Comportamiento de estudiantes universitarios al usar definiciones matemáticas

Valeria **Aguirre** Holguín
New Mexico State University
Estados Unidos
vah@nmsu.edu

Resumen

Frecuentemente estudiantes universitarios encuentran dificultades para utilizar apropiadamente las definiciones matemáticas, particularmente en la construcción de demostraciones. Algunos programas académicos requieren que los estudiantes desarrollen habilidades para construir demostraciones matemáticas que intrínsecamente requieren del uso correcto de definiciones. Poca investigación (e.g., Dahlberg & Housman, 1997; Edwards & Ward, 2004) ha indagado cómo los estudiantes universitarios se conducen al enfrentarse con definiciones matemáticas que desconocen. La pregunta de interés a la presente investigación es: ¿Cómo usan las definiciones los estudiantes universitarios, particularmente en la elaboración y evaluación de ejemplos, en la construcción de demostraciones y determinando la falsedad o veracidad de proposiciones? Los datos fueron recolectados a través de entrevistas semiestructuradas a 23 estudiantes inscritos en un curso de transición a la demostración. Se eligieron cinco definiciones: función, continuidad, ideal, grupo e isomorfismo. Cada estudiante fue entrevistado sobre una definición. Observaciones y resultados preliminares son presentados a continuación.

Palabras clave: definición matemática, demostración, educación matemática universitaria.

Introducción

El papel de las definiciones en matemáticas es fundamental. Tal afirmación puede parecer obvia y casi natural para matemáticos, profesores y a quien esté familiarizado con la estructura y el lenguaje de la matemática. Algunos profesores aparentemente esperamos que los estudiantes sean capaces de entender las definiciones y procedan entonces a hacer uso de ellas (Alcock, 2010). Sin embargo,

> "Muchos estudiantes no utilizan las definiciones de la forma en que lo hacen los matemáticos, incluso cuando pueden expresar y explicar correctamente las definiciones; muchos estudiantes no utilizan definiciones de la manera que hacen los matemáticos, incluso en la aparente ausencia de cualquier otro curso de acción" (Edwards & Ward, 2004).

Este estudio tiene el objetivo de encontrar información sobre cómo los estudiantes de universidad proceden cuando se enfrentan a nuevas (para ellos) definiciones matemáticas. He reducido las preguntas de investigación a las siguientes:

- ¿Cómo es que los estudiantes usan las definiciones matemáticas nuevas para ellos? ¿Cuáles son sus reacciones naturales?
- ¿Qué contribuye a sus dificultades con el desempaque[1] del contenido y el uso de definiciones matemáticas abstractas?
- ¿Cómo utilizan una definición en tres escenarios diferentes: generación y evaluación de ejemplos, construcción de demostraciones y en el razonamiento de preguntas del tipo verdadero/falso?

Esta investigación se desarrolla dentro del entorno (marco teórico y de investigación) de un experimento desarrollado por Selden y Selden (1995, 2008, 2009) para la enseñanza de un curso de transición a la demostración para estudiantes alrededor del segundo año de universidad con diferentes perfiles, tales como matemáticos, ingenieros y futuros maestros de secundaria y preparatoria. El experimento es una versión modificada del conocido método Moore, implementado inicialmente, por su creador, para la formación de matemáticos. El método Moore es un método constructivista utilizado especialmente para mejorar las habilidades del estudiante para construir demostraciones. El curso consiste se lleva a cabo en base a un conjunto de notas diseñadas para que el estudiante desarrolle habilidades requeridas en cursos de matemáticas avanzadas. No hay libro ni clase tradicional. El estudiante escribe sus demostraciones, se le ofrece crítica y retroalimentación en grupo e individualmente. Dentro de tal marco teórico, esta investigación se concentra particularmente en la parte referente a las interpretaciones operables de proposiciones, concepto muy similar al de ‘definiciones operables’ introducido por Bills y Talls (1998), y las representaciones formales e informales de un enunciado matemático. Más específicamente en el rol que juegan las definiciones en las construcción de las demostraciones matemáticas.

