XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

Representación institucional dominante del algebra en el Sistema Educativo Colombiano.

Luz Edith **Valoyes** Chavez.
University of Missouri – Columbia.
Estados Unidos.
levf44@mail.missouri.edu

Resumen

En este documento presentamos los resultados del análisis didáctico de la representación institucional dominante del algebra escolar en el currículo colombiano, utilizando como principal instrumento el Modelo Epistemológico de Referencia del álgebra propuesto por la Teoría Antropológica de lo Didáctico. En el estudio, adelantado en el año 2008, el álgebra escolar se considera, en principio, como una técnica matemática cuyo uso sistemático en el proceso de estudio genera la algebrización progresiva de las organizaciones matemáticas escolares. El principal resultado del análisis didáctico realizado muestra dos rasgos dominantes de la representación del algebra en el sistema educativo colombiano: su consideración como un sistema simbólico útil para representar los sistemas conceptuales y su vínculo casi que exclusivo con la aritmética, determinando el carácter prealgebraico de las matemáticas en el currículo del país.

Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico, Algebra escolar, Modelo Epistemológico de Referencia, Modelación Algebraica, Sistemas Matemáticos.

Estado de la investigación en didáctica del algebra.

La investigación en didáctica del álgebra se ha concentrado fundamentalmente en el estudio de las dificultades que los estudiantes experimentan cuando se enfrentan al aprendizaje de esta disciplina y a la construcción de propuestas de enseñanza tendientes a superarlas. Como un resultado de esta tendencia, los didactas de las matemáticas han identificado y caracterizado los conflictos que genera en los estudiantes la aparición de las letras y de los símbolos algebraicos (Booth, 1984; Janvier, 1996; Mason, 1999,); se han analizado, además, los procesos de construcción de nociones consideradas algebraicas como las de *variable* e *incógnita* (Heid, 1996; Malisanni & Spagnolo, 2009; Graham & Thomas, 2000,), la solución de problemas verbales usando lenguaje algebraico (Rojano, 1996; Van Ameron, 2003) y la solución de ecuaciones (Kieran, 1989, 1992) entre otros aspectos problemáticos.

Como un hecho notable, lo que comparte un número significativo de estudios en esta línea, es la aceptación de la existencia de una continuidad histórica, epistemológica, didáctica y conceptual entre la aritmética y el álgebra. En estos estudios se asume que cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez al aprendizaje del algebra, deben transformar los significados que han construido hasta ese momento para objetos matemáticos como la igualdad y las operaciones. Gallardo y Rojano (1988), por ejemplo, se refieren al "corte didáctico" (p. 182) como el momento en el cual es preciso "romper" con nociones que funcionan en la aritmética, pero que deben ser *re*significadas para su utilización como herramientas algebraicas en la solución de problemas y de ecuaciones. Se plantea, de esta manera, cierta contraposición entre las operaciones y los objetos algebraicos con las operaciones y objetos aritméticos según la cual los primeros son "más abstractos" y "más alejados" de las experiencias de los estudiantes, mientras que los segundos se proponen como "más concretos" y "más útiles" en los procesos de formación matemática de los jóvenes.

En esta misma línea de análisis se considera que la aritmética "evoluciona naturalmente" hacia el álgebra como resultado de su aparición en contextos cada vez "más abstractos", más alejados del mundo de la cantidad, lo cual implica la existencia de un supuesto desarrollo desde el pensamiento aritmético hacia el algebraico. De esta manera, las dificultades en el aprendizaje de los conceptos algebraicos se describen y se explican en términos de la falta de conocimiento aritmético o a una fundamentación deficiente de éste en los estudiantes. En resumen, las construcciones teóricas relativas a la denominada "transición del pensamiento aritmético al algebraico" y los fenómenos didácticos asociados a ella caracterizan el álgebra escolar como una *aritmética generalizada* (Gascón, 1999; Bolea, Bosch & Gascón, 2001).

Sin embargo, algunos investigadores han señalado dificultades en dicha conceptualización. Charbonneau (1996), por ejemplo, afirma que "History provides a warning about viewing algebra simply as an extension of arithmetic (p. 34); basado en resultados del análisis histórico sobre el surgimiento del simbolismo algebraico, Charbonneau concluye que en el caso del algebra es posible identificar raíces tanto aritméticas, provenientes de las prácticas comerciales adelantadas por los mercaderes en Italia y Francia durante los siglos XIV y XVI, así como raíces geométricas que pueden rastrearse en los trabajos de Chuquet quien usa métodos algebraicos para resolver problemas geométricos, o en los trabajos de Descartes. Deduce entonces Charbonneau que "Algebra is not *only* an extension of the numerical domain" (p. 34). Radford (1996), por su parte, analiza los métodos usados por los babilonios para resolver problemas geométricos y concluye que en sus trabajos es posible identificar una "geometría del corte y pegue" (cut-and-paste geometry) fuertemente vinculada con la emergencia del algebra (p. 41). En trabajos más recientes y tomando como punto de partida esta postura que cuestiona el vínculo exclusivo entre algebra y aritmética, Radford (2002) propone el álgebra como una *tekhnē* (p. 33) o herramienta útil en la solución de problemas (ibíd., p. 33), tal y como lo afirma en el siguiente apartado:

