ISSN: 2739-039X
www.reviem.com.ve
Asociación Aprender en Red
Asociación Venezolana de Educación Matemática
Vol. 3, No. 3
DOI: 10.54541/reviem.v3i3.78

Produciendo saberes entrelazados al método de cascarones cilíndricos para determinar el volumen de un sólido

Producing knowledge intertwined with the cylindrical shell method to determine the volume of a solid

Produção de saberes associado ao método das cascas cilíndricas para determinar o volume de um sólido

Óscar Leonardo Pantano-Mogollón

Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Bogotá, Colombia

Recibido: 06/04/2023 – Aceptado: 13/09/2023 – Publicado: 03/10/2023

Remita cualquier duda sobre esta obra a: Óscar Leonardo Pantano-Mogollón
Correo electrónico: oscarl.pantanom@konradlorenz.edu.co

Resumen

En este artículo presentamos algunas consideraciones teóricas apoyadas, por evidencias empíricas, en relación con el reconocimiento y caracterización de las formas sensibles y materiales de producción de saberes, entrelazados al método de cascarones cilíndricos para determinar el volumen de sólidos de revolución. Estas formas son puestas en movimiento por los estudiantes y el profesor al abordar una tarea asociada al cálculo del volumen de un sólido de revolución en un curso de cálculo integral. El análisis de las formas sensibles y materiales de producción está fundamentado en la metodología multi-semiótica. Resultado del análisis, se sugiere, primero, que emerge un reconocimiento y caracterización de los cascarones cilíndricos y sus longitudes a través de la movilización sincrónica de diferentes medios semióticos de objetivación. Segundo, que emerge y se actualiza una fórmula para determinar el volumen de un cascarón cilíndrico y el de un sólido de revolución a través de dicho método.

***Palabras clave*:** Medios semióticos de objetivación; Producción de saberes; Actividad; Cascarones cilíndricos.

Abstract

In this paper we present some theoretical considerations supported by empirical evidences in relation to the recognition and characterization of the sensible and material forms of knowledge production intertwined with the method of cylindrical shells to determine the volume of solids of revolution. These

forms are put into motion by the students and the teacher when approaching a task associated with the calculation of the volume of a solid of revolution in the integral calculus course. The analysis of the sensible and material forms of production is based on the multi-semiotic methodology. As a result of the analysis, it is suggested first, that a recognition and characterization of cylindrical shells and their lengths emerges through the synchronous mobilization of different semiotic means of objectification. Second, that a formula to determine the volume of a cylindrical shell and that of a solid of revolution through this method emerges and is updated.
***Keywords*:** Semiotic means of objectification; Production of knowledge; Activity; Cylindrical shells.

Resumo

Neste artigo, apresentamos algumas considerações teóricas apoiadas por evidências empíricas em relação ao reconhecimento e à caracterização das formas sensíveis e materiais de produção de saberes entrelaçadas com o método das cascas cilíndricas para determinar o volume de sólidos de revolução. Essas formas são colocadas em movimento pelos alunos e pelo professor ao abordarem uma tarefa associada ao cálculo do volume de um sólido de revolução no curso de cálculo integral. A análise das formas sensíveis e materiais de produção é baseada na metodologia multi-semiótica. Como resultado da análise, sugere-se, em primeiro lugar, que o reconhecimento e a caracterização de conchas cilíndricas e seus comprimentos surgem por meio da mobilização sincrônica de diferentes meios semióticos de objetivação. Segundo, que uma fórmula para determinar o volume de uma casca cilíndrica e o de um sólido de revolução surge e é atualizada por meio desse método.
Palavras-chave: Meios semióticos de objetivação; Produção de saberes; Atividade; Cascas cilíndricas.

INTRODUCCIÓN

El reconocimiento y la caracterización de la producción de saberes matemáticos se ha constituido en objeto de estudio de algunas investigaciones (Radford, 2022; Sánchez, 2017; Sánchez & Prieto, 2019; Sandoval-Troncoso & Ledezma, 2021). Los resultados reportados en estas investigaciones ponen en evidencia que la producción de saberes matemáticos está entrelazada a la actividad gestual, a la enunciación rítmica de ciertas expresiones lingüísticas, a la estimulación, refinamiento y evolución de la actividad perceptual y al uso de diferentes artefactos. Así mismo, estos estudios revelan que dicha producción está entrelazada con la manera cómo estudiantes y profesores trabajan de manera conjunta en una búsqueda en común, unificando actuaciones y enunciaciones por dotar de sentido y significado aquello que va haciéndose visible al ámbito de la atención, del entendimiento y de la reflexión a medida que se topan con formas de pensamiento y acción que han sido constituidas histórica y culturalmente.

No obstante, ha emergido un intenso interés por reconocer, comprender y caracterizar las formas sensibles y materiales de producción de dichos saberes, con el propósito de dar cuenta del *proceso de producción*, es decir, su constitución y evolución a través de la actividad que emerge entre estudiantes y profesores al solucionar diferentes tareas. El estudio del *proceso de producción de saberes matemáticos* posibilita tomar conciencia de la manera cómo aprenden los estudiantes, es decir, cómo toman conciencia progresivamente de formas de pensar, hacer y reflexionar que han sido constituidas histórica y culturalmente. Así mismo, de la manera como la producción de saberes se constituye en una producción conjunta entre profesores y estudiantes, en la que se constituyen formas de colaboración humana que trascienden las formas actuales de producción de saberes individualistas que se fomentan aún en algunas escuelas, formas que finalmente terminan en la producción de la alienación.

MARCO TEÓRICO

En la Teoría de la Objetivación (TO), el saber es caracterizado como "un sistema de arquetipos de pensamiento, acción y reflexión constituido histórica y culturalmente a partir de una labor colectiva material, sensual y sensible" (Radford, 2023, p. 51). Estos arquetipos, como formas de pensar, hacer y reflexionar sobre las cosas y el mundo, se presentan a los individuos como potencialidades de acción y reflexión, capacidades generativas de hacer algo. Esta caracterización se aleja de aquellas que conciben el saber como entidades absolutas que existen en sí mismas y por sí mismas, independientes de la actividad humana. En la TO, la conceptualización va en otra dirección, puesto que el saber es conceptualizado como "una entidad dinámica: una producción cultural, producida por personas concretas por medio de su trabajo, sus acciones, sus reflexiones, sus alegrías, sus sufrimientos y sus esperanzas" (Radford, 2023, p. 53).

