XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática

Estudo sobre o ensino de equações do 1º grau, na França e no Brasil, à luz da Teoria Antropológica do Didático

Prof. Dr. Abraão Juvencio de **Araujo**
Universidade Federal de Parnambuco - UFPE
Brasil
abraaojaraujo@hotmail.com

Prof. Dr. Marcelo **Câmara dos Santos**
Universidade Federal de Parnambuco - UFPE
Brasil
marcelocamaraufpe@yahoo.com.br

Resumo

Este estudo teve como objetivo caracterizar e comparar as transposições didáticas realizadas na França e no Brasil sobre o ensino de equações do 1º grau, à luz da Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1999). Para tanto, realizamos estudos teóricos e didáticos sobre o ensino de equações nos dois países, o que nos permitiu analisar os programas de ensino, livros didáticos e os estudos experimentais conduzidos junto aos alunos. Os resultados indicam que, nos dois países, o ensino de equações do 1º grau é justificado como uma ferramenta para resolver problemas e não tem sua organização matemática devidamente caracterizada nos documentos oficiais. E mais, os livros didáticos analisados dos dois países não esclarecem as diferenças existentes entre os subtipos de tarefas explorados, bem como os limites ou potencialidades das técnicas apresentadas. Por fim, os alunos investigados dos dois países não demonstraram ter boas relações pessoais com esse objeto do saber escolar.

Palavras-chave: Álgebra. Equações do 1º grau. Transposição Didática. Teoria Antropológica do Didático.

Introdução

Este trabalho é parte de uma tese de doutorado que trata da problemática do ensino da álgebra escolar cujo principal objetivo consistiu em caracterizar o ensino de álgebra sobre a resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, na França e no Brasil, à luz da Teoria Antropológica do Didático. A tese, realizada na Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), fez parte do projeto de intercâmbios científicos existentes entre pesquisadores da UFPE, da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS) e da então equipe Did@TIC[1], do laboratório Leibniz, de l'Université Joseph Fourier, em torno da problemática da modelização de conhecimentos algébricos e do uso de novas tecnologias.

---

1 http://www-leibniz.imag.fr/Did@TIC/

O objetivo apresentado acima nos conduziu à nossa primeira questão de pesquisa: Como caracterizar o ensino de álgebra, de modo a compreender o ensino de resolução algébrica de equações do 1º grau com uma incógnita na França e no Brasil?

A Teoria da Transposição Didática (Chevallard, 1991) constituiu um aporte teórico necessário para fundamentar este estudo. Nesta teoria, Chevallard (Ibidem) ampliou a estrutura conceitual já existente na didática francesa para analisar fenômenos didáticos, ressaltando também o papel das *instituições,* isto é, nas relações que elas têm com os saberes escolares e no papel que elas desempenham no trabalho de transposição didática desses saberes. A tese de Chevallard (Ibidem) é a de que a compreensão da aprendizagem do aluno está relacionada à compreensão das aprendizagens institucionais. Para ele, não se pode compreender os fracassos das aprendizagens pessoais (do aluno), em relação a um determinado objeto do saber, sem levar em consideração as *relações institucionais* de certas instituições com esse objeto e cujos alunos em fracasso são seus sujeitos. Esta reflexão sobre a teoria da transposição didática nos remeteu à nossa segunda questão de pesquisa: Como caracterizar a transposição didática que se realiza sobre o ensino de resolução algébrica de equações do 1º grau na França e no Brasil?

Para responder esta segunda questão, ancoramo-nos na tese de Chevallard (1999) de que a Teoria Antropológica do Didático (TAD) permite reconstruir a transposição didática que se realiza sobre o ensino de determinado objeto do saber em determinada instituição e, consequentemente, do ensino da resolução algébrica de equações do 1º grau com uma incógnita. Para Chevallard (Ibidem), o saber matemático é algo que é transposto entre instituições, e a TAD fornece um método de análise que permite não somente descrevê-lo, mas também estudar as condições de sua existência em determinadas instituições, isto é, permite analisar as limitações ou potencialidades que se criam entre os objetos de saberes a ensinar nas diferentes instituições.

Para descrever e estudar as condições de existência de determinado objeto do saber no interior de determinada instituição, Chevallard desenvolveu a noção de praxeologia ou organização praxeológica que se ancora nos conceitos de *tipos de tarefas* (T) a realizar, de *técnicas* (τ) utilizadas para realizar os tipos de tarefas, de *tecnologias* (θ) que explicam ou justificam as técnicas e de *teoria* (Θ) que fundamenta as tecnologias (propriedades matemáticas). Tendo estas duas teorias como aporte teórico, restava ainda uma terceira questão de pesquisa: A partir de quais instituições transpositivas de ensino é possível reconstruir as organizações matemáticas existentes, na França e no Brasil, em torno do ensino de resolução de equações do 1º grau?

