



## Utilização de materiais manipuláveis para a construção de conhecimentos sobre poliedros regulares

Marcello da Silva **Nunes**

Faculdade de Ciências Sociais e Tecnológicas - FACITEC

Brasil

[profmarcello@uol.com.br](mailto:profmarcello@uol.com.br)

Valter Luna da **Silva**

Faculdade de Ciências Sociais e Tecnológicas - FACITEC

Brasil

[valter.df@gmail.com](mailto:valter.df@gmail.com)

### Resumo

Esta pesquisa propõe uma, aplicação mediada pelo professor para a construção e a utilização de materiais manipuláveis, como elementos motivadores e facilitadores da aprendizagem por parte dos alunos do ensino fundamental e médio, sobre conceitos acerca dos poliedros regulares. É certo que a utilização de materiais concretos favorece a visualização e análise das propriedades geométricas, para isso utilizamos como base o modelo utilizado por Kaleff e Alves. Esses modelos foram trabalhados de forma experimental em turma, e em outra foi realizada uma mediação por parte dos pesquisadores, a fim de analisar quais as possibilidades de trabalho com a construção de poliedros regulares Neste sentido, buscamos neste trabalho desenvolver um conjunto de estratégias metodológicas para o ensino de geometria, os mesmos foram devidamente testados em turmas do ensino médio conclui-se que o desenvolvimento de estratégias como a apresentada pode resgatar o interesse dos educando par o estudo da geometria.

Palavras chaves: poliedros regulares, materiais manipuláveis, aprendizagem, mediação.

### Introdução

O Objetivo inicial é compreender as dificuldades enfrentadas pelos educadores de Matemática quando estes procuram maneiras diferentes de planejar uma aula, ou seja, mais dinâmica e interativa. Consciente do desafio de propor uma forma inovadora de planejar as aulas

de forma motivadora para o aluno exigiria uma preparação mais detalhada do conteúdo a fim de unir os materiais manipuláveis utilizados com o conteúdo relacionado.

Deste modo, faz-se necessário o desenvolvimento de estratégias metodológicas que, a partir do resgate da história dos conceitos matemáticos, possam inserir os alunos no mundo da investigação matemática, possibilitando que estes, por meio da manipulação destes objetos, possam extrair organizar e sintetizar seus atributos e, assim, consigam compreender os conceitos e relacioná-los com o mundo concreto em que vivem.

Neste trabalho, buscou-ser fundamentos teóricos, por meio de uma pesquisa bibliográfica, que justificassem a validade da utilização de materiais manipuláveis no ensino da geometria espacial, em especial no conteúdo de poliedros regulares.

Neste sentido, buscamos neste trabalho desenvolver um conjunto de estratégias metodológicas para o ensino de geometria, utilizando materiais de baixo custo e de fácil manipulação, que foram devidamente testadas em turmas do ensino médio. As estratégias e os resultados foram agrupados na forma de um guia, para que sejam utilizados por outros professores.

Para isso utilizamos dois grupos, um de controle e outro experimental. No grupo de controle utilizamos de uma metodologia tradicional (atividades encontradas em livros didáticos e aula expositiva). Já no grupo experimental utilizaremos materiais manipuláveis (modelo casca e modelo esquelético).

Aplicamos pré-teste, onde vamos verificar o nível dos alunos, um teste final onde comparamos o grau de evolução de cada turma. Esses testes foram definidos anteriormente a aplicação, os mesmos foram divididos em duas partes, quais sejam: a Geometria Plana; a Geometria Espacial.

### **Uma breve história dos poliedros**

A história nos mostra que a humanidade tem um grande fascínio pelos Poliedros Regulares, ou Poliedros de Platão, como também são denominados. Platão, que viveu por volta dos 400 anos a.c, desenvolveu profunda admiração sobre os polígonos regulares. Em um de seus diálogos, o Timeo, Platão apresenta uma descrição dos cinco poliedros regulares. Segundo Eves (2004, P. 114),

No trabalho de Platão, Timeu misticamente associa os quatro sólidos mais fáceis de construir – o tetraedro, o octaedro, o icosaedro e o cubo – com os quatro elementos primordiais empedoclianicos de todos os corpos materiais – fogo, ar, água e terra. Contornava-se a dificuldade embaraçosa em explicar o quinto sólido, o dodecaedro, associando-o ao Universo que nos cerca.