El saber se constituye en una síntesis cultural y cristalizada que se actualiza solo si es puesto en movimiento por la labor colectiva de los hombres, constituyéndose así en objeto de conciencia, en algo que se desvela a la conciencia de los individuos. En ese movimiento el saber se produce, se transforma y se refina por medio de:

> *Un proceso de determinaciones que suceden entre sí y en el que aparecen nuevas conexiones. Las nuevas conexiones del saber no se limitan a sustituir a las antiguas; las nuevas conexiones vehiculan, de forma condensada y con tensiones, los significados de las formaciones teóricas previas.* (Radford, 2023, p. 59)

Además de ofrecer una conceptualización del saber fundamentada desde el materialismo dialéctico, la TO conceptualiza la producción como una participación conjunta entre profesores y estudiantes a la manera en que los saberes se hacen circular en el aula. Esos saberes sociales-históricos-culturales preexisten a la actividad de los estudiantes. A través de la actividad, estudiantes y profesores ponen en movimiento estos saberes, los actualizan, constituyéndose en objetos de atención, entendimiento y reflexión (Radford, 2023).

> *La cuestión es que los procesos de producción del saber están encarnados en sistemas de actividad que incluyen otros medios físicos y sensuales de objetivación distintos de la escritura (como las herramientas y el habla) y que le confieren una forma corpórea y tangible al saber.* (Radford, 2003, p. 41)

En el proceso de producción de saberes los individuos recurren a una amplia variedad de medios semióticos de objetivación, como los artefactos, signos y dispositivos lingüísticos, los cuales son movilizados dinámicamente con el propósito no solo de organizar, llevar a cabo sus acciones y hacer evidentes sus intenciones, sino también de actualizar procesos de significación "de sistemas de pensamiento y acción que han sido constituidos cultural e históricamente – sistemas que notamos gradualmente y al mismo tiempo adquieren significado" (Radford, 2018, p. 6).

La producción de saberes es un proceso gradual y progresivo, impregnado de tensiones, aciertos y desaciertos, que se desvela en la actividad que emerge entre los individuos. Actividad que se constituye en "un esfuerzo conjunto por medio del que los individuos producen sus medios de subsistencia" (Radford, 2023, p. 36). Es a través de la actividad y, más específicamente, del esfuerzo conjunto, que los saberes hacen su aparición y se actualizan en conocimiento. Radford (2023, p. 62) afirma que "mediante la actividad el saber adquiere una determinación sensible (o contenido) y como resultado el saber se actualiza". Así mismo, plantea que:

> *Las formas de producción de saberes en el aula son impulsadas por esfuerzos colectivos basados en la historia y la cultura, donde el profesor y los estudiantes trabajan juntos para alcanzar niveles profundos de conceptualización matemática. El saber no se construye ni se transmite, sino que se encuentra a través de procesos sensuales colectivos de objetivación.* (Radford, 2017, p. 125)

En síntesis, se habla acá de procesos sensuales colectivos de objetivación que requieren de una intensa actividad sensorial, material, discursiva y gestual de estudiantes y profesores.

METODOLOGÍA

Los datos y resultados de investigación reportados en este artículo están asociados a la actividad que emergió entre el profesor y los estudiantes en un curso de Educación Superior (pregrado), denominado Cálculo Integral, desarrollado en el semestre a través de dos sesiones de trabajo semanales de 90 minutos de duración cada una.

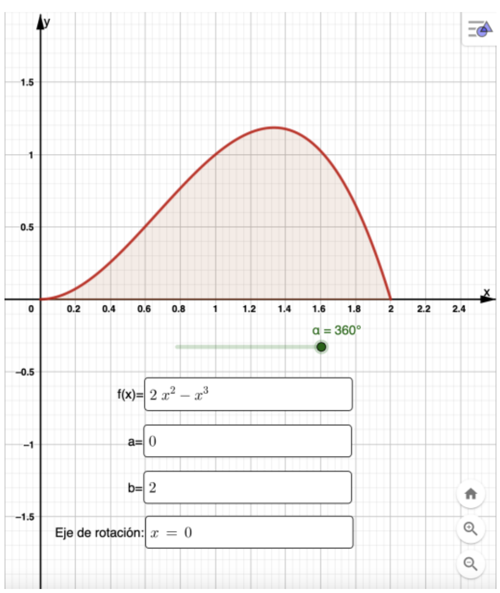
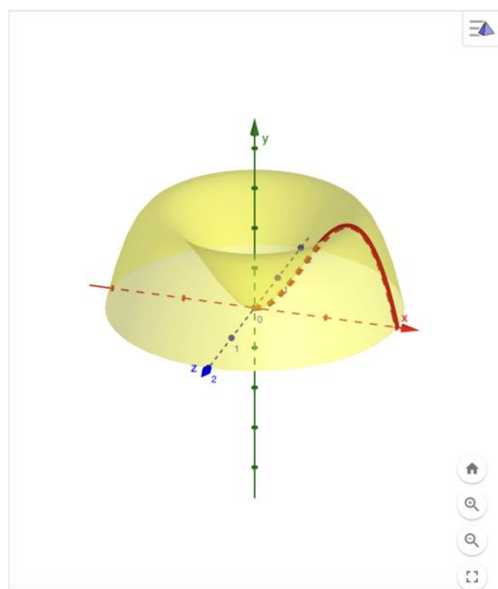
La recolección de la información se realizó teniendo en cuenta las orientaciones metodológicas propuestas por Miranda *et al*. (2007), específicamente aquellas asociadas a las cuatro fases de acopio de la información. Bajo estas orientaciones, en la *primera fase* se realizó la grabación en video de la actividad que emergió, de principio a fin, durante la resolución de la tarea. En la *segunda fase* se digitalizaron las hojas de trabajo de los estudiantes. En la *tercera fase* se realizó el análisis de la información recolectada a través de los videos. En la *cuarta fase* se consolidaron las transcripciones del discurso verbal y no verbal a través del análisis realizado en la fase anterior.