Nossa hipótese, apoiada na teoria da transposição didática, foi a de que podemos reconstruir as organizações matemáticas existentes nesses dois países, em torno do ensino de resolução algébrica de equações do 1º grau, por meio da análise de programas curriculares oficiais e parâmetros nacionais curriculares de ensino, bem como da análise de livros didáticos, que são instituições de transposição didática (externas) de saberes a ensinar, bem como da análise de estudos experimentais conduzidos junto aos alunos franceses e brasileiros.

Procedimento metodológico e principais resultados da pesquisa

Partindo da tese de Chevallard (Ibidem), de que a TAD fornece os elementos necessários à caracterização do ensino de determinado saber matemático que se realiza no interior de determinada instituição de ensino, nós realizamos estudos teóricos e didáticos sobre o ensino de resolução de equações do 1º grau com uma incógnita, os quais nos permitiram "modelizar"[2], a priori, as praxeologias matemáticas pontuais existentes em torno desse objeto de conhecimento, ao menos, em termos de técnicas e tecnologias.

Técnicas modelizadas a priori sobre o ensino de resolução algébrica de resolução de equações do 1° grau com uma incógnita:

- *Testar a igualdade* (τ_{TI}), que consiste em resolver a equação verificando a igualdade por meio de tentativas e aproximações, substituindo-se a incógnita por valores numéricos.
- *Transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC}), que se caracteriza por isolar a incógnita, transpondo termos constantes ou coeficientes para o outro membro da igualdade, invertendo as operações.
- *Neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC}), que se caracteriza por isolar a incógnita, efetuando a mesma operação nos dois membros da equação.
- *Reagrupar os termos semelhantes* (τ_{RTS})*, invertendo o sinal dos termos transpostos.*

Além dessas técnicas próprias de resoluções de equações, em alguns casos, temos também a seguinte técnica:

- *Desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE})*, eliminando parênteses e/ou agrupando os termos semelhantes.*

Assim, dependendo das variáveis mobilizadas na confecção das equações, podemos mobilizar uma ou mais técnicas, dando origem a técnicas mistas.

Tecnologias utilizadas para justificar as técnicas modelizadas a priori para resolver equações do 1º grau com uma incógnita:

- *Princípios de equivalência entre equações, isto é, entre equações com as mesmas soluções ou raízes* (θ_{PEE}).
  - *Princípio aditivo: "quando aos dois membros de uma equação se adiciona (ou deles se subtrai) a mesma quantidade, obtém-se uma nova equação equivalente à primeira".*
  - *Princípio multiplicativo: "quando aos dois membros de uma equação se multiplica (ou deles se divide) a mesma quantidade (diferente de zero), obtém-se uma nova equação equivalente à primeira".*
- *Propriedades das operações inversas em R (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos* (θ_{POI}).
  - Se *a, b e c são números reais tais que* $a+b=c$*, então* $a=b-c$.
  - *Se a, b e c são números reais tais que* $a \cdot b = c$*, então* $a = c \div b$, $b \neq 0$.
- *Propriedades gerais da igualdade (θPGI) ou lei do cancelamento.*
  - Se $a+b=a+c \Leftrightarrow b=c$.
  - Se $a \cdot b = a \cdot c \Leftrightarrow b=c$, com $a \neq 0$.
- *Propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}).
  - Se k, a, b, e d são números reais, então: $k(a+b)=ka+kb$ e $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

[2] Modelo de praxologias matemáticas relativas ao tipo de tarefa "*resolver equações do 1º grau*", criado pelo pesquisador, para o estudo em tela.

Essas praxeologias matemáticas nos forneceram os critérios e as categorias que utilizamos para responder à nossa 3ª questão de pesquisa e, consequentemente, atingir nosso principal objetivo, que foi o de *caracterizar o ensino de resolução de equações do 1º grau com uma incógnita*, por meio da análise do programa francês de ensino, dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)[3] brasileiros, de livros didáticos e de estudos experimentais conduzidos junto aos alunos dos dois países.

Os estudos desses documentos oficiais de ensino e de livros didáticos forneceram elementos que nos ajudaram a caracterizar as *relações institucionais*, da França e do Brasil, com o ensino de equações do 1º grau com uma incógnita. Para tanto, procuramos, inicialmente, identificar os objetivos gerais para o ensino de matemática e as organizações curriculares propostas, nos dois países, para o ensino de conteúdos de matemática. Posteriormente, procuramos identificar e caracterizar a maneira como o ensino de álgebra é proposto em cada país e, em particular, determinar e caracterizar as praxeologias matemáticas e didáticas existentes em torno da resolução de equações do 1º grau com uma incógnita.

Já os estudos experimentais foram realizados com o objetivo de caracterizar as *relações pessoais* de alunos franceses e brasileiros com a resolução de equações do 1º grau com uma incógnita, determinando as praxeologias matemáticas existentes, nesses dois países, do ponto de vista do aluno.

Relações institucionais da França e do Brasil relativas às organizações didáticas e matemáticas sobre o ensino de equações do 1º grau.