Antecedentes

Varias investigaciones han revelado que los estudiantes presentan una variedad de dificultades para comprender y utilizar las definiciones (Furina, 1994; Zazkis y Leikin, 2008; Fernández, 2004; Roh, 2008), muchas de los cuales podrían ser atribuidas a la "estructura de la matemática como es concebida por los matemáticos en comparación con los procesos cognitivos implicados en la adquisición de conceptos "(Vinner, 1991). Pierie y Kieren (1994) desarrollaron un modelo anidado de entendimiento. Su teoría sugiere que la comprensión no siempre es un

[1] Traducción del inglés “unpacking”. Término utilizado por Selden y Selden (1995) para referirse a la comprensión de los detalles implícitos, a veces no necesariamente visibles, en un enunciado matemático.

proceso lineal o continuo, sino que quienes tratan de aprender se mueven hacia adelante y hacia atrás dentro de diversos niveles de comprensión. Los intentos iniciales de los estudiantes para entender un nuevo concepto requieren de representaciones y acciones que involucran el concepto, luego el próximo nivel de desarrollo son las imágenes de las representaciones y/o acciones anteriores para refinarlas y más tarde manipularlas. Más adelante, un proceso más analítico comienza, los estudiantes examinan y analizan las propiedades del concepto a formalizar y generan nuevas estructuras que les permiten hacer un uso correcto del concepto (Pierie y Kieren, 1994).

De acuerdo con Tall (1980),

> "la imagen del concepto es considerada como la estructura cognitiva que consiste de la imagen mental y las propiedades y procesos asociados con el concepto ... muy distinta de la definición del concepto, que es la forma de palabras utilizadas para describir el concepto".

El desajuste entre la imagen del concepto desarrollado por un individuo y las implicaciones reales de la definición del concepto a menudo conduce a obstáculos en el aprendizaje. El trabajo de varios investigadores lo ha confirmado (Alcock & Simpson, 2002a, 2002b; Wihelmi, Godino y Lacasta, 2007; Zaslavsky y Shir, 2005).

Parameswaran (2010) se ha ocupado de cómo los matemáticos se acercan nuevas definiciones; su investigación muestra que los ejemplos y los no ejemplos juegan un papel muy importante en el proceso de aprendizaje de una nueva definición. Sin embargo, a los estudiantes no se les pide con frecuencia generar ejemplos, la mayor parte del tiempo se les proporciona un ejemplo práctico o una ilustración (Reimann y Schult, 1996; Watson & Mason, 2002). Tampoco es frecuente que los estudiantes discutan y analicen la razón por la que un ejemplo propuesto es en realidad un ejemplo o un no ejemplo.

> " La relación entre los ejemplos, la pedagogía y el aprendizaje ha sido poco investigado, pero se sabe que los alumnos pueden hacer generalizaciones inadecuadas de conjuntos de ejemplos dados" (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson y Zaslavsky, 2006).

Watson y Mason introdujeron el concepto de 'espacio de ejemplos' como el conjunto de ejemplos desarrollados de acuerdo a la experiencia previa y en torno a lograr determinado objetivo (Watson & Mason, 2005). Zazkis y Leikin (2007) observaron la distinción entre ejemplos de conceptos matemáticos y ejemplos de procedimientos matemáticos; mi investigación se enfoca únicamente en el primer tipo.

Aunque hay algunos estudios que abordan el uso de las definiciones en la construcción de las demostraciones tanto de estudiantes como de matemáticos, parece haber mucho más que investigar en relación a la percepción de las definiciones matemáticas por los estudiantes, en especial tratando de describir las competencias necesarias para que puedan hacer un uso correcto de tales definiciones.

Metodología

Para abordar y posiblemente ofrecer respuesta a las preguntas de investigación, se diseñaron y se llevaron a cabo una serie de entrevistas semiestructuradas con estudiantes voluntarios que tomaban el curso de transición a la demostración durante el otoño de 2013 en una universidad del suroeste de los Estados Unidos de América. El protocolo de la entrevista fue diseñado para cada una de las cinco definiciones seleccionadas, para todas las entrevistas seguí el mismo formato. Tales definiciones fueron: función, continuidad, ideal, isomorfismo y grupo. Esta colección de definiciones abarca los contenidos de la mayor parte del curso. Entrevisté a 23 estudiantes, quienes conformaban casi el total de los estudiantes inscritos en la clase. Las entrevistas se llevaron a cabo de forma individual en una pequeña sala de reuniones. Cada grupo de cuatro o cinco estudiantes fue entrevistado aproximadamente dos semanas antes de que la definición particular fuera vista en el curso. Las conversaciones durante la entrevista fueron grabadas en audio y los estudiantes utilizaron una pluma electrónica LiveScribe, esto con el fin de luego ser poder de seguir sus respuestas en tiempo real. La pluma electrónica funciona a través de una pequeña cámara que documenta lo que el estudiante escribe al tiempo que lo hace. Se requiere de un papel especial que posee las características necesarias para ser leído por la pluma y esta sea capaz de transformar lo que se escribe en un archivo electrónico que luego puede ser trascrito al texto y analizarse con mayor detalle.