La constitución de los datos de investigación y su respectivo análisis está enmarcada en la metodología multi-semiótica (Radford *et al*., 2006, 2007), puesto que ésta coloca la atención en el reconocimiento y caracterización de las relaciones, la dialéctica y la dinámica entre lo enunciado, lo escrito, los gestos, el ritmo, la actividad perceptual y el uso de signos y artefactos, es decir, entre los diferentes medios semióticos de objetivación que son movilizados. Es en este reconocimiento y caracterización que se toma conciencia de las formas sensibles y materiales de producción de saberes que son actualizadas por estudiantes y profesores.

El análisis que presentamos a continuación está entrelazado a dos momentos de la actividad: al trabajo en grupos y a la discusión entre el profesor y cada uno de éstos. La meta de la actividad consistía en el encuentro de los estudiantes con formas de pensar el método de cascarones cilíndricos para determinar el volumen de sólidos de revolución. Con el propósito de poner en movimiento la meta de la actividad se les propuso la tarea de determinar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar la región limitada por $f(x) = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$ alrededor del *eje* y.

Figura 1

Representación gráfica de la región limitada y del sólido de revolución a través de GeoGebra

Región limitada	Sólido de revolución
	

Los resultados y discusión que presentamos son el producto del trabajo conjunto que emergió entre los integrantes de uno de los grupos conformados y el profesor durante una sesión de 90 minutos. El grupo estaba conformado por: Carolina, Daniel, Danna, Juliana y María.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis que presentamos en esta sección está dividido en tres momentos, los cuales tienen como propósito poner en evidencia no solamente las formas de producción de saberes asociados al método de cascarones cilíndricos para determinar el volumen de sólidos de revolución, sino también las dificultades que emergieron al dar solución a la tarea propuesta. El primer momento ha sido titulado *despejando la variable de integración*. El segundo momento se titula *produciendo una fórmula para determinar el volumen de un cascarón cilíndrico* y el tercero ha sido denominado *reconociendo la fórmula para determinar el volumen de un sólido de revolución*.

Despejando la variable de integración

Inicialmente, el profesor se acerca a uno de los grupos con el propósito de tomar conciencia de las formas de reflexión, acción y expresión que están siendo movilizadas por los integrantes para resolver la tarea. Tan pronto se acerca, observa que se encuentran discutiendo sobre la variable con respecto a la cual se debe integrar, debido a que no han logrado despejar a la variable independiente x. Aprovechando la discusión, el profesor interviene para preguntarles acerca de dicha variable, con el propósito de reconocer el criterio que han utilizado para determinar la variable de integración.

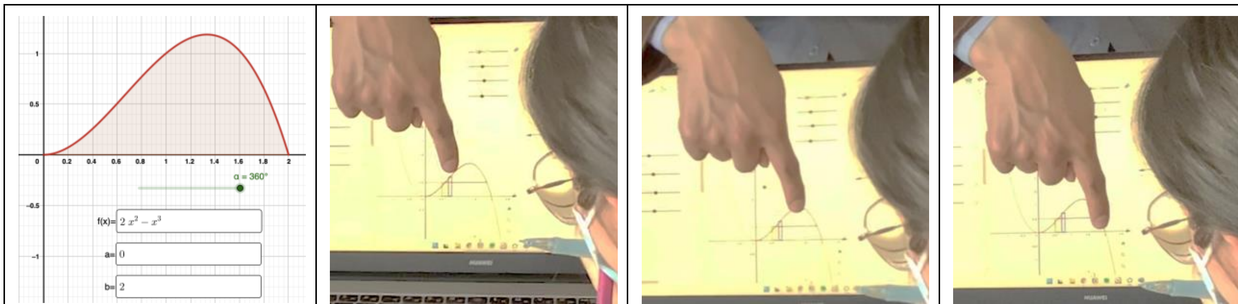
> **L1. Profesor**: *¿Por qué en términos de y?*
> **L2. Daniel**: *Porque, vamos a buscar el sólido que al hacerla girar* [Refiriéndose a la región limitada] *no con respecto al eje* x *sino con respecto al eje* y.
> **L3. Profesor**: *¡Ah! ¡respecto al eje y! Entonces, miremos acá* [Refiriéndose a la ventana de GeoGebra] *aquí en color rojo está* [Desliza su dedo índice sobre la pantalla del computador, recorriendo a la curva de $f(x) = 2x^2 - x^3$. Danna interviene para mencionar el objeto, la función, a la que hace referencia el profesor] *la función que limita la región a girar. Si nosotros formulamos un rectángulo representativo, sería este ¿cierto?* [Limita el rectángulo representativo proyectado, ubicando uno de sus dedos índice sobre el extremo izquierdo y el otro sobre el extremo derecho. Luego, de las enunciaciones y la limitación del rectángulo los integrantes afirman que sí] *y ese ¿nos permitiría formar qué sólido si lo ponemos a girar con respecto al eje* y*?*
> **L4. Daniel**: *Una arandela.*
> **L5. Profesor**: *¡Sí! Una arandela porque aquí sería hueco* [Limita el espacio vacío, ubicando uno de sus dedos índice sobre el eje y y el otro sobre el extremo izquierdo del rectángulo representativo] *listo. Entonces, lo que tu propones es hallar las preimágenes* [Daniel afirma que sí] *entonces ¿cómo resolvemos eso?, ¿cómo hallamos las preimágenes, los valores de* x*?*
> **L6. Daniel**: *Despejando la función.*
> **L7. Profesor**: *¡Listo! Comiencen a despejarla.*

Una vez el profesor formula la pregunta (L1), Daniel toma la iniciativa para justificar que debe integrarse con respecto a la variable y, puesto que la región limitada debe hacerse girar alrededor del *eje* y (L2). No obstante, el profesor con el propósito, primero, de profundizar en la respuesta dada por Daniel y, segundo, de promover el encuentro de los integrantes con el sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del *eje* y un rectángulo representativo acude a una proyección de la región limitada a través de GeoGebra. El profesor, apoyándose en la proyección, inicialmente los invita a que observen la pantalla del computador, con el propósito de centrar la atención en la función $f(x)$ que limita a la región (Figura 2a).