Como já dissemos anteriormente, para realizar este estudo, partimos da hipótese de que tal caracterização é possível de se realizar por meio da análise das organizações matemáticas e didáticas existentes nos programas oficiais de ensino e em livros didáticos, bem como da análise de estudos experimentais conduzidos junto aos alunos dessa instituição.

Para tanto, foram selecionados o Programa Francês para o Ensino de Matemática e, no Brasil, os PCN (Brasil, 1998). No caso dos livros didáticos, foram selecionadas duas coleções de livros didáticos de cada país.

Na França, assim como no Brasil, há uma diversidade de coleções de livros didáticos destinados ao ensino de matemática nas classes de 6ᵉ (sixième) à 3ᵉ (troisième). Daí, a escolha das duas coleções ter sido feita com base nos seguintes critérios: O primeiro critério foi selecionar coleções que constavam do acervo da Equipe Did@Tic do laboratório Leibniz, tendo em vista que nossa estada naquele país era de apenas um ano; o segundo critério foi selecionar as coleções que estivessem em consonância com o programa francês de Matemática para esse nível de ensino. Com base nesses critérios, selecionamos as seguintes coleções: *Diabolo* (Merlier et al, 2004) e *DiMathème* (Fourton et al, 2003). No Brasil, as coleções de matemática analisadas para este estudo tiveram como procedimento de escolha o seguinte critério: selecionar para análise as coleções de livros didáticos adotados nas escolas onde foram realizados os estudos experimentais. Dessa forma, selecionamos as seguintes coleções: *Tudo é Matemática* (Dante, 2002) e *Matemática para todos* (Imenes & Lellis, 2002).

[3] Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são referências para o Ensino Básico do Brasil, propostos pelo Governo Federal. O objetivo é propiciar subsídios à elaboração ou reelaboração do currículo escolar.

Assim, no que concerne às *relações institucionais*, os resultados obtidos a partir das análises dos documentos oficiais e de livros didáticos indicam que, tanto na França quanto no Brasil, o ensino de álgebra não é destacado como um domínio próprio do conhecimento matemático. Na França, o ensino de conteúdos algébricos é contemplado nos domínios dos *números e cálculos*, bem como na *organização e gestão de dados – funções*, com o objetivo de iniciar os alunos no cálculo literal (prioridades operacionais, desenvolvimento e redução, equações e resolução), que deve ser conduzido de maneira progressiva a partir de situações que dêem sentido a esse tipo de cálculo. Já no Brasil, o ensino de álgebra é essencialmente tratado no domínio dos números e operações, com o objetivo de levar o aluno a reconhecer as diferentes funções da Álgebra (aritmética generalizada, funcional, equações e estrutural).

No caso do ensino de equações do 1º grau com uma incógnita, os resultados mostram que, tanto na França quanto no Brasil, ele é implicitamente justificado como uma ferramenta para resolver problemas de contextos sociais e de outros domínios da matemática. De forma geral, nos dois países, a noção de equação é definida como *igualdades que contêm letras* representando números desconhecidos, denominados incógnitas; isto é, igualdades entre expressões literais (algébricas). Nesse sentido, resolver uma equação consiste em determinar o valor da letra (incógnita) que verifica a igualdade.

Ainda sobre o ensino de equações do 1º grau, foi verificado que tanto o *programa francês de ensino* quanto os PCN (Brasil, 1998) não fornecem elementos que favoreçam a caracterização das praxeologias matemáticas existentes, nesses dois países, em torno da resolução de equações do 1º grau. Esta caracterização só pôde ser realizada, de maneira mais ou menos precisa, por meio das análises dos livros didáticos, cujos resultados revelaram que o ensino de equações do 1º grau com uma incógnita, tanto na França quanto no Brasil, é organizado em torno da resolução de equações que contemplam os quatro subtipos de tarefas (t_1, t_{11}, t_2 e t_{21}) caracterizados na modelização a priori, com ênfase na elaboração e oficialização de técnicas para realizar os subtipos de tarefas t_1 (resolver equações do tipo $ax + b = c$) e t_2 (resolver equações do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$).

Os resultados relativos às *organizações didáticas* mostram que, na França, os temas matemáticos desenvolvidos nos livros didáticos obedecem fielmente à organização proposta no programa de ensino francês, isto é, são organizados em torno dos seguintes domínios: Números e cálculos; organização e gestão de dados – funções; Geometria; e Grandezas e medidas. No Brasil, embora os temas matemáticos contemplem conteúdos relacionados aos quatros grandes temas propostos nos PCN, (números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas; e tratamento da informação), a sequência em que eles aparecem nos livros didáticos não é a mesma proposta nos PCN. Nos livros franceses, os temas algébricos são essencialmente desenvolvidos em capítulos relativos aos domínios de Números e operações e da Organização e gestão de dados – funções. No Brasil, eles são tratados em capítulos próprios ou atrelados aos temas ligados aos números e operações. Nos dois países, o estudo das equações aparece implicitamente nos livros didáticos como uma ferramenta para resolver problemas.