Esses sólidos carregam o nome de Platão em virtude de ser este o tratamento dado por Euclides, em seu livro XIII, embora a história nos conte que três desses sólidos – o tetraedro, o cubo e o dodecaedro – devam-se aos Pitagóricos, enquanto que o octaedro e o icosaedro se devam a Teeteto.

Os sólidos de Platão, assim como diversos outros objetos matemáticos, possuem uma história repleta de lendas e mitos, característicos de uma época de matemático. Porém, toda essa fascinante história, em geral, não é devidamente utilizada, de modo a motivar os educandos a se inserir de forma investigativa no mundo dos conceitos geométricos. As riquezas da história da matemática, que poderiam ser utilizadas pelos educadores como elementos motivadores para o estudo e a pesquisa em matemática é, na maioria das vezes, completamente desprezada. Esta é

uma das razões pelas quais a matemática é vista pelos educandos como algo frio, sem contexto e sem relações com o mundo em que ele vive.

Para Santos (1998), os problemas observados no ensino da geometria têm sua origem na formação dos educadores, como mostra a citação abaixo:

Porém, não é difícil perceber que o ensino da geometria nas escolas está doente. As causas desta doença se apresentam sob múltiplos aspectos, seja no que diz respeito à formação do próprio professor, seja por uma excessiva valorização do livro didático, que relega a geometria um pequeno capítulo ao final do livro, capítulo esse apresentado de modo fortemente fragmentado e completamente desvinculado da aritmética e da álgebra. (SANTOS, 1998, p.400).

### **Materiais manipuláveis e o ensino da geometria**

Reys (1971, apud NACARATO, 2005,) define materiais manipuláveis como sendo “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar”. Para o autor, esses materiais podem ser objetos os quais utilizamos em nosso dia-a-dia, ou podem ser objetos usados apenas para representar uma idéia. Porém, sendo parte integrante do mundo concreto do aluno, é inequívoca a validade da utilização destes materiais para a construção de conhecimentos matemáticos, com as devidas mediações do educador.

A construção de poliedros com materiais manipuláveis possibilita que o aluno visualize os conceitos espaciais. Cabe destacar, porém, que todo material manipulável possui limites para a sua utilização e não traz, em si mesmo, garantias de sucesso no alcance dos objetivos definidos para a atividade pedagógica. Essa utilização deverá ser planejada, levando-se em consideração as vantagens e desvantagens do material selecionado para esta atividade.

Para Matos e Serrazina (1996), caracterizam-se como vantagens para a utilização de materiais manipuláveis:

- a) A possibilidade do aluno construir relações com a Matemática;
- b) A interação com o material possibilita ao aluno momentos de reflexão, procura por respostas, formulação de soluções e criação de novos questionamentos;
- c) Um objeto pode ser utilizado para introduzir um conceito ou uma noção, servindo como ponto de apoio para as intervenções do professor;
- d) A manipulação e a reflexão sobre estes materiais podem ajudar os alunos na percepção de seus atributos e no teste de algumas propriedades;
- e) Os materiais manipuláveis proporcionam situações mais próximas da realidade, permitindo uma melhor compreensão dos problemas e facilitando a busca de soluções.

Porém, os mesmos autores alertam para as possíveis desvantagens desses objetos, visto que:

- a) Os alunos muitas vezes não relacionam as experiências concretas com a Matemática (escrita) formal;
- b) Não há garantia que os alunos vejam as relações nos materiais percebidas pelo educador;
- c) Pode haver uma distância entre o material concreto e as relações matemáticas, fazendo com que esse material tome as características de um símbolo arbitrário em vez de uma concretização natural.

Este alerta, em verdade, acaba por enfatizar a importância do planejamento e da mediação do educador. Com o devido cuidado, a utilização de materiais manipuláveis na construção de conhecimento matemáticos, aqui especialmente tratado para a construção de conhecimentos a cerca dos sólidos de Platão, além de possibilitar uma melhor percepção desses objetos matemáticos, ainda devemos considerar o caráter lúdico e motivador desses recursos.