De este modo, el profesor acude a la enunciación de la expresión "aquí en color rojo está", la cual es acompañada simultáneamente con el deslizamiento de su dedo índice sobre la pantalla del computador recorriendo a la curva de $f(x)$ (Figura 2b) y complementada por Danna enunciando la palabra "la función" (L3). En este segmento de la actividad se observa cómo son movilizados sincrónica y dinámicamente varios medios semióticos de objetivación por parte del profesor y Danna para hacer visible al ámbito de la atención, entendimiento y reflexión de los demás integrantes la función, en este caso $f(x)$, que limita a la región que debe girarse alrededor del *eje* y.

Figura 2

Proyección de la región limitada (2a) y deslizamiento del dedo índice sobre la curva $f(x)$ *(2b)*

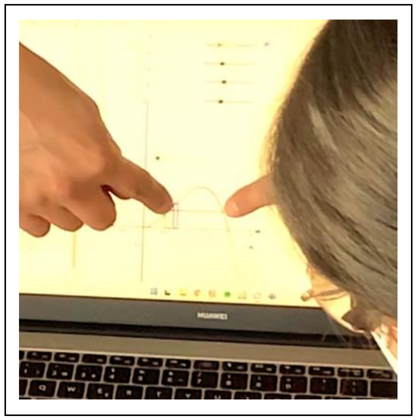


2a	2b

Tan pronto es reconocida la función, el profesor interviene, basándose en la respuesta dada por Daniel (L2), con el propósito de constituir en objeto de reflexión a uno de los tantos rectángulos representativos inscritos en la región limitada. Para ello, el profesor acude a la enunciación de la expresión "si nosotros formulamos un rectángulo representativo sería este" y la entrelaza con la delimitación del rectángulo a través de sus dedos índice (Figura 3). A través de esta coordinación de medios semióticos de objetivación, el profesor quiere hacer visible a los integrantes que el rectángulo representativo está limitado de izquierda a derecha por la curva de $f(x)$ y, más específicamente, por dos preimágenes de ésta.

Figura 3

Delimitación de uno de los rectángulos representativos inscritos en la región a través de los dedos índice



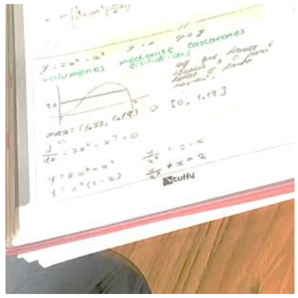
Continuando con su intervención, el profesor los invita a reflexionar con respecto al sólido que se obtiene al hacer girar el rectángulo representativo alrededor del *eje* y (L3). Esta invitación es realizada a través de la enunciación y del deslizamiento de su dedo índice sobre la pantalla del computador, formando óvalos alrededor del *eje* y que está siendo proyectado en GeoGebra. Ante esta invitación, Daniel responde que se forma una arandela (L4). Basándose en dicha respuesta, el profesor confirma que se trata de una arandela ya que queda un hueco entre el *eje* y y el extremo izquierdo de la curva de la función (L4); hueco que el profesor hace invisible con la ubicación de uno de sus dedos índice sobre el *eje* y y el otro sobre el extremo izquierdo del rectángulo representativo.

Una vez es identificado el sólido, el profesor enfatiza que la propuesta de Daniel consiste en hallar las preimágenes de la función (L5), más específicamente, los valores de x en los cuales se encuentran los extremos del rectángulo representativo. Con base en esta propuesta, el profesor les pregunta *¿cómo hallamos las preimágenes, los valores de* x*?* (L5). Esta pregunta es planteada con un doble propósito. Por un lado, se busca poner en evidencia el procedimiento implementado por ellos para determinar dichas preimágenes. Por otro lado, se quiere que los estudiantes tomen conciencia de las limitaciones que existen para determinarlas. No obstante, ante la pregunta planteada, Daniel expresa que las preimágenes se hallan despejando a la función (L6), es decir, despejando a la variable x. Con base en esta respuesta, el profesor los invita a que comiencen a hacerlo y se retira para trabajar con los integrantes de otro de los grupos conformados.

Los integrantes del grupo discuten durante varios minutos, planteando algunos procedimientos para despejar a la variable x de la ecuación $y = 2x^2 - x^3$, por ejemplo, factorizar a x^2 del lado derecho de la igualdad anterior, con el propósito de agrupar las x, del x^2 y x^3, en una sola x. No obstante, sus intentos no presentaban resultados favorables, debido a la dificultad de los estudiantes para agrupar en una sola x a x^2 y a x^3.

Figura 4

Producción escrita del procedimiento para despejar a x de la ecuación (4a) y su transcripción (4b)

	$y = 2x^2 - x^3 \quad (\mathbf{1})$ $y = x^2(2 - x) \quad (\mathbf{2})$ $\frac{y}{x^2} = 2 - x \quad (\mathbf{3})$ $\frac{y}{x^2} + x = 2 \quad (\mathbf{4})$
4a	4b

Luego de la discusión entre los integrantes, el profesor se acerca, nuevamente, con el propósito de promover una discusión que les permita reconocer que no es tarea fácil despejar a la variable x.

> **L8. Profesor**: *¿Quieren despejar a quién?*
> **L9. Danna**: *Queremos ponerla en función de* y [Refiriéndose a la función].
> **L10. Profesor**: *Exacto. Y para eso sólo debería haber una* x. *Para que quede* x *igual a lo que sea. Y al otro lado lo que sea debe estar en términos de* y. *¿Estamos de acuerdo?*
> **L11. Danna**: *Sí*.
> **L12. Profesor:** *Pero el lío, es que ustedes tienen dos* x [Señala con su dedo índice las dos x que hay en la ecuación (1)] *y pueden sacar factor común* [Señala con su dedo índice la ecuación (2)]. *¿De acuerdo? Pero, les sigue quedando dos* x, *porque recuerden que, si uno quiere despejar, las agrupa y queda una sola. Pero, acá no es posible. Entonces, ¿cuál es la conclusión? Despejar* x *en esta ecuación no es tarea fácil. En ese sentido ya no funciona el método de discos*.