No que concerne à *evolução do trabalho com equações*, nos livros didáticos analisados da França a resolução de equações do 1º grau é introduzida na *classe de cinquième* (7º ano) e prossegue nos volumes das *classes de quatrième* (8º ano) e *troisième* (9º ano). É na *classe de quatrième* que se concentra praticamente todo o trabalho de exploração dos diferentes subtipos de tarefas, bem como de elaboração e sistematização das técnicas. No Brasil, o estudo de resolução de equações do 1º grau é introduzido no volume do 6º ano, essencialmente desenvolvido no volume do 7º ano e retomado nos volumes de 8º e 9º anos. Logo, podemos concluir que os alunos brasileiros iniciam um ano mais cedo o estudo de resolução de equação do 1º grau.

Organizações praxeológicas relativas à resolução de equações do 1º grau.

No que concerne ao trabalho relativo ao subtipo de tarefa t_1 (resolver equações do tipo $ax+b=c$), os resultados mostram que, nos livros franceses, os exercícios relativos a este subtipo de tarefa são propostos para serem resolvidos por meio das seguintes técnicas: *testar a igualdade* (τ_{TI}) por tentativas e erros; *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC}) invertendo as operações, sistematizadas para os casos em que $a=1$ ou $b=0$; *neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC}). Tais técnicas são elaboradas e sistematizadas por elementos tecnológicos que consistem dos *princípios das equações equivalentes* (θ_{PEE}) e das propriedades gerais das igualdades (θ_{PGI}). No Brasil, os resultados mostram que os exercícios relativos a este subtipo de tarefa são propostos para serem resolvidos por meio das seguintes técnicas: *cálculo mental* (τ_{CM}), não sistematizada; *testar a igualdade* (τ_{TI}) por meio de tentativas e erros; *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC}), elaborada e mais ou menos sistematizada por meio das *propriedades das operações inversas* (θ_{POI}).

No trabalho realizado relativo ao subtipo de tarefa t_{11} (resolver equações do tipo $A(x)=c$), os resultados mostram que, nos livros franceses, os exercícios relativos a este subtipo de tarefa são propostos para serem realizados por meio das técnicas mistas τ_{DRE_TTC} e τ_{DRE_NTC}, que consistem em aplicar, inicialmente, a técnica τ_{DRE} para desenvolver e reduzir a expressão $A(x)$ à forma $ax+b$ antes de aplicar a técnica τ_{TTC} ou τ_{NTC}. A técnica auxiliar τ_{DRE} é justificada por meio das *propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}). Nos livros brasileiros analisados, os exercícios relativos a este subtipo de tarefa são propostos para serem resolvidos, exclusivamente, por meio da técnica mista τ_{DRE_TTC}, sendo a técnica auxiliar τ_{DRE} justificada por meio das *propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}). Vale observar, no entanto, que, nos livros didáticos franceses (analisados), o estudo do cálculo algébrico e, consequentemente, da técnica τ_{DRE} recebe um tratamento mais específico do que nos livros didáticos brasileiros.

No que concerne ao subtipo de tarefa t_2 (resolver equações do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$), os resultados mostram que, nos livros dos dois países, tais exercícios são propostos para serem resolvidos por meio da técnica τ_{NTC} e por meio da técnica τ_{RTS} (*reagrupar termos semelhantes*), sendo esta última sistematizada em apenas uma coleção de cada país, por meio de exemplos. Nas coleções brasileira, é dito que tal técnica surge como uma regra prática decorrente das técnicas τ_{TTC} e τ_{NTC}.

No trabalho com o subtipo de tarefa t_{21} (resolver equações do tipo $A_1(x)=A_2(x)$), os estudos mostram que, nas duas coleções francesas, as atividades relativas a este subtipo de tarefa são encontradas nas seções destinadas aos exercícios. Logo, subtende-se que seja esperado que o aluno mobilize a técnica mista τ_{DRE_TTC} ou τ_{DRE_NTC}. No Brasil, os exercícios relativos a este subtipo de tarefa são propostos para serem resolvidos por meio de mobilização da técnica mista τ_{DRE_NTC}, sistematizada por meio de exemplos. Em uma coleção brasileira, sugere-se também que o aluno faça uso da técnica mista τ_{DRE_RTS} para realizar os exercícios relativos a tal subtipo de tarefa.

Como podemos observar pelos resultados acima, embora as coleções analisadas nos dois países elaborem, praticamente, as mesmas técnicas (τ_{TI}, τ_{TTC}, τ_{NTC}, τ_{RTS}, τ_{DRE_TTC}, τ_{DRE_NTC}, τ_{DRE_RTS}…) para realizar os subtipos de tarefas relativos à resolução de equações do 1º grau com uma incógnita, foi observado que, na França, privilegiam-se as técnicas que consistem em *neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC}), efetuando a mesma operação em ambos os lados da igualdade, para realizar os subtipos de tarefas t_1 e t_2. No Brasil, privilegiam-se a técnica que consiste em *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC}), para realizar o subtipo de tarefa t_1, e a técnica que consiste em *neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC}), para realizar o subtipo de tarefa t_2.

