendizaje del TMATL, entre los que se destacan la construcción mental objeto del concepto coordenadas del vector y la coordinación entre los procesos: el proceso de coordenada de un vector que se repite en todos los vectores de la base ordenada del espacio dominio de la transformación, con el proceso matriz, para obtener como resultado un ordenamiento de las imágenes mediante la transformación. Acerca del teorema que nos ocupa, las evidencias obtenidas dan cuenta desde el carácter del modelo DG, levantando desde allí las siguientes conclusiones: la no construcción del concepto de coordenadas de un vector, imposibilita la construcción de la MATL, a su vez la determinación de las coordenadas de un vector, no basta para construir la matriz asociada la Transformación lineal. Según lo dispuesto en la DG, la dificultad que muestran los informantes del caso, está en que no han construido la coordinación entre: proceso que permite escribir a estos vectores imagen como combinación lineal de los vectores de la base del espacio dominio de *T,* con el de matriz para obtener un ordenamiento de las imágenes mediante *T*, en una matriz que se identifica con la matriz coordenadas.

Por otra parte, la construcción de la MATL como un objeto, no es garantía de haber construido la relación $[T]_B^{B'}[v]_B = [T(v)]_{B'}$ que establece el TMATL como un objeto.

En general podemos decir que las construcciones previstas en la DG que aparecen en el trabajo de los estudiantes son fundamentalmente, la construcción objeto del concepto de coordenadas de un vector, la construcción objeto de la MATL; y el reconocimiento de MATL como una función. Estos datos muestran que la DG diseñada parece dar cuenta de las construcciones necesarias en el aprendizaje del TMATL. Aunque este estudio no es suficiente para afirmarlo. Es necesario llevar a cabo más investigación que contemple entrevistas a los estudiantes para poder asegurarlo. Se propone, así, esta DG a la comunidad interesada en el aprendizaje de este tema como un posible modelo de enseñanza-aprendizaje del TMATL y como diseño de investigación que permita validarla.

Reconocimientos

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el Proyecto FONDECYT Nº 1140801. Los autores manifiestan sus agradecimientos por la buena disposición de todos los participantes en la investigación.

Referencias y bibliografía

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York: Springer.

Arnal, J. del Rincón, D., & La Torre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

Bagley, S., Rasmussen, C., & Zandieh, M. (2012). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics.*

Harel, G. (1989a). Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: aspects of familiarity and mode of representation. *School Science and Mathematics*, *89*, 49-57.

Harel, G. (1989b). Teaching in learning linear algebra; difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1-2), 139-148.

Karrer, M., & Jahn, A-P. (2008). Studying plane linear transformations on a dynamic geometry environment: analysis of tasks emphasizing the graphic register. *ICME 11- TSG 22*. Theme number 1.

Montiel, M., & Bhatti, U. (2010) Advanced Mathematics Online: Assessing Particularities in the Online Delivery of a Second Linear Algebra Course. *Online Journal of Distance Learning Administration*, *XIII*(II).University of West Georgia, Distance Education Center.

Poole, D. (2006). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna*. México: Thomson Internacional.

Roa, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 89-112.

Sierpinska, A. (2000).On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Dreyfus, T., & Hillel, J. (1999). Evaluation of the teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 7-40.

Stake, R.E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Barcelona: Labor.

Wawro, M., Larson, C., Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2012). A hypothetical collective progression for conceptualizing matrices as linear transformations. *Paper presented at the Fifteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Portland, OR.

Apéndice A

Anexo 1

Tabla1

Preguntas del cuestionario correspondientes a TMATL.

Pregunta 1	Sea T: $R^2 \to R^3$ transformación lineal definida por $T(x, y)=(x+y, x-y, x)$, considere $C_2=\{(1,0),(0,1)\}$ base canónica de R^2 y $C_3=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ base canónica de R^3. Determine las coordenadas de la imagen del vector (2,1) en la base C_3.
Pregunta 2	Sea T: $R^3 \to R^2$ transformación lineal definida por $T(x, y, z)=(x+y-z, x+z)$, considere $B_1=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ base de R^3 y $B_2=\{(1,1),(0,1)\}$ base de R^2 . Determine $[T(2,1,0)]_{B2}$
Pregunta 3	Sea T: $M_2(R) \to R^2$ transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(a+b-c, d)$. Considere $B_3=\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$ base de R^3 y $B_2=\{(1,1),(0,1)\}$ base de R^3. Determine $[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}]_{B2}$.
Pregunta 4	Determine la matriz asociada a la transformación lineal definida desde $IP_2[x]$ *(polinomios de grado menor o igual a dos) a* $\boldsymbol{R^3}$ **,** por $T(ax^2+bx+c)=(a+c, a-b, b)$, en las bases $B_4=\{x^2,x^2+x, x^2+x+1\}$ y $B_5=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,01)\}$ *de* $IP_2[x]$ y $\boldsymbol{R^3}$ respectivamente.
Pregunta 5	Considere la transformación lineal $F:\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle \to \langle x^2, x+1\rangle$, definida por $[F]_B^{B'}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; donde $B=\langle(1,0,0,1),(0,1,1,0)\rangle$ y $B'=\langle x^2, x+1\rangle$ determine las coordenadas de la imagen del vector $[v]_B=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Anexo 2

Tabla 2

Resumen de la recogida de datos TMATL. Fuente propia año 2013.

Pregunta / Estudiante	P1 Construcción mental del concepto coordenada de la imagen de un vector específico	P2 Construcción mental del concepto coordenadas mediante la Transformación lineal, en un vector específico	P3 Construcción mental del concepto coordenadas mediante la Transformación lineal, en un vector cualquiera	P4 Construcción mental del concepto MATL	P5 Construcción mental del Concepto MATL como función
E1	Acción	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E2	Acción	Proceso	Proceso	Acción	No Responde
E3	Proceso	Objeto	Objeto	Proceso	Objeto
E4	Proceso	Objeto	Objeto	Objeto	Objeto
E5	Acción	Acción	Acción	No Responde	No Responde
E6	Acción	Acción	Acción	No Responde	No Responde
E7	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E8	Acción	Proceso	Acción	No Responde	No Responde
E9	Proceso	Proceso	Objeto	Objeto	Proceso
E10	Proceso	Proceso	Objeto	No Responde	No Responde
E11	Acción	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E12	Acción	Acción	Acción	No Responde	No Responde
E13	Proceso	Proceso	No Responde	Proceso	Acción
E14	Proceso	Acción	Acción	No Responde	No Responde
E15	Proceso	Objeto	Objeto	No Responde	No Responde
E16	Proceso	Objeto	Objeto	No Responde	No Responde
E17	Proceso	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E18	Proceso	Objeto	Objeto	No	Proceso

				Responde	
E19	Acción	Proceso	Proceso	No Responde	No Responde
E20	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde