XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

Una propuesta dinámica para la enseñanza del álgebra matricial en carreras de ciencias económicas mediante el uso de la enseñanza basada en problemas*

Luis **García** Oropeza
Departamento de Economía, FACES, Universidad de Los Andes
Venezuela
garciaoropeza@gmail.com
Mar **Moreno** Moreno
Universitat de Lleida
España
mmoreno@matematica.udl.cat

Resumen

En esta propuesta partimos del fuerte vínculo entre las matemáticas y la economía, expuesta en Cámara (2000), con el fin de llevar las matemáticas de forma contextualizada al aula de clases en contraposición a la manera tradicional que se sigue en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Los Andes en Venezuela, para ello nos hemos valido de la Enseñanza Basada en Problemas (EBP). Concretamente, hemos seleccionado el álgebra matricial como objeto matemático por el fuerte vínculo entre esta área de las matemáticas y las ciencias económicas. Para este trabajo hemos seleccionado algunos problemas del contexto económico tomados de Kleiman & Kleiman (2004) y a partir de estos construimos toda la estructura necesaria para resolver los mismos y, al mismo tiempo, construir y afianzar el conocimiento de los objetos matemáticos implicados.

Palabras clave: didáctica, álgebra matricial, matemática contextualizada, economía matemática, enseñanza basada en problemas, resolución de problemas, educación universitaria o superior.

* Trabajo financiado por el Proyecto EDU2008-05254 titulado: "COMPETENCIA MATEMÁTICA, RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y TECNOLOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA", del Ministerio de Educación y Ciencia de España, Secretaría de Estado de Universidades e Investigación, Secretaría General de Política Científica y Tecnológica, Dirección General de Investigación, Plan Nacional de I+D+I (2008-2011), Programa: Investigación Fundamental, Subprograma: Proyecto de investigación fundamental no orientada.

Introducción

Este trabajo muestra algunos resultados parciales de un proyecto que propone una metodológica alternativa para la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario en carreras de ciencias económicas, específicamente nos centramos en el álgebra matricial, donde buscamos explotar el tema de la contextualización de disciplinas afines a las matemáticas y la importancia de la misma a la hora de estudiar una situación problemática donde se encuentran involucrados conceptos no-matemáticos. Conviene dejar claramente determinado que en esta comunicación se muestran los resultados vinculados a la propuesta metodológica vista como instrumento de investigación, sus pros y sus contras. Todo el desarrollo de nuestra propuesta está enmarcado en la enseñanza basada en la resolución de problemas (EBP). En nuestro caso partimos de la formulación de un *problema macro*, el cual exige aplicar determinadas operaciones propias del álgebra matricial, pero de forma simultánea, también se van estudiando conceptos propios de la economía que más adelante serán utilizados para las interpretaciones económicas que exige cada parte del problema. De esta manera estamos abordando el "*conocimiento dual*" que se menciona en García (2009). Mediante este problema macro, buscamos abarcar desde la introducción al *concepto* o *definición* de matriz hasta operaciones como la *suma*, *resta* y *multiplicación* de matrices, la *multiplicación por escalar*, pasando por la importancia que implica el *orden* de una matriz en la multiplicación y su posterior *interpretación económica* de los resultados obtenidos. Otro punto que destacamos en esta propuesta tiene que ver con la *organización de los elementos* en la matriz, la cual no es única, de manera que se explota la *trasposición* de matrices. Esta actividad requiere de un mayor compromiso por parte del estudiante en su proceso de aprendizaje, pero también demanda un más compromiso, responsabilidad y formación profesional en el docente.