No caso da realização dos subtipos de tarefas t_{11} (resolver equações do tipo $A(x) = c$) e t_{21} (resolver equações do tipo $A_1(x) = A_2(x)$), tanto na França quanto no Brasil, os livros didáticos não realizam um verdadeiro trabalho de elaboração de técnicas para realizar tais subtipos de tarefas. De forma geral, em um ou outro caso, os livros didáticos brasileiros e franceses analisados se limitam a oficializar, por meio de exemplos, as técnicas mistas (τ_{DRE_TTC}, τ_{DRE_NTC}, $\tau_{DRE\_RTS...}$) que consistem em, inicialmente, *desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE}) para reduzir tais equações às formas $ax + b = c$ e $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$, respectivamente.

Além disso, o trabalho de exploração dos diferentes subtipos de tarefas e de elaboração de técnicas realizado nos livros didáticos dos dois países nem sempre é feito de forma a esclarecer as diferenças existentes entre tais subtipos de tarefas explorados, bem como esclarecer sobre os limites ou potencialidades das técnicas elaboradas e/ou sistematizadas. Essa falta de clareza faz com que a transição de uma técnica que se apoia em propriedades aritméticas para outra que se apoia em propriedades algébricas não seja percebida conscientemente pelo aluno, isto é, não se realiza de forma explícita a passagem da aritmética à álgebra.

Estudo experimental: relações institucionais sobre a resolução de equações do 1º grau, do ponto de vista de alunos franceses e brasileiros.

Este estudo foi realizado por meio de experimentos conduzidos junto a alunos franceses e brasileiros visando caracterizar as *relações pessoais* de alunos dos dois países relativas à resolução de equações do 1º grau com uma incógnita.

Na França, participaram 62 alunos de duas *classes de seconde* (1ª série do ensino médio) e, no Brasil, 55 alunos de duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental. Os motivos principais que nos levaram a escolher alunos de *classes de seconde*, na França, e do 9º ano, no Brasil, para a realização desta pesquisa, se justificam pelo fato de serem alunos que iniciaram o estudo de resolução de equações do 1º grau há pelo menos dois anos.

Os exercícios escolhidos para esta investigação pertencem ao conjunto de 32 exercícios – sobre fatoração, simplificação (desenvolvimento e redução), equações e inequações do primeiro grau, equações do segundo grau, sistemas de equações – produzidos na França por Nicaud et al (2005), no projeto intitulado "Modélisation cognitive d’élèves en algèbre et construction de stratégies d’enseignement dans un contexte technologique”. Para o nosso estudo, na França, interessamo-nos em analisar os resultados de 11 (onze) exercícios sobre a resolução de equações de 1º grau com uma incógnita, categorizados em quatro subtipos de tarefas, em função de variáveis didáticas que caracterizam as diversas formas escritas em que uma equação do 1° grau se apresenta, conforme se pode observar no quadro a seguir.

Subtipo de tarefa	**Equações**
t_1: Resolver equações do tipo $ax+b=c$	E1: $x+2=1$ E2: $2x+4=6$ E3: $5-3x=9$
t_{11}: resolver equações do tipo $A(x)=c$, em que $A(x)$ é uma expressão polinomial não reduzida à forma canônica.	E6: $4(x-2)-2(x+1)=0$ E8: $\frac{-7}{2}x-\frac{6}{2}x+\frac{5}{7}=0$ E9: $(2x+1)(x-3)+(-x+3)(2x-3)=0$ E10: $(x-2)(3x+1)-(x+1)(3x-1)=0$
t_2: Resolver uma equação do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$	E4: $3-2x=3x-6$ E7: $\frac{3}{2}+x=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x$
t_{21}: Resolver uma equação do tipo $A_1(x)=A_2(x)$, em que $A_1(x)$ e $A_2(x)$ são expressões polinomiais não reduzidas à forma canônica.	E5: $8x-4=3x+2+5x$ E11: $(x+2)(x-3)=(x+2)(x-4)$

Classificação dos exercícios por subtipo de tarefa

Dessa forma foi possível investigar, por exemplo, não somente como os alunos resolviam equações dos tipos $ax+b=0$, $ax+b=cx+d$, mas também de outros tipos, em que, após o desenvolvimento e redução, poderiam ser transformadas em uma das formas canônicas acima. A única exceção é relativa ao subtipo de tarefa t_1, para o caso em que $b=0$. Esse fato, no entanto, não limitou nosso estudo, pois tal tipo de equação surge naturalmente, como uma equação equivalente, no processo de resolução dos demais subtipos de tarefas. Esses mesmos 11 exercícios compuseram o teste que foi aplicado no Brasil, com os alunos que participaram do experimento.