> In our approach, the conceptualization of algebra as a problem-solving tool is to be understood in the Aristotelian sense of *tekhnē* that is, a reflective work on certain objects in the course of which intellectual knowledge becomes dialectically interwoven with the industrious actions on the objects. More precisely, our approach to algebra as a problem-solving tool means the development of an analytic technique based on a conceptually complex kind of mathematical thinking relying on the calculation of known and not-yet-known numbers or magnitudes that acquire a meaning as they are handled in the pursuit of the goal of the activity (p. 33).

La anterior discusión no es más que la expresión de la ausencia de consenso en la comunidad académica acerca de lo que es el álgebra y acerca de la manera de interpretar su constitución histórica, discusión que se remonta hacia los siglos XVI y XVII cuando ésta hizo su aparición en una forma muy cercana a como la conocemos ahora. Analizando la manera como fue recibido este "nuevo arte" (Panza, 2006) entre los matemáticos de la época y después de la aparición de los trabajos de Vieta y Descartes, Massa (2001) señala que:

> El álgebra obligó a replantear los límites entre las distintas disciplinas matemáticas. Podríamos preguntarnos: ¿Era una ciencia o un arte? ¿Se consideraba el álgebra como una parte de las matemáticas? ¿Era la aritmética superior al álgebra? ¿En qué ámbitos la geometría era más eficaz o necesaria? ¿En cuáles lo era el álgebra? No todos los matemáticos aceptaron y aplicaron el álgebra como una parte nueva de las matemáticas. Unos la ignoraron, unos pocos la aceptaron y la usaron, otros la introdujeron intentando fundamentarla en la geometría de los antiguos y también hubo quienes la rechazaron totalmente (p. 7).

Para la investigación en didáctica de las matemáticas esta discusión no es trivial. En la perspectiva del *Enfoque Epistemológico* (Gascón, 1998) se considera que para tratar científicamente los fenómenos que se presentan en los procesos institucionales de comunicación del saber matemático, "es preciso disponer de un *modelo explícito de la actividad matemática escolar* en el que se modelicen, en particular, el 'álgebra escolar', la 'aritmética escolar', la 'geometría escolar', la 'proporcionalidad', etc." (Gascón, 1998, p. 14). Los modelos explícitos del saber matemático o *Modelos Epistemológicos de Referencia* (MER) cumplen un papel fundamental en los procesos de investigación en el campo por varias razones; en primer lugar, constituyen un determinador tanto de las problemáticas consideradas así como de las interpretaciones que se realicen de la actividad matemática bajo análisis; en segundo lugar, le permiten al investigador tomar distancia de las instituciones objeto de estudio; finalmente, lo dotan de herramientas teóricas y metodológicas para analizar y describir los fenómenos didáctico - matemáticos en dichas instituciones.

Es así como en el estudio que presentamos, ante la pregunta ¿*qué es el álgebra*?, la respuesta se construye tomando como base el MER que propone la Teoría Antropológica de lo Didáctico o TAD, en el cual esta se considera en esencia como una *técnica* matemática (Chevallard, 1989; Gascón, 1994; Bolea, 2003) o instrumento al servicio de los matemáticos que posibilita el proceso de estudio de *cualquier* campo de problemas, generándose la algebrización progresiva de las matemáticas tal y como describimos en el siguiente apartado.

El álgebra como instrumento de modelación de las matemáticas. Los diferentes estudios adelantados en el marco de la TAD y cuyo propósito ha sido describir y explicar las *prácticas escolares algebraicas* (Chevallard 1989; Gascón 1999; Bolea et al., 2001; Bolea 2003), proponen explícitamente un MER del algebra en el cual se le otorga el estatus antropológico de "instrumento al servicio del trabajo de los matemáticos" (Gascón, 1999, p.79). Desde esta postura teórica se asume que los matemáticos usualmente se enfrentan a problemas de distinta naturaleza cuyo proceso de estudio y posible solución demanda el uso de *técnicas* ya existentes o la creación de nuevas. Es en esta perspectiva que el álgebra se considera, en principio, como una *técnica matemática,* como "(…) una 'manera de hacer' en matemáticas" (ídem, p.80) con la cual es posible llevar a cabo el proceso de estudio de *distintos* campos de problemas matemáticos, sean estos aritméticos, geométricos, estadísticos, etcétera. En tanto una técnica matemática, el álgebra escolar se identifica con "un nuevo modo de producción de conocimientos matemáticos" (Bolea et al., 2001), con un instrumento que los sistemas educativos ponen al servicio de los maestros y de los estudiantes para que éstos lleven a cabo el proceso de estudio de cualquiera de las organizaciones matemáticas[1] independientemente de la naturaleza de los objetos de los que éstas se ocupan.