Inicialmente, el profesor interviene con el propósito de reconocer si los integrantes han tomado conciencia sobre la variable a despejar (L8), obteniendo como respuesta que la función debe expresarse en términos de y (L9). Con base en dicho reconocimiento, el profesor resalta que para lograrlo solo debería haber una x en la igualdad y que dicha x debe estar despejada, garantizado así que la expresión algebraica que esté al otro lado de la igualdad contenga únicamente a la variable y. Este aspecto resaltado por el profesor es acompañado simultáneamente con el señalamiento de las dos x que hay en la ecuación (1) de la Figura 4b. Adicionalmente, el profesor resalta que de dicha ecuación (1) se puede extraer el factor común x, acción que es acompañada con el señalamiento de la ecuación (2) de la Figura 4b. En seguida, él les pregunta si están de acuerdo con los aspectos resaltados, obteniendo un sí por parte de Danna. Continuando con la discusión el profesor resalta, primero, que a pesar de factorizarse la x, siguen quedando dos x (L12) y, segundo, que para despejarla solamente debe quedar una y para ello es necesario agruparlas, lo cual no es posible. Con base en los aspectos resaltados, el profesor concluye que no es tarea fácil despejar a la variable x y por dicha razón no es posible aplicar el método de discos para determinar el volumen del sólido.

A través de la movilización sincrónica de las enunciaciones y los señalamientos el profesor no solamente está reconociendo los procedimientos encarnados en la producción matemática de los integrantes, sino también haciendo visible al ámbito de la atención, del entendimiento y de la reflexión que despejar la variable x no es tarea fácil, puesto que las equis del x^2 y x^3 no pueden agruparse en una sola.

Produciendo una fórmula para determinar el volumen de un cascarón cilíndrico

Una vez se ha tomado conciencia de que despejar la variable x de la ecuación no es tarea fácil, el profesor acude, nuevamente, a la modelación de la tarea a través de GeoGebra. La articulación de dicha modelación tiene como propósito promover el reconocimiento de algunos cascarones cilíndricos que se pueden formar al girar con respecto al *eje y* algunos rectángulos representativos que están inscritos en la región limitada.

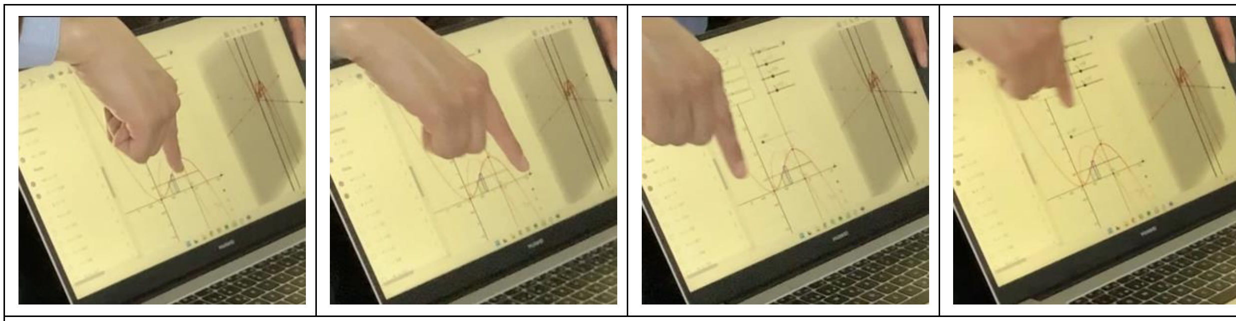
> **L13. Profesor**: *Les hago una propuesta: Observen que hay dos rectángulos* [Señala los dos rectángulos, que están siendo proyectados, con su dedo índice]. *Uno de color verde y uno de color azul. Si yo los giro respecto al eje* y [Desliza su dedo índice formando óvalos alrededor del eje y que está siendo proyecto]. *¿Qué sólido generaría?*
> **L14. Daniel**: *Una cinta* [Desliza su dedo índice formando óvalos en el aire].
> **L15. Profesor**: *¡Ah, como la cinta! Con un hueco en el centro*.

Inicialmente, el profesor llama la atención de los integrantes, indicándoles que observen los dos rectángulos que están siendo proyectados a través de GeoGebra. Esta indicación es acompañada con el señalamiento de éstos a través de su dedo índice. Una vez es dada la indicación el profesor plantea que si dichos rectángulos son puestos a girar con respecto al *eje* y, *¿qué sólido generaría?* (L13). Este planteamiento es acompañado por la formación de óvalos, con el dedo índice, alrededor del *eje y* (Figura 5a). A través de la formación de los óvalos, el profesor busca que los integrantes tomen conciencia, gracias a su actividad perceptual, de la manera en que son puestos a girar los rectángulos representativos.

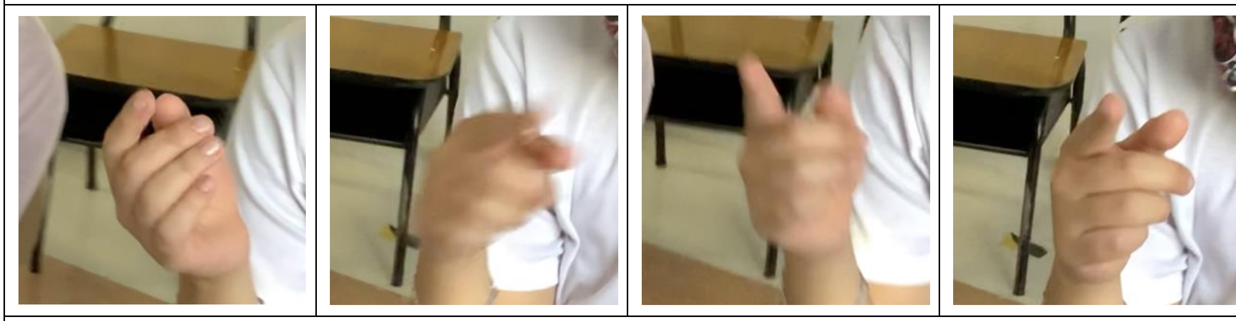
Respondiendo a las acciones y enunciaciones por parte del profesor Daniel interviene para comunicar que se formaría una cinta (L14), simultáneamente que desliza su dedo índice en el aire formando óvalos (Figura 5b). A través de la formación de los óvalos, Daniel busca hacer visible al ámbito de la atención, del entendimiento y de la reflexión del profesor y de sus compañeros el sólido que se forma. Ante la respuesta de Daniel el profesor destaca que el sólido que se forma es como una cinta, un objeto cilíndrico, pero con un hueco en su interior (L15).