Tema de estudio

En los programas de las tres carreras vinculadas a las ciencias económicas (administración de empresas, contaduría pública y economía) en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Los Andes (FACES-ULA) en Venezuela, está como tema obligatorio de estudio el álgebra matricial y la programación lineal. En el caso del álgebra matricial, ésta forma parte de los cursos de Matemáticas 1 y Matemáticas 3 (primer y tercer semestre, respectivamente). La enseñanza de las matemáticas que se imparte en la FACES-ULA es de forma tradicional y los estudiantes manifiestan que hay poca o ninguna conexión entre las matemáticas que aprenden y las ciencias económicas. Ante este escenario y partiendo de García *et al*. (2006a), García *et al*. (2006b) y García (2009), nos propusimos ahondar en una enseñanza de las matemáticas más próxima a las ciencias económicas y que involucrara al estudiante de manera más dinámica y proactiva en su propio proceso de aprendizaje, donde la contextualización económica jugara un papel fundamental, aprovechando el fuerte vínculo entre las matemáticas y la economía expuesta en Cámara (2000).

En resumen, el tema que nos propusimos estudiar consiste en la implementación de la EBP, en los programas de matemáticas de la FACES-ULA, como metodología alternativa de enseñanza y aprendizaje, resaltando la contextualización matemático-económica de cada problema, los conceptos económicos existentes en los problemas estudiados y discutidos en el aula de clases, la interpretación económica de los resultados que arroja cada problema. De manera que se apunte hacia un conocimiento dual (García, 2009), en este caso: matemáticas y economía.

Antecedentes

Lo que aquí se presenta puede entenderse como una consecuencia de la investigación desarrollada en García (2009); donde se estudió, entre otras cosas, la EBP como metodología alternativa para la enseñanza de las matemáticas, aunado a los trabajos de García *et al*. (2006a y 2006b). En estas dos referencias los autores exponen una serie de reflexiones sobre el uso de la EBP y sus consecuencias, tanto positivas como negativas. Por otra parte, estudios como Bridges & Hallinger (1992) y Gijselaers (1995), entre otros, nos abrieron las puertas para estudiar la contextualización matemático-económica haciendo uso de la EBP en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en carreras afines a las ciencias económicas.

Fundamentación teórica

Con lo dicho hasta ahora, es claro que el presente trabajo está enmarcado en la EBP, sin embargo, conviene dar una definición de lo que entendemos como EBP y algunas características de la misma. Para ello nos apoyamos en Lee & Bae (2008), Benito *et al*. (2005), Humphrey *et al*. (2005), Kolmos (2004), Lewis (2003) y Sonmez & Lee (2003), entre otros y definimos la EBP como **una estrategia metodológica activa, centrada en el estudiante y con el profesor como guía, que desafía a los primeros a generar un conocimiento a partir de la búsqueda de soluciones a través de problemas cuidadosamente planteados, los cuales están relacionados con su entorno profesional, académico o ambos, bien sea entre ellos o en grupos, en contraposición con la enseñanza centrada en lecturas y libros de texto; pero siempre orientados por el profesor o tutor**. Con la implementación de esta metodología, el proceso de enseñanza-aprendizaje se inicia con un problema matemático a ser resuelto, de tal manera que se genere en los estudiantes un "*conflicto cognitivo*" (Morales & Landa, 2004) y estos requieran de un nuevo o nuevos conocimientos para resolver el problema en cuestión.

Más allá de llegar a la respuesta correcta, lo que se busca es que los estudiantes analicen e interpreten el problema, identifiquen el o los contenidos disciplinares que se requieren para la solución y, así, generar una discusión sobre las posibles soluciones y las formas de llegar a éstas, donde la heurística juega un papel clave. Más aún, Lee & Bae (2008) se refieren a esta estrategia metodológica como una "*manera eficaz de proporcionar a los estudiantes de ser expuestos a situaciones del mundo real*" (su campo profesional en este caso) y de poder "*adquirir nuevas ideas en varias disciplinas*" al mismo tiempo. Por lo tanto, la entendemos como una actividad multidisciplinar que permite la interacción, siempre que se pueda, con diversas materias o asignaturas que conforman el currículo.