Son dos los elementos que caracterizan la técnica algebraica. Su primer elemento orgánico remite al carácter analítico, considerado generalmente por historiadores y didactas del algebra como su elemento definitorio. Este carácter equivale a un modo de razonamiento o *procedimiento heurístico* (Lakatos, 2002) que se fundamenta en la suposición de que el problema se encuentra resuelto y por tanto "lo desconocido" *existe y es obtenible* (Gascón, 1993) lo cual, a través de una cadena causal, conduce a "lo dado". Lo anterior posibilita, en primera instancia, la designación del objeto desconocido mediante el uso de letras logrando, de esta manera, explicitar e instrumentalizar las relaciones causales entre incógnitas y datos en aras de alcanzar una fórmula que represente las condiciones del problema y que posibilite su manipulación sintáctica. Tal designación constituye el segundo elemento orgánico de la técnica algebraica y en este sentido, ésta se distingue fundamentalmente por apelar a la escritura, por constituir un registro escrito en donde el uso de las letras para designar tanto las incógnitas como los datos genera la posibilidad de identificar y manipular las relaciones de dependencia entre éstos; el proceso descrito tiene como propósito principal la obtención de formas canónicas de los campos de problemas que produce como resultado una unificación alrededor de su estructura representada mediante el simbolismo algebraico.

Necesariamente para llegar a identificar estas estructuras debe producirse la designación literal *tanto de lo desconocido como de lo dado*. Al respecto Bolea et al., (2001) caracterizan esta relación entre las incógnitas y los parámetros en términos de "considerar los primeros como objetos conocidos que se manipulan como si fueran desconocidos, y las segundas como objetos desconocidos que se manipulan como si fueran conocidos" (p.256). Así pues, las anteriores condiciones posibilitan la búsqueda de reglas generales de solución para los campos de problemas permitiendo, además de encontrar las incógnitas, identificar sus características estructurales, las relaciones entre ellas y sus condiciones de existencia.

La anterior discusión nos permite diferenciar dos niveles sustancialmente distintos en la actividad matemática que es posible llevar a cabo con el álgebra. Consideremos que en el proceso de estudio de los campos de problemas, la designación con literales incluye sólo las incógnitas; la expresión generada es una ecuación *particular* relativa a unas condiciones específicas de los problemas estudiados; tal proceso conduce a la manipulación sintáctica de dicha expresión con el correspondiente hallazgo de soluciones individuales. Este primer tipo de actividad o "cálculo ecuacional", se centra fundamentalmente en los aspectos manipulativo-sintácticos de los problemas y se reduce únicamente a encontrar el valor de la incógnita y, como su nombre lo indica, a la sistematización de técnicas resolutorias de ecuaciones aisladas. Pero, cuando en el proceso de estudio de los campos de problemas la designación incluye incógnitas y datos, la actividad que se genera produce como resultado principal un *modelo algebraico* de la organización matemática estudiada; tal actividad que llamaremos "modelación algebraica", permite identificar la estructura de los campos de problemas, su representación y manipulación

[1] Una *Organización Matemática* o *Praxeologia* es un modelo de organización tanto del saber matemático como de la actividad matemática. Así, en las organizaciones matemáticas es posible identificar un bloque *practico-técnico* o *praxis* constituido por campos de problemas y las técnicas que permiten resolverlos, y un bloque *tecnológico - teórico* o *logos* que contiene los discursos teóricos que describen, analizan y justifican tanto los problemas como las técnicas.

mediante el simbolismo algebraico y el encuentro y caracterización de las soluciones generales y sus condiciones de existencia, produciéndose de esta manera un enriquecimiento de los conocimientos relativos a la organización matemática estudiada.

La diferenciación de estos dos "niveles" de desarrollo de la actividad algebraica es fundamental. Chevallard (1989), por ejemplo, plantea que la ausencia de los parámetros en la escuela y el énfasis en las técnicas de solución de ecuaciones produce una automatización de las fórmulas y una reducción de la actividad algebraica a la mera manipulación sintáctica de ecuaciones y de expresiones algebraicas. Y aunque este tipo de tareas es importante en el ámbito de la escolaridad, es notable el empobrecimiento conceptual que se produce al limitar la actividad algebraica única y exclusivamente a este tipo de tareas.