Figura 5

Deslizamiento del dedo índice del profesor alrededor del eje y (5a) y del dedo índice de Daniel en el aire (5b)



5a



5b

Para hacer explícito, ante los ojos de los integrantes, el sólido que se forma al hacer girar con respecto al eje y a cada uno de los rectángulos representativos, el profesor solicita a María que manipule la construcción realizada en GeoGebra.

> **L16. Profesor**: *María busca acá, superficies, por favor* [Refiriéndose a la vista algebraica de GeoGebra]. *¿Están de acuerdo que se forma ese sólido?* [Los integrantes afirman que sí]. *Vamos a salir de la duda. Dale clic acá, en el icono de play. Y entonces observen acá* [Refiriéndose a la vista gráfica 3D]. *Listo, más o menos como la cinta. ¿Cómo puedo determinar el volumen de ese sólido?*

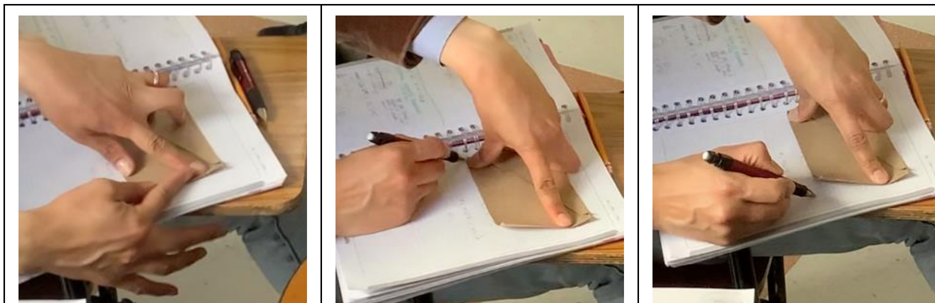
Específicamente, le solicita a María buscar en la vista algebraica de GeoGebra las superficies que han sido construidas para hacerlas visibles, puesto que se encuentran ocultas. Mientras que María hace la búsqueda de las superficies, el profesor pregunta al resto si están de acuerdo con que se ha formado el sólido propuesto por Daniel, una cinta, obteniendo como respuesta que sí (L16). Una vez María encuentra las superficies, ella las hace visibles simultáneamente que el profesor le solicita darle clic en el ícono de *play*, con el propósito de poner en movimiento la animación y así modelar la construcción de dichos sólidos. Tan pronto es modelada la construcción de uno de estos sólidos, el profesor resalta una vez más que se asemeja a la cinta (L16). Así mismo, invita a los integrantes a reflexionar en torno a la pregunta *¿cómo puedo determinar el volumen de ese sólido?* (L16). Luego de llevar a cabo varios intentos sin éxito para determinar el volumen del sólido, el profesor interviene con el propósito de promover una toma de conciencia progresiva de las longitudes implicadas en el sólido, cascarón cilíndrico, y en el cálculo de su volumen.

> **L17. Profesor**: *Hagamos un ejercicio* [Saca un cascarón cilíndrico construido en cartón]. *¿Tienen tijeras?* [Tan pronto Danna le entrega sus tijeras, las utiliza para cortar verticalmente el cascarón]. *Es más, o menos ese* [Haciendo referencia al cascarón que está dibujado en el cuaderno]. *Pero, más delgado* [Daniel interviene para decir *¡Ah! Ok*]. *Entonces pensemos acá. Yo lo abro* [Despliega sobre el cuaderno la versión plana del cascarón] *Pregunta: ¿cuánto mide de aquí hasta acá?* [Traza un segmento vertical por cada extremo, izquierdo y derecho, del ancho de la versión plana del cascarón]. *Supóngase que el radio es* r*, ¿cuánto mide de aquí hasta acá?* [Desliza horizontalmente el lápiz desde el extremo izquierdo hasta el extremo derecho del ancho de la versión plana del cascarón].
> **L18. Profesor**: *Lo vuelvo a como estaba antes* [Toma la versión plana para hacer coincidir los extremos, izquierdo y derecho, formado así nuevamente el cascarón]. *¿Qué forma tiene éste?* [Desliza, en el sentido de las manecillas del reloj, su dedo índice sobre la circunferencia de la cara circular superior del cascarón. Daniel interviene para afirmar que forma una circunferencia] *¿Cómo cálculo la circunferencia o el perímetro del círculo? ¿cuál es la fórmula?*
> **L19. Carolina**: $2\pi r$.
> **L20. Profesor**: $2\pi r$ [Escribe en el cuaderno $2\pi r$]. $2\pi r$ *¿listo? Es esta distancia de aquí hasta acá* [Con los dedos índice de ambas manos cubre los extremos, izquierdo y derecho, del ancho de la versión plana del cascarón] *¿Están de acuerdo?* [Daniel afirma que sí].

En su intervención el profesor invita a los integrantes a que realicen un ejercicio. Para ello, acude a un cascarón cilíndrico construido en cartón, el cual recorta verticalmente con el propósito de materializar su versión plana, un rectángulo con un grosor muy delgado. Simultáneamente que lo corta, resalta que éste se asemeja al que está dibujado en el cuaderno. Pero, con la precisión de que es más delgado. Ante este aspecto resaltado por el profesor, Daniel interviene para manifestar su reconocimiento, de algo que está allí, pero de lo cual no lograba tomar conciencia, a través del *¡Ah! Ok* (L17). Continuando con su intervención, el profesor los invita a reflexionar en torno a las longitudes implicadas en la versión plana del cascarón a través de la expresión "*pensemos acá*". Para ello, despliega la versión plana sobre el cuaderno, acción que es acompañada por la enunciación de la expresión "*yo lo abro*" a través de la cual busca llamar la atención, y más específicamente la actividad perceptual de los integrantes. Una vez lograda su atención les pregunta *¿cuánto mide de aquí hasta acá?* (L17), simultáneamente que traza un segmento vertical por cada extremo, izquierdo y derecho, del ancho de la versión plana del cascarón (Figura 6b).