Características de la EBP

Ahora bien, caracterizar la EBP no resulta una tarea fácil, entre otras cosas por los fundamentos teóricos en los que se basa esta estrategia didáctica, tomemos en cuenta que la misma jamás ha sido desarrollada sobre la base de una teoría o varias teorías en particular, sino que, por el contrario, se ha desarrollado desde la práctica, donde el ensayo y el error han jugado un papel significativo (Kolmos, 2004).

En este orden de ideas, la autora antes citada sostiene que la EBP varía según el tema a tratar, la organización y políticas de la universidad, la cultura de los estudiantes y el profesor. No obstante, ella habla de ocho principios teóricos sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje asistido por EBP que, en líneas generales, forman parte del currículo, estos son: (1) El proceso de enseñanza-aprendizaje está basado en la formulación de un problema. (2) Los procesos de aprendizaje tienen que ser dirigidos por los estudiantes. (3) Hay que tomar en cuenta que el aprendizaje se basa en la experiencia de los participantes. (4) El proceso de enseñanza-aprendizaje se fundamenta en una actividad. (5) La interdisciplinariedad juega un papel fundamental. (6) La ejemplaridad también juega un rol determinante dentro del contexto. (7) Hay que tomar en cuenta la relación entre la teoría y la práctica. (8) Se considera la opción del trabajo en grupo o equipo.

En resumen y centrándonos en nuestra área de interés, es decir, la didáctica de las matemáticas a nivel universitario, destacamos algunos aspectos o características en referencia a la EBP como estrategia didáctica: (**i**) Es una estrategia metodológica activa centrada en el estudiante (Kolmos, 2004). (**ii**) Es una metodología que permite un desarrollo integral y plural en los estudiantes (Lee & Bae, 2008; Lewis, 2003); además que les permite enlazar de manera particular la construcción del conocimiento matemático partiendo de la propia matemática o de otras áreas como el caso de las ciencias económicas. (**iii**) De la anterior se desprende que la EBP facilita una enseñanza contextualizada de las matemáticas, puesto que la misma permite plantear en una clase un escenario multidisciplinar. (**iv**) Si tomamos en cuenta que los problemas pueden ser extraídos de vivencias reales o experimentales, esto le permite al estudiante desarrollar un aprendizaje que lo involucre tanto en el campo de la investigación como en área de formación (Mowshowitz, 2006). (**v**) Los problemas forman el eje central de la organización y el estímulo para el proceso de aprendizaje. (**vi**) Los problemas, además de ser una herramienta para la construcción del conocimiento, son un vehículo para el desarrollo de habilidades de la resolución de problemas. (**vii**) Permite que predomine la adquisición y consolidación del conocimiento frente a la memorización (Morales & Landa, 2004).

Diseño y metodología

Antes de hablar del diseño de la investigación conviene aclarar que nuestro trabajo es de tipo cualitativo. La estructura del mismo la marcó el instrumento que se diseñó para tal fin, el cual consiste de una serie de preguntas o problemas que conforman un *problema macro*. El enunciado del problema y la primera pregunta se les suministró a los estudiantes el primer día. Después de acabar toda la discusión relacionada con la primera pregunta les dimos a conocer la segunda pregunta y así hasta alcanzar las ocho preguntas, en el caso del *problema macro* que aparece en el Apéndice A de este trabajo.

Al ser un curso numeroso (62 estudiantes) la información fue tomaba de forma general y no de manera individual, sacándole mayor provecho a la participación colectiva del grupo o, en algunos casos, el aporte de pequeños grupos (3-4 estudiantes) de trabajo; recordemos que en este momento estamos estudiando la propuesta metodológica como instrumento de investigación, es decir, la validación de la misma. En tal sentido, se realizaron dos análisis por separado, por una parte analizamos cada una de las preguntas, en el mismo orden de discusión y luego se analizó el grupo de preguntas de manera simultánea, mediante un análisis comparativo. En resumen, aplicamos la técnica del análisis documental de contenido (Pinto & Gálvez, 1996).

Resultados

Los resultados a destacar son los siguientes:

Siendo la primera vez que los estudiantes se enfrentaban a un material como el que presentamos en el Apéndice A, la primera impresión fue de rechazo por parte de los estos.