En conclusión, un modelo algebraico aumenta nuestra comprensión acerca los aspectos conceptuales y estructurales de las organizaciones matemáticas modeladas en tanto que arroja un conocimiento que no era, digamos, "visible". Lo anterior no es más que la confirmación de la consideración que sobre los modelos se realiza en el contexto de la TAD y según la cual "la metáfora adecuada para los *modelos matemáticos* es la de 'máquina' o 'instrumento' útil para producir conocimientos relativos al sistema modelizado" (Gascón, 2002). Por tanto, el principal resultado del uso de la técnica algebraica en los procesos de estudio de las organizaciones matemáticas es la producción de nuevos conocimientos sobre dichas organizaciones. Como ya lo afirmamos, la técnica algebraica *es* un "nuevo modo de producción de conocimientos" (Bolea et al., 2001). De esta manera, la modelación algebraica en la escuela se caracterizará fundamentalmente por los siguientes aspectos:

- Modela todos los elementos de la organización matemática original, es decir, sus campos de problemas, técnicas y discursos teóricos; se produce, en este sentido, una nueva organización matemática algebrizada modelo algebraico de la inicial.
- Modela *materialmente* las técnicas y los campos de problemas de la organización matemática original, en el sentido que se representan y manipulan mediante el simbolismo algebraico.
- El modelo algebraico que resulta constituye una extensión de la organización matemática original, en tanto que la contiene y que la enriquece conceptualmente.

La modelación algebraica avanza en dos niveles que pueden pensarse en términos de una metáfora espacial: horizontal y verticalmente. Horizontalmente, porque conduce a la unificación de organizaciones matemáticas de distinta naturaleza mediante un único modelo algebraico que permite tratarlas de la misma forma, es decir, con los mismos dispositivos técnicos y tecnológico-teóricos. Pero además, avanza en una dirección vertical, ya que el modelo algebraico que se obtiene en principio, es susceptible de un nuevo proceso de estudio, que eventualmente puede incluir el uso del instrumento algebraico y que por tanto producirá como resultado un modelo algebraico "más robusto". Es en este sentido que se plantea una algebrización progresiva de las matemáticas en la escuela y que supone entonces la práctica sistemática de construir modelos algebraicos de las diversas organizaciones matemáticas escolares y la problematización de estos modelos para producir otros nuevos.

Si se aceptan las consideraciones anteriores, será posible entonces encontrar en la Institución Escolar organizaciones matemáticas con distintos niveles de algebrización e incluso, preguntarnos:

- Bajo qué condiciones es posible llevar a cabo procesos de modelación algebraica en una institución como, por ejemplo, el sistema educativo colombiano?
- Cuál es la representación dominante del algebra en el sistema educativo colombiano? De qué manera dicha representación condiciona la existencia de procesos de modelación algebraica en el las instituciones escolares colombianas?

Las últimas preguntas fueron abordadas como parte del estudio denominado "*Análisis didáctico de la algebrización de una organización matemática en el sistema educativo colombiano. El caso de la semejanza en el plano"*, cuya metodología y resultados presentamos a continuación.

Metodología.

La TAD plantea que cualquier análisis de los fenómenos didáctico-matemáticos en una institución debe iniciarse con el análisis de la actividad matemática tal y como ésta se ha cristalizado en un momento histórico determinado para posteriormente llevar a cabo el análisis didáctico, aunque en este documento no presentamos los resultados del primer tipo de análisis que se propone y que consistió fundamentalmente en la validación del MER a partir de los datos históricos (Ver Valoyes, 2008; Malagón, 2008; Malagón & Valoyes, 2006).

Para dar respuesta a este primer conjunto de preguntas que orientaron nuestra investigación, utilizamos el MER del algebra descrito anteriormente como el principal instrumento de análisis que además nos permitió tomar distancia de la institución a analizar. Con dicho instrumento y los resultados del análisis histórico, realizamos el análisis didáctico, que en este caso consistió en la contrastación empírica de dichos instrumentos con los documentos curriculares vigentes en el sistema educativo colombiano. A continuación presentamos los principales resultados.

Resultados.

El álgebra en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y en los Estándares Básicos de Competencias. Los Lineamientos Curriculares (Ministerio de Educación Nacional, MEN, 1998) para el área de matemáticas proponen la organización del saber matemático mediante la noción de "sistema" cuya función principal es potencializar el desarrollo del pensamiento matemático, objetivo último de la formación escolar. Así, a cada uno de los cinco tipos de pensamiento matemático propuestos se le asigna un sistema sobre el que se soporta y que contribuye a su desarrollo. Los sistemas numérico, geométrico, métrico o de medidas, de datos y los algebraicos y analíticos contribuirán al desarrollo de los pensamientos numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, respectivamente.

La primera referencia al álgebra en el documento sostiene que ésta "(…) se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio" (MEN, 1998, p. 33). Se le asigna así al álgebra un doble papel: en principio, se vincula a lo aritmético como un instrumento para generalizar los resultados que se obtienen en el campo numérico; después, se propone como una herramienta para modelar fenómenos de variación y cambio. La manera como se produce "el paso" de instrumento de generalización a herramienta de modelación no se enuncia en el documento. Se afirma igualmente en los Lineamientos que el estudio del álgebra debe involucrar entre otros aspectos:

> (…) el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medios de representación y sus métodos como

> herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de las relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos estos propios del pensamiento variacional (p. 33).