En base a mis intereses de investigación y con el apoyo de la literatura existente, quise que las entrevistas abordaran los siguientes cuatro puntos principales. En primer lugar, quise que los a alumnos se les presentará con una definición por primera vez, es decir, que fueran entrevistados sobre una definición que todavía no se hubiese visto en clase. En segundo lugar, decidí poner a prueba su capacidad para interpretar la definición, así que pedí a los participantes explicar la definición en sus propias palabras, generar algunos ejemplos que podrían ilustrar la definición, o hablar de lo que fuese que la definición trajera a su mente. En tercer lugar, deseaba encontrar información sobre su capacidad para hacer uso de la definición en la construcción de una demostración que no requiriese más que la definición en sí. Y en cuarto lugar, estaba interesada en analizar la forma en que pueden razonar sobre los enunciados del tipo falso/verdadero que, de la misma manera, requieran únicamente la definición para ser determinado su valor de verdad. Estos cuatro puntos fueron abordados a través del diseño de cinco páginas. Presenté una página tras otra a los estudiantes en una entrevista que en promedio tomó entre 60 y 90 minutos. Este diseño fue inspirado en parte por el trabajo de Dahlberg y Housman (1997) y la labor de Housman y Porter (2003).

A los estudiantes también se les permitió utilizar sus notas del curso durante la entrevista, así como todas las páginas dadas durante la entrevista misma. Mi papel durante la enseñanza del curso, en el cual se lleva a cabo mi investigación, no era el de profesor titular sino el de un asistente, por lo que mi interacción con los participantes durante las entrevistas fue, hasta cierto punto, natural y de confianza. Más que como una entrevista la sesión podría ser vista como una conversación sobre una definición matemática en particular. Traté de seguir con atención los posibles caminos divergentes tomados por los participantes.

El primer análisis de los datos se llevó a cabo teniendo en cuenta cada una de las cinco definiciones por separado. Me concentré en sólo una definición a la vez, el análisis de todos los datos obtenidos de las cinco páginas para las cuatro o cinco respectivos estudiantes que fueron entrevistados sobre una dada definición. El segundo análisis se hizo de acuerdo al número de página. Analicé el comportamiento general en todas las páginas, considerando en cada número de página a todos los participantes, independientemente de la definición.

Resultados preliminares y conclusiones

Algunos resultados que han surgido de los análisis confirman cuan intransigente puede ser nuestro conocimiento previo cuando se trata de comprender nuevas definiciones. Tal conocimiento puede aparentemente influir de una manera, no necesariamente beneficiosa, a la adquisición de nuevos conceptos. He encontrado evidencia que sugiere que entre más nueva es la definición para el estudiante, y menos relacionada con el lenguaje cotidiano, menor será la interferencia de los conocimientos previos inapropiados. Función y continuidad, por ejemplo, están relacionados con el Cálculo y el Álgebra (clases tomadas anteriormente), mientras que las definiciones de ideal e isomorfismo no trajeron ningún conocimiento matemático previo a la mente, por lo que los estudiantes se mostraron más tenaces en interesados en seguir la definición al pie de la letra. Curiosamente, el concepto de grupo trajo a la memoria el uso cotidiano de esta palabra, un estudiante comentó que bastaba solamente tener dos o más elementos para tener un grupo.

También he podido observar que los estudiantes tienden a descuidar los detalles de una definición, si no es que la definición completa, en la construcción de una demostración. Saltan palabras o símbolos que no parecen decirles nada importante. No se muestran plenamente conscientes de que estos detalles se proporcionan por una importante razón. Muy pocos de ellos se esforzaron por seguir lo dicho en la definición. Otra observación es que los estudiantes se mostraron reacios a proporcionar ejemplos de una definición nueva, pero al indagar, el investigador, con paciencia y proporcionando un poco más de tiempo, los estudiantes a menudo fueron capaces de proporcionar un ejemplo o al menos de darse cuenta de que su ejemplo o sus ideas eran inapropiadas. Tales observaciones sugieren que entre más nuevo es el concepto (para ellos), más difícil es proporcionar ejemplos que satisfacen la definición o ejemplos que no la satisfacen; pero a la misma vez entre más nuevo es el concepto menor es la interferencia de los conocimientos previos inapropiados.

Otro de los comportamientos que he tratado de documentar es que tan natural es para los estudiantes pensar y generar ejemplos inmediatamente después de una definición dada sin que tal instrucción les sea dada. De los 23 participantes en esta investigación solo nueve trataron de generar un ejemplo sin que les haya sido requerido. Esto sugiere que generar ejemplos parece ser un proceso al que los estudiantes no están acostumbrados, a pesar de que muchos suelen comentar que es a través de ejemplos que logran comprender mejor un concepto. Es decir, usualmente se requiere de ejemplos para comprender mejor una definición, pero intentar generar ejemplos uno mismo parece no ser tan usual.