La dinámica exigida por el material discutido en el aula permitió involucrar más al estudiante, aunque en la mayoría de los casos fue propiciada por el profesor.

Los estudiantes valoraron positivamente el contenido del material por la relación matemáticas-economía.

En momentos muy puntuales se pudo observar que algunos estudiantes se perdían en la discusión como producto de la misma dinámica de participación. Al menos cuatro estudiantes manifestaron que prefieren la clase tradicional.

Quedó en evidencia que una enseñanza contextualizada demanda mayor compromiso con el estudiante en materia de formación del profesor y en cuanto a la selección del problema y la estructura del mismo para la discusión en el aula.

Conclusiones

En consecuencia de lo desarrollado y discutido durante la aplicación del instrumento, concluimos que:

Rediseñar el material en cuanto al enunciado del problema; por ejemplo, los datos que aparecen en la producción y venta aparezcan en el mismo orden para las tres plantas de fabricación, puesto que lejos fomentar la discusión produjo confusión en algunos estudiantes.

En el enunciado del problema no debería ir ninguna pregunta, recordemos que dice: “La *planta norte* produce y vende un 10% más que la planta central”. Se pudo observar que este planteamiento distrajo al estudiante, por lo tanto consideramos incluirlo como una pregunta más.

Queda en evidencia que la EBP y la contextualización del problema (ambos elementos presentes en el material), más allá de una mera motivación promueve la construcción del conocimiento. En el caso particular del álgebra matricial, además de dar a conocer nuevos temas para el estudiante, permitió afianzar el conocimiento en otros temas estudiados en otras materias, destacándose la multidisciplinariedad como elemento clave en esta metodología.

El contenido económico del material y el uso de la EBP como metodología de enseñanza sugiere explotar el tema de las interpretaciones económicas de los resultados matemáticos obtenidos. En algunos momentos a los estudiantes les costaba llegar a las interpretaciones.

Limitaciones

Dentro de las limitaciones y obstáculos que se presentaron durante el desarrollo de este trabajo resaltamos las dos más relevantes:

Implementar un material como este exige trabajar con grupos reducidos, en este sentido, la *cantidad de estudiantes* en el curso (62) hizo casi imposible que todos participaran.

Otra limitante que va en conexión directa con lo anterior es el factor tiempo, al tener un grupo numeroso el tiempo se hizo inmanejable.

Prospectiva

De cara al futuro se propone reescribir el material tomando en cuenta las observaciones que se mencionaron anteriormente, tales como: no incluir preguntas en el enunciado del problema, explotar más el tema de las interpretaciones económicas, entre otras. De igual manera, hay que procurar trabajar con un grupo más reducido (menos de 40), aunque esto es un factor de carácter institucional que poco o nada depende del docente.

Por otra parte, en García *et al*. (2006b) se sostiene que la formación del profesor se convierte en una necesidad si se desea trabajar bajo el esquema de EBP, en este sentido se propone un taller de formación para el profesorado de matemáticas de la FACES-ULA de cara a la futura implementación de esta metodología, puesto que todo apunta hacia una mayor participación del estudiante en el aula de clases.

Referencias y bibliografía

Benito, A.; Bonson, M. & Icarán, E. (2005). Metodologías activas. En Benito, A. y Cruz, A. (Coords.) *Nuevas claves para la docencia universitaria en el espacio europeo de educación superior*. Madrid: Narcea. 21-64.

Bridges, E. & Hallinger, P. (1992). *Problem based learning for administrator*. Oregon: ERIC Clearinghouse on Educational Management. University of Oregon.

Cámara, A. (2000). Aportaciones de la matemática a la metodología económica. *Psicothema*. 12(2). 103-107.

García, L., Moreno, M. & Azcárate, C. (2006a). *Reflexiones sobre una propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo en carreras de ciencias económicas y empresariales*. Memorias del 4° Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació (IV CIDUI). Barcelona: Universitat Politécnica de Catalunya.