La anterior referencia no hace más que confirmar los vínculos de “lo algebraico” con “lo variacional”; de hecho, el álgebra “en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica” (MEN, 1998, p. 72) forma parte de los *núcleos conceptuales* matemáticos en los que está involucrada la variación. De esta manera, el álgebra se presenta como *uno de los sistemas simbólicos para representar y manipular el sistema conceptual del pensamiento variacional*[2]. Pero también, en tanto sistema matemático asociado al pensamiento variacional constituye un objeto de estudio en sí mismo, con sus objetos, relaciones y operaciones. Tenemos así una doble faceta del álgebra: como sistema simbólico y como sistema matemático.

De la anterior discusión podemos concluir que en el análisis, comprensión y descripción de la representación del algebra en los Lineamientos, la noción de *sistema matemático* es central. Esta noción, heredada del discurso propuesto en los *Marcos Generales* (MEN, 1984) correspondientes a la llamada “Renovación Curricular” de los años 80’s, hace parte de un discurso más general que se sitúa en “una corriente muy notoria que se propone presentar la Matemática como una ciencia unificada, en la cual las diversas ramas tienen estructuras comunes afines, que pueden expresarse en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos” (MEN, 1984, p. 9). El discurso al que aludimos es el *Enfoque General de Sistemas* cuya noción central se incorpora en esta propuesta curricular con dos finalidades centrales: modelar el saber matemático e introducir una metodología de enseñanza de esta disciplina. De acuerdo con el documento, un sistema se define como “un conjunto de objetos, con sus operaciones y sus relaciones” (p. 9); en el caso de las matemáticas es posible identificar en todas sus “ramas” (p.11) una gran variedad de sistemas, como por ejemplo el de los números enteros con las operaciones de suma y resta y las relaciones de orden; o en la geometría, el conjunto de las rectas con las operaciones de rotación y traslación y las relaciones de paralelismo y perpendicularidad. De esta manera, todo sistema matemático se puede modelar como un *conjunto de conjuntos*, es decir, mediante una tripla $\{\mathbf{A}, \boldsymbol{\Omega}, \mathcal{R}\}$ en donde $\mathbf{A}$ representa el conjunto de objetos, $\boldsymbol{\Omega}$ el de operaciones y $\mathcal{R}$ el de relaciones.

Así, la noción clave que se encuentra en el corazón del concepto de sistema, además de las de objeto, relación y operación, es la de conjunto; ni para ella ni para las demás hay definición posible según el documento, debido a que sólo se puede “(…) encontrar para cada una de estas palabras, una lista de sinónimos con diversas connotaciones” (MEN, 1984, p. 10). A pesar de lo anterior, en el documento se señala la importancia de centrar la atención en los sistemas como una totalidad y en las relaciones entre los elementos que los constituyen, de manera que podamos llegar a caracterizarlos mediante *la estructura* de sus operaciones y sus relaciones.

Los Marcos Generales presentan tres tipos de sistemas como elementos integrantes de cualquier sistema matemático: los sistemas concretos, los sistemas conceptuales y los sistemas simbólicos. No se dice lo es cada uno de estos “tipos” de sistemas. Sólo se menciona que

[2] Señalamos que es “uno” de los sistemas simbólicos porque se proponen otros como las tablas, las gráficas cartesianas, los enunciados verbales, etcétera.

> Cualquier sistema matemático que el profesor vaya a presentar a sus alumnos puede analizarse como un rayo de luz que pasa por un prisma: si se observa cuidadosamente, se encontrará que tiene un núcleo central, ***el que es verdaderamente importante***, que es el respectivo sistema conceptual. ***Sobre él, a un nivel superficial, aparecen uno o varios sistemas simbólicos para representar ese único sistema conceptual***. Y bajo ese sistema conceptual, a un nivel más profundo, casi diríamos, arcaico, aparecen varios sistemas concretos de cuyas regularidades es posible construir el mismo sistema conceptual[3] (p. 27).