En base a éstas y algunas otras observaciones he desarrollado una conjetura preliminar sobre las diferentes etapas por las que un estudiante pasa, o debería pasar, con el fin de aprender a utilizar correctamente las definiciones matemáticas en un contexto determinado. He encontrado evidencia para cada una de las siguientes cuatro etapas:

1) Entender que existe una diferencia entre las definiciones cotidianas y las definiciones matemáticas (como Edwards y Ward (2004) sugieren). Algunos estudiantes se muestran capaces de reconocer la importancia de la definición en matemáticas y su diferencia respecto a las definiciones en la vida diaria, pero aún así encuentran complicado hacer uso de ellas. Algunos tratan de mezclar los conceptos matemáticos con objetos o elementos que les son familiares. Cabe mencionar que algunos estudiantes no hacen tal distinción, tales estudiantes son considerados en la etapa 0.

2) Entender cuándo y dónde utilizar definiciones matemáticas. Algunos estudiantes comprenden que la definición tiene sentido dentro de un particular contexto y es en éste donde debe utilizarse de la manera en que la definición lo establece.

3) Recordar, buscar, y tratar de usar/seguir las definiciones, no necesariamente con éxito. Una vez que el estudiante ha comprendido el contexto dentro del cual una definición es relevante, intenta hacer uso de la definición como tal, apegándose lo más posible a ella. Esto no necesariamente implica que el estudiante haya adquirido la habilidad de hacerlo correctamente, pero al menos ha logrado comprender la importancia de considerar los detalles que la definición plantea.
4) Utilizar la definición apropiadamente (en el contexto dado). En esta etapa en la que el estudiante hace uso de la definición correctamente, es decir, se considera que el estudiante ha pasado por las etapas anteriores y es capaz de reconocer si un objeto satisface o no la definición.

Perspectivas

En base al desarrollo y los resultados preliminares de esta investigación considero el diseño de una intervención didáctica en la cual sea posible verificar la conjetura planteada en la sección anterior. De igual forma las observaciones registradas han tenido considerable impacto en el diseño del curso de transición a la demostración de donde fue tomada la información de la presente investigación. En conjunto con los profesores que imparten este curso consideramos implementar algunos nuevos métodos basados en los comportamientos observados en los estudiantes. Deseamos también que nuestras observaciones y resultados informen a docentes e investigadores que comparten nuestro afán de entender mejor la problemática que presentan los estudiantes principiantes en procesos de la demostración matemática.

Referencias

Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. *Research in collegiate mathematics education VII*, 63-91.

Alcock, L., & Simpson, A. (2002a). Definitions: Dealing with categories mathematically. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 28-34.

Alcock, L. J., & Simpson, A. P. (2002b). Two components in learning to reason using definitions. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level).*

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 126-154.

Bills, L., & Tall, D. (1998). Operable definitions in advanced mathematics: The case of the least upper bound. In A. Olivier and K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 104-111). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Dahlberg, R. P., & Housman, D. L. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 283-299.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, *111*(5), 411-424.

Fernández, E. (2004). The students' take on the epsilon-delta definition of a limit. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *14*(1), 43-54.

Furina, G. (1994). Personal reconstruction of concept definitions: Limits. Challenges in mathematics education: constraints on construction: *Proceedings of the 17th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia held at Southern Cross University*.

Housman, D., & Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(2), 139-158.

Parameswaran, R. (2010). Expert mathematicians' approach to understanding definitions. *The Mathematics Educator*, *20*(1), 43-51.

Reimann P., & Schult, T. (1996). Turning examples into cases: Acquiring knowledge structures for analogical problem-solving. *Educational Psychologist, 31*(2), 123-140.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 217-233.

Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, *29*, 123-151.

Selden, J., & Selden, A., (2008) Consciousness in enacting procedural knowledge. In *Proceedings of the Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (2008). Available at http://cresmet.asu.edu/crume2008/Proceedings/Proceedings.html.

Selden, J., & Selden, A. (2009a). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 339-354). New York and London: Routledge /Taylor & Francis.

Selden, J., & Selden, A. (2009b). Understanding the proof construction process. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI 19 Study Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 196- 201). Taipei, Taiwan: Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Tall, D. O. (1980). *Mathematical intuition with special reference to limiting processes*. Paper presented at the meeting of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematical Education, Berkeley, CA.

Watson, A., & Mason, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*(2), 237-249.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ, USA: Erlbaum.

Wilhelmi, M., Godino, J., & Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions: The case of the absolute value. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2*(2), 72-90.

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(4), 317-346.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2007). Generating examples: From pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics*, *27*(2), 15.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 131-148.