García, L., Moreno, M. & Azcárate, C. (2006b). EBP como metodología activa para la enseñanza del cálculo diferencial. Discusión y reflexión sobre algunos problemas de cálculo en las ciencias económicas. *Revista RECTA.* Actas 14(1). Recuperado el 10 de noviembre de 2006 de http://www.uv.es/asepuma/XIV/comunica/19NUEVO.PDF

García, L. (2009). *Un estudio sobre el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) de profesores de matemáticas que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. La Enseñanza Basada en Problemas (EBP) como estrategia metodológica y didáctica.* Tesis Doctoral. Barcelona. Universidad de Barcelona.

Gijselaers, W. (1995). Perspectives on problem-based learning. En Gijselaers, W., Tempelaar, D., Keizer, P., Blommaert, J., Bernard, E. & Kasper, E. (Eds.) *Educational innovation in economics and business administration: the case of problem-based learning*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 39-52.

Humphrey, J., Coté, G., Walton, J., Meininger, G. & Laine, G. (2005). A new paradigm for graduate research and training in the biomedical sciences and engineering. *Advances in Physiology Education* 29. 98-102.

Kleiman, E. & Kleiman, A. (2004). *Matrices. Aplicaciones matemáticas en economía y administración*. México. Limusa.

Kolmos, A. (2004). Estrategias para desarrollar currículos basados en la formulación de problemas y organizados en base a proyectos. *Revista Educar*. 33. 77-96.

Lee, H. y Bae, S. (2008). Issues in implementing a structured problembased learning strategy in a volcano unit: a case study. *International Journal of Science and Mathematics Education.* 6(4). 655-676.

Lewis, S. (2003). *La enseñanza basada en tópicos o problemas en la educación en ciencias*. Versión HTML. Recuperado el 10 de abril de 2005 de http://www.actionbioscience.org/esp/education/lewis.html\#Primer

Morales, P. & Landa, V. (2004).Aprendizaje basado en problemas. *Theoria*. 13. 145-157.

Mowshowitz, D. (2006). Using advanced problem in introductory courses. Some sample problems and why they work. *Biochemistry and Molecular Biology Education*. 34(2). 134-138.

Pinto, M. & Gálvez, C. (1996). *Análisis documental de contenido: Procesamiento de la información*. Madrid: Editorial Síntesis.

Sonmez, D. & Lee, H. (2003). Problem-based learning in science. *Digest of Educational Resources Information Center*. EDO-SE-03-04. Recuperado el 04 de febrero de 2006 de http://www.stemworks.org/digests/EDO-SE-04-04.PDF

Apéndice A

Problema macro

El siguiente problema es tomado de Kleiman & Kleiman (2004) y modificado por los autores para los fines de esta investigación. "Inversiones Matriciales", fabricante de muebles, ha ampliado su mercado de operación, extendiendo su área de distribución a todo el país por medio de tres plantas de producción: *sur*, *central* y *norte*. En estos momentos fabrica cuatro tipos de productos emblemáticos: *sofás, mesas para TV*, *escritorios* y *camas*. Estos cuatro productos son solicitados por tres tipos de clientes: consumidores *directos*, *minoristas* y *mayoristas*. Las unidades producidas y vendidas en la *planta sur* son las siguientes: 40 sofás a consumidores directos, 60 a minoristas y 70 a mayoristas; 30 mesas para TV a consumidores directos, 73 a minoristas y 84 a mayoristas; 50 escritorios a consumidores directos, 68 a minoristas y 72 a mayoristas y, finalmente, 28 camas a consumidores directos, 24 a minoristas y 39 a mayoristas. En el caso de la producción y venta de la *planta central* la información es la siguiente: 60 sofás a consumidores directos, 70 a minoristas y 90 a mayoristas; 30 escritorios a consumidores directos, 80 a minoristas y 50 a mayoristas; 50 mesas para TV a consumidores directos, 90 a minoristas y 70 a mayoristas y, finalmente, 30 camas a consumidores directos, 30 a minoristas y 40 a mayoristas. La *planta norte* produce y vende un 10% más que la planta central.