Silva e Martins (2000, p. 4) ainda enfatizam as vantagens da utilização destes materiais na resolução de problemas, ao dizer que:

os materiais manipuláveis são fundamentais se pensarmos em ajudar a criança na passagem do concreto para o abstrato, na medida em que eles apelam a vários sentidos e são usados pelas crianças como uma espécie de suporte físico numa situação de aprendizagem. Assim sendo, parece relevante equipar as aulas de Matemática com todo um conjunto de materiais manipuláveis (cubos, geoplanos, tangrans, régua, papel pontado, ábaco, e tantos outros) feitos pelo professor, pelo aluno ou produzidos comercialmente, em adequação com os problemas a resolver, as idéias a explorar ou estruturados de acordo com determinado conceito matemático.

O uso de materiais manipuláveis na construção de conhecimentos, a cerca dos sólidos de Platão, além de tornar as aulas de geometria espacial mais aprazíveis e interessantes, tem um caráter motivador, pois os alunos se identificam com o lúdico - desafio de construir essas figuras.

Procura-se de mesma forma a maior compreensão do conteúdo por parte dos educando, a fim de melhorar a relação entre aprendizagem e ensino.

Além de tudo possibilita a utilização de materiais de baixo custo, para a construção dos poliedros como, por exemplo, a utilização de palitos de pirulitos, arames ou linha de náilon, que custa pouco, e ainda chama a atenção dos alunos pela beleza dos sólidos construídos com esses materiais.

### Modelo esquelético

De acordo com Kaleff (2003) podemos utilizar para a construção de um modelo esqueleto os seguintes recursos: varetas de madeira, pedaços de arame, canudos plásticos coloridos, palitos de dentes ou bolinha de isopor. A utilização do modelo esqueleto dos poliedros é muito bem aceita pelos alunos. Há uma nítida atração dos alunos por esse modelo. Tal fascínio advém não somente da beleza estrutural de suas arestas, mas também por permitir a observação do que está oculto no interior das faces dos sólidos.

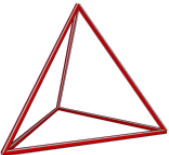




<b>Tetraedro</b> 	<b>Octaedro</b> 	<b>Hexaedro ou cubo</b> 
4 vértices; 6 arestas;	6 vértices; 12 arestas;	8 vértices; 12 arestas;
<b>Dodecaedro</b> 	<b>Icosaedro</b> 	
20 vértices; 30 arestas;	12 vértices; 30 arestas;	

Figura 1 - Poliedros regulares no modelo esquelético

Fonte: Arquivo pessoal.

Tendo como base a figura 1, fica nítido compreender que o tetraedro possui: 6 aresta e 4 vértices, que o octaedro possui: 12 aresta 6 e vértices, cubo ou hexaedro possui: 12 aresta e 8

vértices, dodecaedro possui: 30 aresta e 12 vértices, icosaedro possui: 30 aresta e 12 vértices como podemos observar nestes sólido geométrico as arestas estão sendo representado pelos canudos e que os vértices, nada mais é que a junção dos canudos.

**Modelos casca**

Já no modelo casca utilizamos de figuras montadas a partir de planificações, sólidos este que será feita de papel cartão ou cartolina, com isso os alunos podem chegar à seguinte conclusão: que o número de faces é exatamente o número de lados que ele pode tocar nos sólidos, podemos também perceber que esses lados são formados pela mesma figura plana seja ela triângulos, quadrados ou pentágonos e que o número de faces corresponde ao total de figuras necessária para contração do mesmo. Com tudo isso fica fácil para o aluno visualizar e identificar as propriedades dos sólidos de Platão.






<b>Tetraedro</b> 	<b>Octaedro</b> 	<b>Hexaedro ou cubo</b> 
4 Faces	8 Faces	6 Faces
<b>Dodecaedro</b> 	<b>Icosaedro</b> 	
12 Faces	20 Faces	

Figura 2 – poliedros regulares no modelo casca.

Fonte: Arquivo pessoal.

**Dedução do Teorema de Euler**

Após a coleta dos dados mostrado na figura 2, o professor pode demonstrar pelo método da dedução o Teorema de Euler. Só após essa dedução, o professor apresenta a fórmula que consiste: “ $A + 2 = F + V$ ”, onde  $A$  significa o número de arestas,  $V$  significa o número de vértices e  $F$  significa o número de faces, com isso fica mais fácil para o aluno a compreensão do teorema, é de como chegar a ele, sem contar que o aluno pode manipular este material utilizando da criatividade, imaginação, percepção e organização dos itens fundamentais para o desenvolvimento geométrico, contribuindo para a fixação dos conceitos básicos de triângulos, quadriláteros, retas, pontos e planos. E perceber como são formados os sólidos de Platão, transpondo do plano para o tridimensional e comparar as particularidades de cada figura geométrica.

## Metodologia

Para a execução dessa pesquisa foi realizado um estudo bibliográfico em referências pertinentes e disponíveis como livros, sites, artigos entre outros e uma pesquisa exploratória. Segundo Gil (1991), a pesquisa bibliográfica é elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de livros, artigos de periódicos e atualmente com material disponibilizado na internet. Já a pesquisa exploratória visa proporcionar maior familiaridade com o problema com vistas a torná-lo explícito ou a construir hipótese. Envolve levantamento bibliográfico, entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado e análise de exemplos que estimulem a compreensão. Assume uma forma de pesquisa “mista”, ou seja, ora bibliográficas, ora experimentais.

A amostra constituiu de 20 alunos do Colégio Estadual Mansões Odisseia em Águas Lindas de Goiás – GO. Todos pertencentes ao 3º ano do ensino médio pelo fato do conteúdo em questão ter sido ministrado no ano anterior. A Tuma foi dividida em dois grupos com dez alunos cada: *controle e experimental*. No grupo de controle os alunos foram divididos em dois grupos com cinco elementos cada, utilizamos uma metodologia “tradicional” qual seja, foram ministradas aulas baseadas em livros didáticos disponíveis, exposição oral por parte do professor, lista de exercícios; pretendia-se dessa forma a não utilização de materiais manipuláveis para a construção de conhecimentos sobre os poliedros regulares.

Com o primeiro grupo o objetivo era a compreensão por parte dos alunos no que diz respeito à comparação e diferenciação de figuras planas e espaciais. Convém ressaltar que a este grupo não foi oportunizado o contato com o material concreto, somente com planificações de figuras na forma de desenhos, as mesmas apresentadas ao primeiro grupo.

No grupo experimental como no primeiro grupo, os alunos foram divididos em dois grupos com cinco elementos cada, utilizamos materiais manipuláveis para a construção de conhecimentos sobre poliedros regulares com o modelo casca e modelo esquelético, além de uma exposição oral por parte dos pesquisadores.

Durante a construção foram sendo discutidas as informações e conceitos utilizados nas mesmas, convém ressaltar que as discussões foram realizadas dentro dos grupos de aplicação com a mediação dos pesquisadores.

Para atingir o objetivo estabelecido em nossa pesquisa analisamos a efetividade da utilização de materiais didáticos manipuláveis no trabalho pedagógico com poliedros regulares objetivávamos a demonstração através de estruturas construídas sobre poliedros o Teorema de Euler. Utilizando como auxílio esses materiais, e diferentes tipos de estruturas, como planificações, para minimizar dificuldades sobre a visão tridimensional dos sólidos geométricos.

### Seqüências de orientações realizadas nas oficinas - Construindo Tetraedro Regular

Como já observado, o tetraedro regular é formado por quatro triângulos equiláteros. Vamos começar a construção dos sólidos pele triângulos equiláteros, ou seja, pela sua planificação. Primeiro com o auxílio da régua e do lápis traçar um segmento de reto de 11,5cm. Logo em seguida com o auxílio do compasso ou transferidor marque um ângulo de 60 graus, formando assim três pontos equidistantes, ligue estes pontos para obter o triangulo equilátero. Com o auxílio da tesoura recorte o desenho. Como demonstra a figura 3

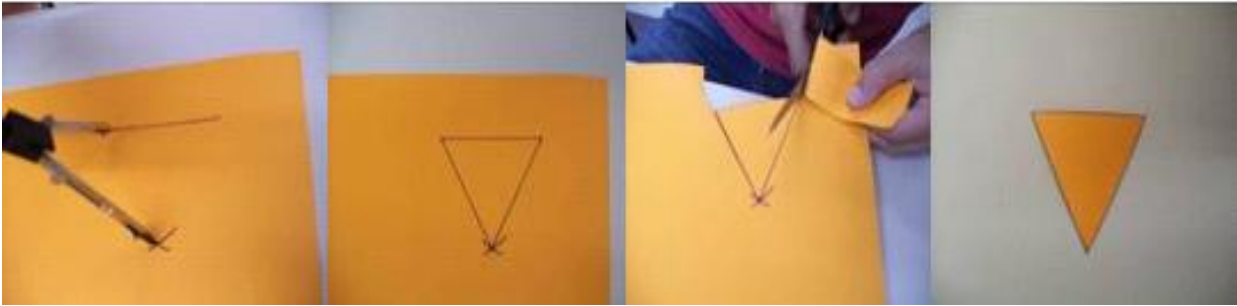


Figura 3 – construção do tetraedro.