Los sistemas simbólicos, "ubicados a nivel superficial" *representan* los sistemas conceptuales y su principal función es la de "(…) encontrar resultados con la manipulación apropiada de los códigos, aumentado la rapidez y disminuyendo las posibilidades de equivocarse, o al menos, facilitando la corrección de los errores" (MEN, 1984, p. 76). Así, "un álgebra" es un *sistema simbólico* utilizado para *representar* los distintos sistemas conceptuales cuando éstos son "maduros" y presentan limitaciones relativas a su manipulación. Por ejemplo, en la lectura introductoria a la unidad II del programa curricular de grado octavo relativa al tema de funciones, denominada "Ecuaciones de primer y segundo grado: el manejo de expresiones algebraicas como símbolos de funciones", se señala que "cada rama de las matemáticas tiene su 'álgebra': sus sistemas simbólicos que permiten encontrar resultados con la manipulación apropiada (…)" (MEN, 1984, p. 76). En este caso, el título mismo de la lectura es muy diciente: Las expresiones algebraicas constituyen símbolos del sistema conceptual de las funciones. Existe además un álgebra para la lógica, un álgebra lineal para la geometría, un álgebra de conjuntos, etc. En particular, el "álgebra de grado octavo es uno de varios sistemas simbólicos que utilizamos para manejar las transformaciones sobre esos sistemas concretos que son los enteros y los fraccionarios" (MEN, 1984, p. 78). En este grado de la escolaridad colombiana encontramos un álgebra vinculada a lo numérico cuya función es facilitar la operatividad de las relaciones y las transformaciones en los sistemas de números mencionados. En términos generales, el álgebra *es*, en primer lugar, plural y en segundo lugar, como sistema simbólico se ubica a "nivel superficial" de los sistemas conceptuales con el único fin de representarlos. El álgebra constituye "la apariencia" de los sistemas matemáticos y se introduce con fines puramente simplificadores: facilitar la manipulación sintáctica de los conceptos, de las operaciones y de las relaciones. En cuanto a la construcción de conocimientos matemáticos y en relación con nuestro MER, el papel del álgebra en el caso estudiado es secundario.

En la lectura que estamos analizando, se propone además una metodología para la enseñanza de "las álgebras" coherente con la perspectiva metodológica general que sugiere partir de los sistemas concretos a los conceptuales para finalizar en los simbólicos. Así, en cuanto a la enseñanza del álgebra de los sistemas de los números enteros y fraccionarios, después de que sus sistemas conceptuales respectivos están bien constituidos, se procederá a la enseñanza de uno de sus sistemas simbólicos: el algebraico, el cual será introducido mediante adivinanzas mentales de números tratando de mostrar que es la complejidad de estas adivinanzas las que obligarán el recurso al álgebra, que simplificará la búsqueda del número o los números solicitados y disminuirá la cantidad de errores posibles en el proceso.

Entre todas "las álgebras" mencionadas en los documentos, es el "álgebra de los sistemas numéricos" la que se describe y alrededor de la cual se conceptualiza; a pesar de que, por

[3] El resaltado de las frases es nuestro.

ejemplo, se menciona el álgebra lineal como el sistema simbólico de la geometría, este planteamiento no se desarrolla, a lo que habría que agregar un hecho notorio: el álgebra lineal no existe en el currículo propuesto por la Renovación Curricular. Tal silencio en cuanto a las "otras álgebras" nos permite resaltar el carácter marcadamente aritmético de "lo algebraico" en la propuesta curricular. Explícitamente, el Enfoque de Sistemas propuesto en la Renovación Curricular se retoma en los Lineamientos Curriculares[4] tal y como se aprecia en la siguiente afirmación:

> Los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas aquí propuestos toman como punto de partida los avances logrados en la Renovación Curricular, uno de los cuales es la socialización de un diálogo acerca del Enfoque de Sistemas y el papel que juega su conocimiento en la didáctica (MEN, 1998, p. 17).

Por lo demás, y en cuanto al tratamiento didáctico del álgebra, los Marcos Generales constituyen un referente claro para los Lineamientos cuando en éstos se afirma que "Una propuesta didáctica para el tratamiento de las funciones está desarrollada en los Programas de la Renovación Curricular" (p. 74), cuya lectura introductoria para grado octavo y noveno hemos analizado en los párrafos anteriores[5].

Los Estándares Básicos de Competencias en el área de matemáticas son más explícitos en cuanto a sus referencias al álgebra. Conservando los planteamientos de los Lineamientos Curriculares y los que se heredan en este documento de la Renovación Curricular relativos a la organización del saber matemático, se sostiene por ejemplo que "en la educación Básica Secundaria, el sistema de representación más directamente ligado con la variación es el sistema algebraico" (MEN, 1998, p. 67), el cual es "un potente sistema de representación y de descripción de fenómenos de variación y cambio y no solamente un juego formal de símbolos no interpretados, por útiles, ingeniosos e interesantes que sean dichos juegos" (MEN, 1998, p. 68). Quizá la frase más reveladora de la naturaleza del álgebra contenida en este documento sostiene que "De esta manera, el cálculo algebraico surge como una generalización del trabajo aritmético con los modelos numéricos en situaciones de variación de los valores de las mediciones de cantidades relacionadas funcionalmente" (MEN, 1998, p. 68). Es reveladora porque nos confirma los vínculos ya establecidos en la Renovación Curricular entre lo aritmético y lo algebraico, aportándonos evidencias más fuertes acerca del modelo epistemológico de referencia del álgebra escolar.