Por otra parte, los sueldos pagados, por mes de actividad, de acuerdo con la categoría del personal (gerentes, jefes regionales y vendedores) y la zona que opera son los siguientes, expresados en unidades monetarias (*um*): en la planta norte un gerente gana 15.000 *um*, un jefe regional 19.000 *um* y un vendedor 14.000 *um*; en la planta sur los sueldos son de 16.000 *um*, 18.000 *um* y 15.000 *um* para gerentes, jefes regionales y vendedores, respectivamente; mientras que los gerentes, jefes regionales y vendedores de la planta central ganan 20.000 *um*, 22.000 *um* y 18.000 *um*, respectivamente.

Además, los costos de fabricación por unidad y tipo de producto, independientemente de la planta de producción son de 80 *um* los sofás, 60 *um* las mesas de TV, 100 *um* los escritorios y 40 *um* las camas; mientras que los precios de venta por unidad y por tipo de de producto en cualquiera de las plantas son de 110 *um* los sofás, 80 *um* las mesas de TV, 130 *um* los escritorios y 60 *um* las camas.

Transcurrido el *primer trimestre* la empresa desea determinar:

(a) El número de unidades totales producidas y vendidas en todo el país por producto y tipo de clientes.

(b) El número de unidades totales vendidas por producto.

(c) Los costos totales de fabricación de las unidades vendidas.

(d) Los ingresos monetarios totales.

(e) Las utilidades brutas totales obtenidas.

(f) La estimación de las ventas para el próximo trimestre, por zonas geográficas, producto y tipo de cliente, suponiendo que el incremento de las ventas será de 6,4%.

(g) Lo erogado en el trimestre por concepto de sueldos y comisiones, según el tipo de vendedor.

Discusión[1]: Antes de comenzar con la discusión del problema resaltamos que el mismo consta de tres partes identificadas con los párrafos que conforman el enunciado del problema. Antes de responder la parte (a) se invita al estudiante a crear una tabla para cada planta que informe la producción y venta por tipo de producto y cliente. Nosotros haremos una tabla que represente la información solicitada de la planta sur para resumir el trabajo, esto es:

Tabla 1

Producción y venta de la planta sur (clientes/productos)

	Sofás	Mesas/TV	Escritorios	Camas
Cons. directo	40	30	50	28
Minorista	60	73	68	24
Mayorista	70	84	72	39

¿Esta es la única tabla que facilita esta información? La respuesta es NO, también puede representarse la información solicitada mediante la siguiente tabla:

Tabla 2

Producción y venta de la planta sur (productos/clientes)

	Cons. Directo	Minorista	Mayorista
Sofás	40	60	70
Mesas/TV	30	73	84
Escritorios	50	68	72
Camas	28	24	39

Para introducir la definición de matriz volvemos a la Tabla 1 y se invita al estudiante a quedarse únicamente con los valores numéricos de esa tabla pero sin las líneas de división de la tabla, es decir,

40	30	50	28
60	73	68	24
70	84	72	39

Posteriormente, estos valores se encierran entre paréntesis y todo esto, visto como un solo objeto, se identifica con una letra mayúscula.

$$S = \begin{pmatrix} 40 & 30 & 50 & 28 \\ 60 & 73 & 68 & 24 \\ 70 & 84 & 72 & 39 \end{pmatrix}$$

[1] Solamente haremos la discusión de las preguntas (a), (b) y (c).

A partir del *objeto* anterior identificado con la letra *S* definimos formalmente el *concepto de matriz*. Pero también definimos el *orden de una matriz*, en este caso, *S* es de orden 3x4. De igual manera utilizamos el orden de la matriz para hablar de las unidades en la que está expresada la misma; por ejemplo, las unidades de *S* son *clientes* x *productos*. Por otra parte retomamos la Tabla 2 y llegamos a la matriz:

$$S' = \begin{pmatrix} 40 & 60 & 70 \\ 30 & 73 & 84 \\ 50 & 68 & 72 \\ 28 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

Por medio de S' definimos *matriz traspuesta* y algunas matrices especiales como *matriz simétrica*, entre otras.