Fonte: Arquivo pessoal.

Agora é pontilhar por dentro do triângulo equilátero, outro triângulo menor, com uma diferença de 0,8 cm para dentro da área do triângulo, depois dobre (para facilitar o trabalho faça um leve risco com estilete na linha pontilhada para realizar a dobradura. Recorte os triângulos e, posteriormente, perfure os vértices de todos os triângulos. Por último recorte os cantos de cada lado do triângulo; como demonstrado na figura 4.



Figura 4 – construção do tetraedro.

Fonte: Arquivo pessoal.

Repetir a operação mais três vezes; obtendo assim quatro triângulos equiláteros. Faça agora a montagem da figura utilizando ligas de borracha para unir os lados dos triângulos; lembrando que esta montagem já faz parte da oficina. Primeiro pegue dois recorte dos triângulos equilátero e com o auxílio da liga, encaixe no vértice ou extremidade dos triângulos equiláteros. Pegue a terceira figura e una com as outras duas como demonstra a figura 5.



Figura 5 – construção do tetraedro.

Fonte: Arquivo pessoal.

Pegue o último triângulo e una, e está pronto o tetraedro figura 6.



Figura 7 – construção do tetraedro

Fonte: Arquivo pessoal.

### Análise dos resultados

Os resultados deste estudo apoiam-se a idéia contida na *Matriz de Referência de Matemática do Saeb: Temas e Seus Descritores – 3º Ano do Ensino Médio* especificamente nos descritores: *D1 – Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade; D3 – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas; D4 – Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.*

Foram realizados quatro testes em ambos os grupos (*controle e experimental*) sendo dois pré-teste para avaliarmos os níveis de cada grupo e dois pós-teste para acompanharmos a evolução e realizarmos a comparação.

No pré-teste, o teste um é composto exclusivamente da geometria plana, para termos uma noção de como estavam nivelados ou não os grupos. Comparando a partir dos acertos individuais de cada educando do grupo experimental e grupo controle, os resultados foram os seguintes: o grupo experimental teve um aproveitamento médio de 31%. O grupo controle teve um aproveitamento médio de 29%, ou seja, a turma esta mais ou menos no mesmo nível.

O teste dois é composto de questões de geometria espacial. Comparando a partir dos acertos individuais de cada educando do grupo experimental e grupo controle, os resultados foram os seguintes: o grupo controle teve um aproveitamento médio de 10% quanto ao grupo experimental, o aproveitamento ficou abaixo dos 10%.

No pós-teste aplicamos os testes três (geometria plana) e quatro (geometria espacial). Esses foram realizados após a intervenção dos professores. Comparando a partir dos acertos individuais de cada educando do grupo experimental e grupo controle, os resultados foram os seguintes: no teste três (geometria plana), o grupo controle teve um aproveitamento médio de 48% enquanto o grupo experimental teve um aproveitamento médio de 81%.

No teste quatro (geometria espacial), o grupo controle teve um aproveitamento médio de 55% enquanto o grupo experimental teve um aproveitamento médio de 84%.

Analisando os dois grupos podemos observar que o grupo experimental teve uma evolução média de 423,07%, pois passou de um aproveitamento médio de 19,5% no pré-teste para 82,5% no pós-teste, ou seja, depois da intervenção, enquanto no grupo controle a evolução foi menor passando de um aproveitamento médio de 19,5% na média dos dois teste para um aproveitamento médio nos dois teste de 51,5% ou seja, teve uma evolução de 264,10% bem menor que do grupo experimental.



## **Conclusão**

Vale lembrar que no ensino e aprendizagem da Matemática apresenta grande dificuldade tanto para os professores, quanto para os educandos. Muitas vezes os educandos não conseguem compreender os conteúdos, pois não conseguem relacionar o mesmo com a sua vida diária, por outro lado os professores relatam que os educandos não prestam muita atenção no conteúdo desenvolvido mostrando pouco interesse nas aulas. Por conta de tudo isso é cada vez mais frequente alunos que são promovidos às séries posteriores sem conseguir acompanhar as matérias desenvolvidas na nova série, pois falta base, principalmente quando se trata de geometria espacial.