Figura 6

Despliegue del cascarón cilíndrico en cartón (6a) y trazo de un segmento vertical en cada extremo del cascarón (6b)

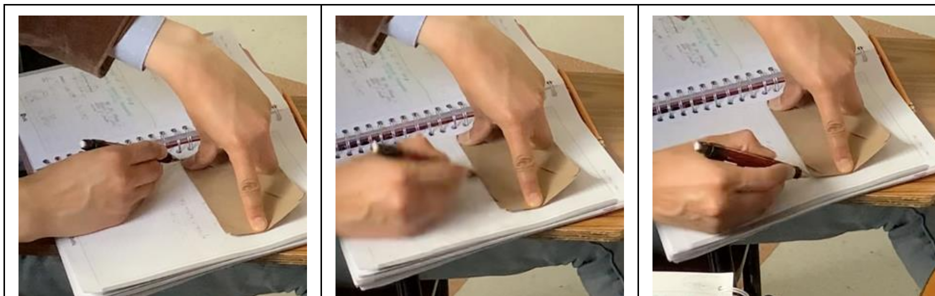


6a 6b

Adicionalmente en su intervención, el profesor les propone a los estudiantes que asuman que el radio de la base superior o inferior del cascarón cilíndrico sea r. Esta propuesta, es acompañada con la enunciación, una vez más, de la pregunta *¿cuánto mide de aquí hasta acá?* (L17), simultáneamente que desliza horizontalmente el lápiz desde el extremo izquierdo hasta el extremo derecho del ancho de la versión plana del cascarón (Figura 7). Así mismo, él recurre a formar la versión sólida del cascarón, haciendo coincidir ambos extremos, izquierdo y derecho.

Figura 7

Deslizamiento horizontal del lápiz de izquierda a derecha sobre el ancho de la versión plana del cascarón cilíndrico

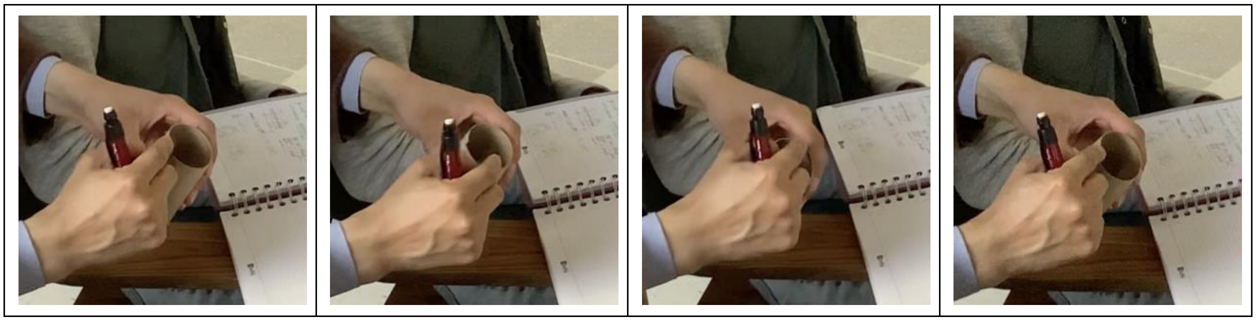


Una vez formada la versión sólida, el profesor les pregunta a los integrantes *¿Qué forma tiene éste?* (L18), simultáneamente que desliza en el sentido a las manecillas del reloj, su dedo índice sobre la circunferencia de la cara superior del cascarón (Figura 8). Con base en los gestos realizados por el profesor y la pregunta planteada por él, Daniel expresa que la forma corresponde a la de una circunferencia.

Basándose en dicha respuesta, el profesor invita a los integrantes a reflexionar en torno a la pregunta *¿Cómo cálculo la circunferencia o perímetro del círculo?* (L18).

Figura 8

Deslizamiento del dedo índice sobre la circunferencia de la cara superior del cascarón cilíndrico



Carolina interviene al llamado del profesor afirmando que la fórmula es $2\pi r$, fórmula que es registrada en el cuaderno y que es entrelazada a su representación en el cascarón, cubriendo a través de los dedos índice de ambas manos los extremos, izquierdo y derecho, del ancho de la versión plana del cascarón. Una vez es llevada a cabo la coordinación sincrónica entre la enunciación de la respuesta y los gestos que acompañan a dicha enunciación, el profesor les pregunta si *¿están de acuerdo?* (L20), a lo cual Daniel afirma que sí.

Tan pronto es reconocida y expresada alfanuméricamente la circunferencia del cascarón, ancho de la versión plana, por los integrantes, el profesor los invita a continuar tomando conciencia de otra de las longitudes implicadas en éste.

> **L21. Profesor**: *Ahora ¿cuánto mide esto?* [Con su dedo pulgar y su dedo índice limita la altura de la versión plana del cascarón].
> **L22. Daniel**: *La altura*.
> **L23. Profesor**: *Por* h [Complementa el $2\pi r$ añadiéndole la h]. *Pero, acá estoy calculando un área* [Levanta y extiende la versión plana del cascarón] *si se dan cuenta porque es el producto entre dos dimensiones, ancho por alto.*

Con el propósito de que los integrantes tomen conciencia, ahora, de la altura del cascarón, el profesor interviene para preguntarles *¿cuánto mide esto?* (L21). Pregunta que no hace explícita la longitud a la que se está haciendo referencia. Pero, que gracias a que la enunciación de dicha pregunta está entrelazada a la acción gestual de limitar el extremo inferior y superior con el dedo pulgar y el dedo índice del profesor (ver Figura 9), logra ser reconocida y comprendida por los integrantes a través de su actividad perceptual.