Mientras que la producción y venta de la planta central la identificamos con la letra *C*. Antes de escribir esta matriz se exhorta al estudiante a que vuelva al enunciado del problema y preste especial atención a la forma como aparecen los datos de relacionados con la *planta central*, ya que no se muestran de igual manera que los de la *planta sur*. Aquí destacamos la importancia de preservar la misma distribución de los elementos en cada una de las matrices, de cara a futuras operaciones entre éstas.

$$C = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 30 & 30 \\ 70 & 90 & 80 & 30 \\ 90 & 70 & 50 & 40 \end{pmatrix}$$

Tomando en cuenta que la planta norte produce y vende el 10% más que la planta central, se plantea la discusión que conlleve a la *multiplicación de un escalar por una matriz*, obteniendo como resultado que $N = 1{,}10\ C$, donde *N* representa la planta norte,

$$N = 1{,}10 \begin{pmatrix} 60 & 50 & 30 & 30 \\ 70 & 90 & 80 & 30 \\ 90 & 70 & 50 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 55 & 33 & 33 \\ 77 & 99 & 88 & 33 \\ 99 & 77 & 55 & 44 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso consiste en que los estudiantes lleguen a la *suma de matrices* mediante la misma dinámica de discusión entre ellos y de esta manera damos respuesta a la parte (a) del problema, la cual identificaremos como la matriz *T*. Recordemos la insistencia de disponer la información por columnas de igual manera para todas la matrices.

$$T = \begin{pmatrix} 40 & 30 & 50 & 28 \\ 60 & 73 & 68 & 24 \\ 70 & 84 & 72 & 39 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 & 50 & 30 & 30 \\ 70 & 90 & 80 & 30 \\ 90 & 70 & 50 & 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 66 & 55 & 33 & 33 \\ 77 & 99 & 88 & 33 \\ 99 & 77 & 55 & 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 166 & 135 & 113 & 91 \\ 207 & 262 & 236 & 87 \\ 259 & 231 & 177 & 123 \end{pmatrix}$$

Para dar respuesta a la pregunta (b) del problema, donde se pide las unidades totales producidas y vendidas por tipo de producto (identificaremos esta matriz como U_p), se exige al estudiante que únicamente es permitido emplear el álgebra matricial, aunque previamente puede indagar posibles alternativas que le lleven a la respuesta correcta. Recordemos que la matriz *T* está expresada en unidades de *clientes* x *productos*, lo cual será clave de cara a dar la respuesta correcta a la pregunta que estamos estudiando.

Una primera aproximación a la respuesta consiste en sumar todos los elementos de cada una de las columnas, por ejemplo, para la columna 1: 166+207+259=632. Esto significa que se vendieron en un mes 632 sofás y así sucesivamente para el resto de las columnas. Es entonces cuando consideramos apropiado introducir la *multiplicación de matrices* y las definiciones de *matriz columna* y *matriz fila*. Inevitablemente la EBP no nos permite desprendernos del rigor matemático en cuanto al tema de definiciones, esto quiere decir que en algún momento tenemos que abordar la definición o las definiciones de los objetos matemáticos que se necesiten o que se estén estudiando.

Entonces aquí se hace un paréntesis en la discusión del problema para definir y realizar algunos ejemplos sobre *multiplicación de matrices*. Más aún, se define *matriz fila* y *matriz columna* y se realizan ejemplos de multiplicación tanto de matriz fila como de matriz columna por una matriz cualquiera. Posterior a la discusión antes descrita se retoma la pregunta (b) del problema, de modo que el producto

$$U_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(1\times 3)} \times T_{(3\times 4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(1\times 3)} \times \begin{pmatrix} 166 & 135 & 113 & 91 \\ 207 & 262 & 236 & 87 \\ 259 & 231 & 177 & 123 \end{pmatrix}_{(3\times 4)} = \begin{pmatrix} 632 & 628 & 526 & 301 \end{pmatrix}_{(1\times 4)}$$

representa las *unidades totales producidas y vendidas por tipo de producto*, esto quiere decir que si relacionamos el *orden* de esta matriz U_p con lo que ésta representa, tenemos (*total de unidades* x *tipo de productos*).