Discusión.

En contraste con nuestro MER del álgebra escolar en el cual se resaltan su carácter de técnica matemática o instrumento de modelación, en el sistema educativo colombiano el álgebra es *esencialmente* un sistema simbólico que representa los sistemas conceptuales matemáticos, aportando en la constitución de su "apariencia". Y aunque se afirma que ésta constituye un *instrumento* para modelar los fenómenos de variación y cambio, esta modelación por las mismas

[4] Y algunos años después, en los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas.

[5] En general, se afirma en los Lineamientos Curriculares que "(…) en este sentido, los programas de matemáticas de la Renovación Curricular que no tienen el carácter de currículo nacional, se constituyen en una propuesta que puede ser consultada por los docentes y utilizada para enriquecer el currículo" (MEN, 1998, p. 11).

connotaciones que adquiere en los Lineamientos, se refiere a la representación simbólica de tales fenómenos mediante las expresiones algebraicas, entre otras, las ecuaciones.

En esta misma perspectiva, el álgebra escolar se asocia muy estrechamente a lo aritmético. A pesar de sus relaciones con lo variacional, que no necesariamente se restringe a lo numérico, la mayor parte de las referencias en los documentos considerados apuntan a señalar estos vínculos como por ejemplo, cuando se propone su introducción a partir de la generalización de patrones aritméticos o se considera el surgimiento del cálculo algebraico como resultado de la generalización del "trabajo aritmético", por mencionar sólo algunas de ellas. Es a partir de estos elementos que podemos resaltar como un rasgo dominante del MER del álgebra escolar en los documentos curriculares colombianos el considerarla como una generalización de la aritmética.

¿Qué podemos entonces decir de la actividad que es posible llevar a cabo con el álgebra? En cuanto al sentido del álgebra y su papel en el proceso de estudio de las matemáticas escolares, se espera que con su introducción en el proceso de formación matemática de los niños y jóvenes colombianos, éstos puedan representar y manipular fácilmente los sistemas conceptuales relacionados fundamentalmente con los sistemas analíticos, cuyos objetos, "las funciones, transformaciones y operadores" (Vasco, 2002) pasan a constituir a partir de grado octavo objetos de estudio del álgebra.

¿En qué sentido es posible hablar de modelación algebraica en el sistema educativo colombiano? En general, la modelación en los Lineamientos Curriculares se propone como uno de los cinco procesos mentales presentes en la actividad matemática[6], y no como una actividad matemática en sí misma, definiéndola como "la forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas" (MEN, 1998, p. 97). La modelación *es* la actividad de construir modelos que "representan" una situación problemática facilitando su manipulación y solución. En este mismo sentido, los Estándares incorporan esta noción de modelación y son más explícitos en cuanto a la manera de considerar un modelo, afirmando al respecto que uno de éstos "(…) puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible" (MEN, 2006, p. 52). Un modelo representa un fenómeno y en este sentido, el papel asignado a los modelos es coherente con el que se le asigna en los documentos a las representaciones: constituyen una ayuda a la manipulación sintáctica de los fenómenos estudiados.

En los Estándares se afirma además que "(…) todo modelo es una representación, pero no toda representación es necesariamente un modelo, ***como sucede con las representaciones verbales y algebraicas que no son propiamente modelos, aunque pueden estarse interpretando en un modelo***[7]" (MEN, 2006, p. 52). Aunque los elementos anteriormente discutidos nos conducían a pensar que las expresiones algebraicas como objetos que representan fenómenos de variación y cambio eran modelos, la última afirmación nos hace dudar y nos deja muchas preguntas sobre todo porque no se profundiza en los aspectos que se plantean. Por ejemplo, ¿Cuándo las expresiones algebraicas no son modelos? En general ¿Cuándo una representación no es un modelo? En esencia, la modelación facilita la solución de un problema o de una situación problema, pero no necesariamente produce conocimientos nuevos relativos a ella, más allá del hecho mismo de encontrar dicha solución.

En nuestro MER del álgebra escolar, además de producir conocimientos nuevos acerca de la organización matemática objeto de estudio, la modelación algebraica es un proceso que

---

[6] Junto con la modelación, los cuatro procesos restantes son la resolución de problemas, la comunicación matemática, el razonamiento matemático y la ejecución de procedimientos de rutina.

[7] El resaltado es nuestro.

posibilita la integración y la unificación de las matemáticas escolares generando nuevos conocimientos relativos al sistema modelado. En el caso que estamos analizando creemos que es poco factible que la modelación tal y como ella se presenta pueda conducir a esta unificación e integración. Un hecho que nos confirma lo anterior se expresa en la atomización de las matemáticas escolares en múltiples contenidos como se evidencia en la organización propuesta en los Estándares, situación que creemos es un rasgo del carácter prealgebraico de las matemáticas escolares en nuestro sistema educativo.