Por conta disso este trabalho propôs o desenvolvimento de estratégia a fim de resgatar o interesse dos educandos com o estudo da Geometria espacial, para isso utilizamos aulas práticas com auxílio de materiais manipuláveis além dos métodos tradicionais, procurando também um contexto histórico para o conteúdo desenvolvido.

Durante o período de desenvolvimento deste trabalho foram desenvolvidos estratégias de atividades, para a construção de poliedros utilizando do raciocínio e das planificações onde obtivemos resultado favorável.

Como podemos observar o grupo experimental teve um aproveitamento melhor do que o grupo controle, ficando assim comprovado que a utilização de materiais didáticos alternativos é de grande valia para a aprendizagem da geometria espacial.

Segundo Schliemann; Santos; Costa, a utilização destes materiais manipuláveis não quer dizer garantia de sucesso no aprendizado do educando, o professor tem um papel importante neste processo, pois depende dele de como esse material vai ter relação com o conteúdo desenvolvido.

Nenhum material didático – manipulável ou de outra natureza – constitui a salvação para a melhoria do ensino de Matemática. Sua eficácia ou não dependerá da forma como o mesmo for utilizado. ‘não é o uso específico do material concreto, mas, sim, o significado da situação, as ações da criança e sua reflexão sobre essas ações que são importantes na construção do conhecimento matemático’ (Schliemann; Santos; Costa, apud Nacarato, 2005, p.5).

Ressaltamos a importância dessas construções numa forma de minimizar dificuldades na hora de trabalhar com sólidos geométricos como afirma Kaleff (2003) em seu livro *Vendo e Entendendo Poliedros*, assim como Alves (2006.) em seu livro: *A ludicidade e o ensino de matemática*.

Este trabalho enfatizou as construções de poliedros visando implementar o processo de aprendizagem de geometria espacial. Essas construções servirão para apoiar as aulas de matemática no ensino médio, podendo assim ser objeto de pesquisa e aprofundamento do conhecimento tanto do professor quanto do aluno. Tendo em vista, a complexidade e a versatilidade desse material, outros trabalhos poderão aprofundar esse estudo, suscitando novas aplicações.

### Bibliografia e referências

- Alves, Maria Siqueira. (2001). *A ludicidade e o ensino de matemática*. Campinas-SP. Ed. Papirus.
- Brasil. Ministério da Educação e Cultura. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília.
- D`Ambrosio, Ubiratan.(1999). *A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. Etnomatemática*. Disponível em:  
<http://vello.sites.uol.com.br/unesp.htm>.
- Eves, Howard. (2004). *Introdução à história da matemática*; Tradução de Higino H. Domingues; Campinas: Ed. Unicamp.
- Florentini, D.; Miorim, M. Â. (1990). *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino de Matemática. Boletim SBEM – SP*, Ano 4, nº 7. Disponível em:  
<http://www.matematicahoje.com.br>.
- Gil, Antônio Carlos – (1991) *Como elaborar Projetos de Pesquisa*. São Paulo. Ed. Atlas.
- Kaleff, Ana Maria M.R. (2003). *Vendo e Entendendo e Entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos*. Niterói. Ed. UFF.
- Matos, José M.; Serrazina, Maria de Lurdes. (1996). *Didática da Matemática*. Lisboa. Ed. Universidade Aberta.
- Nacarato, Adair Mendes. (2004 - 2005). Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*, Ano 9, nº. 9-10. São Paulo. Ed. SBE.
- Pais, Luiz Carlos. (2000). Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. Caxambu. *Anais*. Disponível em:  
<http://www.anped.org.br/reunioes/23/textos/1919t.PDF>.
- Santos, Marcelo C.dos. (1998) Investigando os níveis de pensamento geométrico de Van Hiele. O caso dos quadriláteros. *Anais: VI Encontro Nacional de Educação Matemática 2v*. São Leopoldo - RS.
- Silva, A.; Martins, S. (2000, Out) Falar de Matemática hoje é .... *Millenium – Revista do ISPV*: n. 20. Disponível em: [http://www.ipv.pt/millenium/20\\_ect5.htm](http://www.ipv.pt/millenium/20_ect5.htm).
- Venturi, Jacir J. (1992). Euclides: não há estrada real para a Geometria. Disponível em:  
<http://www.geometriaanalitica.com.br/artigos/Matematica/EUCLIDES.pdf>.