Assim, no que concerne às *relações pessoais* de alunos franceses e brasileiros com a resolução de equações do 1º grau com uma incógnita, os resultados mostram que os alunos dos dois países ainda apresentam muitas dificuldades para resolver equações do 1º grau, mesmo após terem passado dois anos de estudo deste conceito.

Os resultados mostram que os alunos franceses obtiveram êxito em 46,5% dos exercícios resolvidos, contra 44,0% dos alunos brasileiros. A tabela 1, a seguir, mostra o desempenho dos alunos de cada país por subtipo de tarefa.

Tabela 1

Desempenho geral por subtipo de tarefa

Subtipo de tarefa	França			Brasil		
	Sucesso	Erro	Branco	Sucesso	Erro	Branco
t_1: $ax+b=c$	71,1%	21,1	7,8	85,5%	13,9	0,6
t_{11}: $A(x)=c$	22,3%	51,7	26,0	21,8%	71,4	6,8
t_2: $a_1x+b_1=a_2x+b_2$	33,1%	56,4	10,5	41,8%	53,7	4,5
t_{21}: $A_1(x)=A_2(x)$	71,9%	26,4	1,7	28,2%	67,3	4,5

Estes resultados confirmam aqueles obtidos nas pesquisas realizadas por diversos pesquisadores[4] sobre dificuldades relativas à álgebra escolar.

Quando comparamos os desempenhos dos alunos por subtipo de tarefa, os resultados mostram que tanto os alunos franceses quanto os brasileiros se saíram melhor na realização do subtipo de tarefa t_1, que consiste em resolver equações do tipo $ax + b = c$. Além disso, mesmo nesse caso, a taxa de resoluções bem sucedidas diminui significativamente quando são manipuladas variáveis tais como o universo numérico (inteiro ou racional), ao qual pertence a raiz da equação, e a forma não convencional de escrever a equação. Nesse sentido, faz-se necessária a realização de pesquisas que façam uso de metodologias que aprofundem as investigações relativas às dificuldades dos alunos referentes aos diferentes subtipos de tarefas e a outras variáveis de contextos, tais como o universo numérico e a forma escrita das equações.

No que concerne às *praxeologias* de alunos franceses e brasileiros com a resolução de equações do 1º grau, este estudo nos permitiu identificar diferentes praxeologias pontuais, em termos de subtipos de tarefas e de técnicas mobilizadas, o que compreende o bloco *saber-fazer*. Porém, o instrumento (teste) utilizado não nos permitiu identificar com precisão as tecnologias (propriedades matemáticas) que justificavam a mobilização de tais técnicas.

Ao compararmos as técnicas mobilizadas pelos alunos dos dois países para resolver os diferentes subtipos de tarefas, os resultados mostram que, tanto na França quanto no Brasil, a maioria absoluta dos alunos mobilizou a técnica que consiste em *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC}), para realizar o subtipo de tarefa t_1 (resolver equações do tipo $ax + b = c$), e a técnica que consiste em *reagrupar termos semelhantes* (τ_{RTS}), para realizar os exercícios relativos ao subtipo de tarefa t_2 (resolver equações do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$). No caso dos subtipos de tarefa t_{11} e t_{21}, os alunos dos dois países tenderam a *desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE}), antes de fazer uso das técnicas τ_{TTC} ou τ_{RTS}. Ou seja, mobilizaram as técnicas mistas τ_{DRE_TTC} ou τ_{DRE_RTS}. A tabela 2, a seguir, mostra o percentual de exercícios resolvidos com sucesso, relativos à técnica prioritariamente mobilizada pelos alunos dos dois países por subtipo de tarefa realizado.

Tabela 2
Técnicas prioritariamente mobilizadas e resolvidas com sucesso, relativas a cada subtipo de tarefa

Subtipo de tarefa	Técnica	França		Brasil	
		Mobilizada[5]	Sucesso[6]	Mobilizada	Sucesso
t_1: $ax + b = c$	τ_{TTC}	75,9%	76,2%	86,6%	85,9%
t_{11}: $A(x) = c$	$\tau_{DRE\_}\tau_{TTC}$	51,4%	55,4%	61,0%	29,6%
t_2: $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$	τ_{RTS}	85,6%	40,0%	73,3%	48,1%
t_{21}: $A_1(x) = A_2(x)$	$\tau_{DRE\_}\tau_{RTS}$	68,9%	73,2%	49,5%	21,1%

No que concerne à conformidade existente entre as *relações pessoais* dos alunos de cada país com as respectivas *relações institucionais*, em termos de técnicas relativas à resolução de equações do 1º grau com uma incógnita, este estudo nos permitiu concluir que, tanto na França quanto no Brasil, não há uma boa conformidade. De fato, na França, como já dissemos anteriormente, embora os livros didáticos elaborem as técnicas que consistem em *transpor*

[4] Pomerantsev e Korosteleva (2002), Biazi (2003), Valentino e Grando (2004) e Falcão (1996)
[5] Percentual da técnica prioritariamente mobilizada relativa a cada subtipo de tarefa.
[6] Percentual calculado sobre o número de exercícios resolvidos por meio da técnica prioritariamente mobilizada.

termos ou coeficientes (τ_{TTC}) e *reagrupar termos semelhantes* (τ_{RTS}), a técnica que consiste em *neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC}) foi aquela cuja elaboração e sistematização, ancorada em elementos tecnológicos, mereceu maior destaque, nas duas coleções analisadas, para realizar os subtipos de tarefa t_1 e t_2. No Brasil, os livros didáticos dão ênfase à elaboração e sistematização da técnica que consiste em *neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC}) para realizar o subtipo de tarefa t_2.