Esta reducción del álgebra a instrumento de representación la despoja de su función epistémica en la medida en que no es posible producir mediante su uso conocimientos nuevos relativos a las organizaciones matemáticas. Esta es quizá una de las principales restricciones a las que se enfrenta cualquier proceso de algebrización de las matemáticas escolares en el sistema de enseñanza en nuestro país. Pero además el carácter marcadamente aritmético del álgebra en los documentos considerados dificulta, en el caso de la geometría, cualquier posibilidad de acercamiento entre ellas: "Lo algebraico" se vincula fuerte y exclusivamente con "lo aritmético", de manera que este rasgo adicional del álgebra escolar constituye a su vez un nueva restricción. La anterior reflexión nos permite preguntarnos: *Cómo afecta esta representación dominante del algebra las practicas docentes de los maestros colombianos? Como se expresa en los dispositivos didácticos y en los discursos docentes dicha representación del algebra? Cuáles debieran ser las condiciones institucionales para que el álgebra como técnica matemática pueda vivir y desarrollarse en el sistema educativo colombiano?* Esta es la dirección que creemos debería tomar el análisis que hemos presentado en este documento.

Referencias y bibliografía.

Bolea, P. (2003). *Los procesos de algebrización de las Organizaciones Matemáticas Escolares*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza; Zaragoza, España.

Bolea, P., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). El proceso de algebrización de las matemáticas escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*(3), 247-304.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER- Nelson.

Bosch, M**.** (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática*. *El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral, Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to Geometry. In Bednarz, Kieran & Lee (Eds), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 55-63). The Netherlands: Kluwer Academic publisher.

Chevallard, Y. (1989). Arithmetique, algebre, modelisation. Aix, France: IREM.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique des Mathematiques,*9(3), 155-188.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *13*(3), 295-332.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(1), 7-34.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática*, *11*(1), 77 – 88.

Gascón, J. (2002): Geometría sintética en la E.S.O. y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA,* (39), 13-25

Graham, A., & Thomas, M. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41* (3), 265-282

Heid, M.K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. In Bednarz, Kieran & Lee (Eds), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 239-255). The Netherlands: Kluwer Academic publisher.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. In Bednarz, Kieran & Lee (Eds), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 225-237). The Netherlands: Kluwer Academic publisher

Kieran, C. (1989). The early learning to algebra: An structural perspective. In Wagner & Kieran (Eds), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C.(1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York, NY: MacMillan Publishing Company.

Lakatos, I. (2002). *Escritos Filosóficos, 1. La metodología de los programas de investigación científica*. (1ª ed.). (J.C. Zapatero, Trad.).Madrid, España: Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1973).

Malagón, R. (2008). *El álgebra escolar como instrumento de la actividad matemática: un estudio desde la teoría antropológica de lo didáctico sobre la reconstrucción de organizaciones matemáticas en torno a la divisibilidad*. Tesis de maestría, Universidad del Valle; Cali, Colombia.

Malagón, R. & Valoyes, L. (2006*). El papel de la técnica algebraica cartesiana en los procesos de objetivación de los reales*. (En prensa).

Malissani, E., & Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the “variable”. *Educational Studies in Mathematics*, *71* (1), 19 – 41,

Massa, R. (2001). Las relaciones entre el álgebra y la geometría en el siglo XVII. Recuperado de http://ma1.upc.es/recerca/reportsre/01/rep0101massa.doc

Mason, J. (1999). *Rutas/Raíces al álgebra.* Tunja, Colombia: Editorial de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional.(1984). *Matemáticas. Propuesta de Programa Curricular. Marcos Generales. Educación Básica Secundaria. Grados 8-9.* Santafé de Bogotá, MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares.* Santafé de Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2007). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Santafé de Bogotá: MEN.

Radford, L. (2002). Algebra as *tekhnē.* Artefacts, symbols, and equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*. *1* (1), 31-56.

Radford, L. (1996). The roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Elementary Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. In: N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (Ed.), a*pproaches to Algebra: perspectives for research and teaching,* (39-53). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rojano, T.(1996). The role of the problems and problem solving in the development of algebra. In Bednarz, Kieran & Lee (Eds), *Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 55-63). The Netherlands: Kluwer Academic publisher.

Panza, M (2006). François Viète. Between analysis and cryptoanalysis. *Studies in History and Phylosophy of Science*. 37, 269-289.

Valoyes, L. (2008). *Análisis didáctico de la algebrización de una organización matemática en el sistema educativo colombiano. El caso de la semejanza en el plano*. Tesis de maestría, Universidad del Valle; Cali, Colombia.

Van Ameron, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*. *54*(1), 63-75.

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En A.C. Castilblanco (coord.), *Memorias del Congreso Internacional de Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas.* (pp. 68-77). Santafé de Bogotá, Ministerio de Educación Nacional.