Ahora toca discutir la pregunta (c), donde se pide calcular los *costos totales de fabricación de las unidades vendidas*, En el *contexto económico* esto es el producto de *unidades vendidas* por los *costos de fabricación*. Así retomamos el enunciado del problema y se les pide a los estudiantes escribir una matriz identificada con la letra *F* que contenga los datos relacionados con los costos de fabricación por unidad y tipo de producto. Veamos que la matriz *F* se puede escribir como una matriz fila o como una matriz columna. A fin de retomar el concepto de *matriz traspuesta*, procuramos que la matriz *F* sea escrita como una matriz fila, es decir,

$$F = \begin{pmatrix} 80 & 60 & 100 & 40 \end{pmatrix}_{(1\times 4)}$$

Como señalamos en el párrafo anterior, el producto de *unidades vendidas* por *los costos de fabricación* responde a la pregunta (c). Es decir, por medio de los productos $(U_p)_{(1\times 4)} \times (F)_{(1\times 4)}$ o $(F)_{(1\times 4)} \times (U_p)_{(1\times 4)}$. Pero claro está que ninguno de estos productos es posible realizar, pues el número de columnas de la primera matriz no es igual al número de filas de la segunda. De esta manera generamos la necesidad de recurrir a la *matriz traspuesta*, definida en la parte (a).

Por ejemplo, si calculamos la traspuesta de *F*, denotada por F', tenemos que

$$F' = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 100 \\ 40 \end{pmatrix}_{(4\times 1)}$$

De esta manera, podemos calcular tanto $(U_p)_{(1\times4)}\times(F')_{(4\times1)}$ como $(F')_{(4\times1)}\times(U_p)_{(1\times4)}$. Si observamos con detalle, ambos productos son posibles, en el primer caso obtenemos una matriz (1x1), mientras que en el segundo producto nos resulta una matriz (4x4), Aun así, la pregunta que planteamos aquí es la siguiente: ¿Desde el punto de vista económico, ambos productos responden a nuestra pregunta? Más aún, ¿el hecho de que matemáticamente ambos productos son posibles, los mismos tienen sentido en el contexto económico? Antes de dar respuesta a estas dos preguntas calculemos $C_f=(U_p)_{(1\times4)}\times(F')_{(4\times1)}$ y $\tilde{C}_f=(F')_{(4\times1)}\times(U_p)_{(1\times4)}$. Así,

$$C_f=\begin{pmatrix}632 & 628 & 526 & 301\end{pmatrix}_{(1\times4)}\times\begin{pmatrix}80\\60\\100\\40\end{pmatrix}_{(4\times1)}=152880$$

Mientras que

$$\tilde{C}_f=\begin{pmatrix}80\\60\\100\\40\end{pmatrix}_{(4\times1)}\times\begin{pmatrix}632 & 628 & 526 & 301\end{pmatrix}_{(1\times4)}=\begin{pmatrix}50560 & 50240 & 42080 & 24080\\37920 & 37680 & 31560 & 18060\\63200 & 62800 & 52600 & 30100\\25280 & 25120 & 21040 & 12040\end{pmatrix}_{(4\times4)}$$

El primer resultado, $C_f=152880$, indica los *costos totales de fabricación de las unidades vendidas*, con lo cual este producto tiene sentido desde el punto de vista matemático y económico, mientras que el resultado de $\begin{pmatrix}\tilde{C}_f\end{pmatrix}_{(4\times4)}$ tiene sentido desde el punto de vista matemático pero *no desde el económico*.

Este resultado también muestra que el *producto de matrices no es conmutativo*.