Além disso, a partir dos desempenhos alcançados pelos alunos das duas instituições e dos erros identificados, os resultados apresentados neste estudo mostram que um número significativo de alunos franceses e brasileiros ainda não domina as técnicas de resolução de equações do 1º grau, ou seja, não têm uma boa relação pessoal com esse objeto da álgebra. Isso nos remete à hipótese de que a maneira como a resolução de equações do 1º grau é ensinada parece não permitir aos alunos franceses e brasileiros construírem uma boa relação pessoal com esse saber algébrico.

A tabela 3, a seguir, mostra as frequências relativas aos tipos de erros identificados nos protocolos dos alunos dos dois países, quando da realização do tipo de tarefa resolver equações do 1º grau com uma incógnita.

Tabela 3

Erros identificados relativos à realização dos diferentes subtipos de tarefas

Tipo de erro	França	Brasil
Transpor termos ou coeficientes (τ_{TTC})	23,3%	14,4%
Neutralizar termos ou coeficientes (τ_{NTC})	0,8%	0%
Reagrupar termos semelhantes (τ_{RTS})	6,3%	6,7%
Desenvolver ou reduzir expressões (τ_{DRE})	35,8%	48,5%
Outros erros algébricos	27,5%	21,5%
Erros de cálculo numérico	6,3%	8,9%

Podemos observar que os erros de cálculos algébricos foram bem representativos, na França (93,7%) e no Brasil (91,1%), comparados aos erros de cálculos numéricos, com apenas 6,3% (França) e 8,9% (Brasil). Comparando o total de erros algébricos com origem na mobilização de técnicas próprias (τ_{TTC}, τ_{NTC} e τ_{RTS}) de resolução de equações do 1º grau com uma incógnita, verificamos que os erros cometidos pelos alunos franceses contribuíram com 29,3% contra 21,1% cometidos pelos alunos brasileiros. Por outro lado, os alunos brasileiros cometeram mais erros na mobilização de técnicas para desenvolver ou reduzir expressões algébricas (τ_{DRE}), com 48,5%, contra 35,8% de erros dessa categoria cometidos pelos alunos franceses. Essa diferença pode ser explicada a partir dos objetivos do ensino de conteúdos algébricos nos dois países. Como dissemos acima, na França, o ensino de álgebra tem como objetivo iniciar os alunos no cálculo literal (prioridades operacionais, desenvolvimento e redução, equações e resolução), enquanto que no Brasil ele visa levar o aluno a reconhecer as diferentes funções da Álgebra (aritmética generalizada, funcional, equações e estrutural).

Além dos erros de cálculos numéricos e de cálculos algébricos, que certamente têm um peso importante no desempenho do aluno, este estudo nos permitiu identificar e caracterizar um número significativo de erros ligados à aplicação das técnicas τ_{TTC} e τ_{RTS}, majoritariamente mobilizadas pelos alunos franceses e brasileiros, neste experimento, a saber:

- *Transpor coeficientes,* invertendo a posição dos termos na operação final*:* $ax = c \rightarrow x = a / c$
- *Transpor coeficientes, mudando o sinal do mesmo na posição final:* $ax = c \rightarrow x = \frac{c}{-a}$
- *Transpor coeficientes, mudando de operador multiplicativo para aditivo:* $ax = c \rightarrow x = c - a$
- *Transpor coeficientes, conservando a operação:* $ax = c \rightarrow x = ac$
- *Transpor coeficientes, mudando de operador multiplicativo para aditivo:* $ax = c \rightarrow x = c + a$
- *Transpor termos constantes, suprimindo o sinal negativo do termo incógnito não transposto:* $b - ax = c \rightarrow ax = c - b$
- *Transpor termos, confundindo o sinal do termo com o do operador:* $b - ax = c \rightarrow ax = c + b$
- *Transpor termos constantes, conservando a operação:* $ax \pm b = c \rightarrow ax = c \pm b$
- *Transpor termos, mudando a posição dos termos constantes na operação final:* $ax + b = c \rightarrow ax = b - c$
- *Transpor termos constantes, mudando o operador (aditivo versus multiplicativo):* $x + b = c \rightarrow x = \frac{b}{c}$
- *Reagrupar termos, suprimindo o sinal negativo do termo incógnito não transposto:* $b - ax = cx - d \rightarrow \underline{ax} - cx = -d - b$
- *Reagrupar termos, suprimindo o sinal negativo do termo constante não transposto:* $b - ax = cx - d \rightarrow cx + ax = d - b$
- *Reagrupar termos, conservando a operação (sinal) do termo incógnito transposto:* $b - ax = cx - d \rightarrow b + d = cx\underline{-ax}$ *ou* $ax - b = cx + d \rightarrow ax\underline{+cx} = d + b$
- *Reagrupar termos, conservando a operação (sinal) dos termos transpostos:* $b - ax = cx - d \rightarrow -ax\underline{+cx} = -d\underline{+b}$ *ou* $ax - b = cx + d \rightarrow ax\underline{+cx} = d\underline{-b}$
- *Reagrupar termos, conservando a operação (sinal) do termo constante transposto:* $b + ax = d - cx \rightarrow ax + cx = d + b$ *ou* $b - ax = cx - d \rightarrow -ax - cx = -d + b$
- *Reagrupar termos, invertendo as posições dos termos transpostos:* $b - ax = cx - d \rightarrow b - d = cx - ax$
- *Reagrupar termos, invertendo a posição dos termos na operação final:* $b + ax = d - cx \rightarrow ax + cx = b - d$
- *Reagrupar termos, trocando os sinais negativos por positivos:* $-ax - b = -cx - d \rightarrow \underline{ax} + cx = d + b$

Acreditamos que estes erros, da forma persistente como alguns ocorreram, não somente revelam a falta de domínio das técnicas, mas também a falta de conhecimento das praxeologias no seu todo. Ou seja, eles revelam principalmente a falta de domínio dos elementos tecnológicos que explicam e validam tais técnicas. De fato, os resultados apontados nas análises dos programas de ensino e de livros didáticos dos dois países mostram que as praxeologias matemáticas existentes, nesses países, em torno da resolução de equações do 1º grau, não são adequadamente constituídas. Por exemplo, no caso das técnicas, os resultados mostram que o trabalho de elaboração e sistematização das técnicas nem sempre faz alusão explícita aos subtipos de tarefas que elas permitem realizar de forma eficiente, bem como das tecnologias que explicam e justificam tais técnicas. Estes resultados nos levaram a concluir que é necessário que as instituições de ensino construam organizações matemáticas, em termos de técnicas e tecnologias, que permitam ao aluno realizar, de maneira adequada, os diferentes subtipos de tarefas relativos aos objetos de ensino da matemática, no caso específico, da resolução de equações do 1º grau com uma incógnita.

Bibliografia e referências

Araujo, E. A. (1999). *Influências das habilidades e das atitudes em relação à matemática e à escolha profissional*. Tese de doutorado. FE – UNICAMP: Campinas/SP.

Biazi, L. M. C. (2003). *Erros e dificuldades na aprendizagem da álgebra***.** Dissertação de Mestrado em Educação, FACIPAL, Palmas – PR.

Booth, L. (1995). Dificuldade das crianças que se iniciam em álgebra. In: COAXFORD, A. F.; Shulte, A. P. *As idéias da Álgebra*. Tradução de Domingues, H. H. São Paulo, SP. Atual.

Chevallard, Y. (1991). *Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. AIQUE. Traductión: Claudia Gilman. Título original: Chevallard, Y. (1984), La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. In : *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, pp. 221-266.

Falcão, J. T. R. Clinical analysis of difficulties in algebraic problem solving among brasilian students: principal aspects and didactic issues. In: *International Conference for the Psychology of Mathematics Education* - PME, 20th**,** Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education - PME, v. 2, Seville, Spain, 1996, pp. 257-264.

Fourton, J. L. et all. (2003). DiMathème.Didier. Paris.

Imenes, L. & Lellis, M. (2002). *Matemática para todos* (Coleção de 5ª à 8ª Séries). Editora Ática, São Paulo.

Kieran, C. (1995). Duas Abordagens Diferentes entre os Principiantes em Álgebra. In: *As idéias da Álgebra*. Organizado por Coaxford, A. F & Shulte, A. P. Tradução de Domingues, H. H. São Paulo, SP. Atual.

Merlier, J.M. et all. (2004). *Collection Diabolo*, Maths. Hachette Education, Paris.

Nicaud, J-F, et all. (2005). Modélisation cognitive d'élèves en algèbre et construction de stratégies d'enseignement dans un contexte technologique. Rapport de fin de projet de l'Aci Ecole et Sciences Cognitives. In: *Les cahiers Leibniz nº 123*.

Pomerantsev, L.; Korosteleva, O. (2002). *Do Prospective Elementary And Middle School Teachers Understand the Structure of Algebraic Expressions?* California State University, Long Beach, CA 90840-1001.

Valentino, M. R. L.; Grando, R. C. (2004). O conhecimento algébrico que os alunos apresentam no início do curso de licenciatura em matemática: um olhar sob os aspectos da álgebra elementar. In: *Anais do VIII Encontro de Educação Matemática*, Recife, PE.