Figura 9

Delimitación de la altura del cascarón en cartón a través del dedo pulgar y el dedo índice de la mano derecha

Daniel interviene, ante esta movilización sincrónica y dinámica de medios semióticos de objetivación por parte del profesor, afirmando que dicha longitud corresponde a la altura (L22). El profesor aprovechando dicha afirmación plantea que se debe multiplicar por h a $2\pi r$, simultáneamente que escribe la h después de $2\pi r$.Una vez es definida dicha expresión alfanumérica entre el producto de la circunferencia y la altura del cascarón cilíndrico, interviene el profesor para resaltar que hasta ese preciso instante se está calculando el área (L23), mientras que levanta y extiende la versión plana del cascarón. Adicionalmente, justifica que se está calculando el área porque dicho producto, $2\pi r(h)$, implica dos dimensiones, el ancho y la altura del cascarón. Este énfasis en relación con el producto establecido hasta el momento es puesto en movimiento por el profesor con la intensión de propiciar la reflexión y discusión en torno a la última longitud implicada en el cascarón cilíndrico, la profundidad.

> **L24. Profesor:** *¿Qué longitud hace falta para que sea volumen?*
> **L25. Carolina:** *Profundidad* [Daniel afirma que sí].
> **L26. Profesor:** *Profundidad que sería ésta.* [Encierra con su dedo pulgar e índice el grosor de la versión plana del cascarón] *Muy pequeña. Vamos a llamarla delta de* x [Complementa el $2\pi rh$ añadiéndole el dx]. *Con este* [Señala la versión plana del cascarón] *que es este mismo* [Señala el cascarón que está dibujado en el cuaderno] *pero en su versión plana. Le estamos hallando el volumen. ¿listo? Conclusión el volumen está dado por esta expresión* $2\pi rhdx$.

Teniendo en cuenta dicha intención, el profesor les pregunta ¿qué le hace falta para que sea volumen? (L24), obteniendo como respuesta, por parte de Carolina, que la profundidad. Respuesta que también comparte Daniel (L25). Una vez identificada la última longitud implicada, el profesor la materializa en la versión plana, encerrándola con su dedo pulgar y su dedo índice de la mano derecha (ver Figura 10). Adicionalmente, menciona que dicha profundidad es muy pequeña y que será denotada como *delta de* x, dx, notación que añade a $2\pi rh$, obteniendo así, $2\pi rhdx$. Ahora bien, el profesor buscando poner en evidencia que esa última expresión permite determinar el volumen del cascarón enfatiza que como la versión plana del cascarón es análoga al cascarón que se encuentra dibujado en el cuaderno, el volumen de la versión plana es igual al volumen del cascarón dibujado. Por esa razón, se puede concluir que, a través de dicha expresión, $2\pi rhdx$, se puede determinar el volumen del cascarón.

Figura 10

Delimitación de la profundidad de la versión plana del cascarón a través del dedo pulgar y el dedo índice

Hasta este momento de la actividad se han movilizado formas sensibles y materiales de producción asociadas al saber, es decir, al volumen de un cascarón cilíndrico. Estas formas están íntimamente entrelazadas: a la delimitación de las longitudes que están implicadas en el cascarón cilíndrico a partir de su versión plana, a la materialización de dichas longitudes a partir de expresiones alfanuméricas que dan cuenta de su caracterización geométrica-métrica y a la constitución de la fórmula que permite determinar el volumen del cascarón cilíndrico; fórmula que captura y actualiza todo el proceso gradual, sensible y material de producción del saber matemático (el volumen de un cascarón cilíndrico). Este proceso gradual, sensible y material emerge como producto no solamente de los diferentes medios semióticos de objetivación movilizados por el profesor y los integrantes sino también de la unificación de actuaciones, enunciaciones, esfuerzos y energías movilizadas por todos los implicados.

Reconociendo la fórmula para determinar el volumen de un sólido de revolución

No obstante, entre los integrantes surge la necesidad de dotar de sentido y significado a cada longitud implicada en la fórmula $2\pi rhdx$, en el contexto del plano cartesiano, de la función y del eje de rotación. Esta necesidad es puesta en evidencia por Carolina, al preguntar *¿quién es r?* (L27). Con el propósito de dar respuesta a dicha necesidad y de posibilitar el encuentro de los integrantes con el método de cascarones cilíndricos para determinar el volumen del sólido de revolución de esta tarea, el profesor promueve una discusión a partir de las preguntas: *¿quién creen que es r?* y *¿quién es r con respecto a la gráfica, al plano cartesiano?* (L28).

L27. Carolina: *Pero ¿quién es* r*?*
L28. Profesor: *Entonces Carolina tiene una pregunta de quién es* r *¿quién creen que es* r*? ¿quién es* r *con respecto a la gráfica, al plano cartesiano? Vuelvo acá* [Toma la versión plana del cascarón para hacer coincidir los extremos, izquierdo y derecho, formado así nuevamente su versión sólida] *¿Quién es* r *acá?*
L29. Daniel: *Pues el radio del círculo*.
L30. Profesor: *Es decir, la distancia del centro hasta acá* [Ubica el lápiz en el centro de la circunferencia de la parte superior del cascarón. Luego, desde allí desliza el lápiz en línea recta hasta un punto sobre la circunferencia, ubicándolo allí].

Estas dos preguntas, complementarias, son propuestas con el propósito de que la reflexión que emerja esté entrelazada al enunciado de la tarea propuesta, más específicamente a la función, al intervalo de integración y al eje de rotación. No obstante, el profesor acude nuevamente al cascarón para hacer visible, una vez más, dicha longitud, r. Esta acción es acompañada con la enunciación de la pregunta *¿quién es* r *acá?* (L28), haciendo referencia al cascarón cilíndrico. Ante esta pregunta, Daniel responde que se trata del radio del círculo (L29). Aprovechando dicha afirmación, el profesor materializa, a través de la enunciación, la ubicación y del deslizamiento del lápiz (L30, Figura 11), que el radio es la distancia del centro hasta cualquier punto sobre la circunferencia.

Figura 11

Ubicación del lápiz en el centro de la circunferencia (11a) y sobre un punto de la circunferencia (11b)

11a	11b

Una vez es reconocido el radio en el contexto del cascarón cilíndrico, el profesor entrelaza las actuaciones y enunciaciones realizadas, previamente, con la modelación proyectada a través de GeoGebra, con el propósito de vincular cada longitud en el contexto del plano cartesiano y la función. Para materializar dicho propósito explica que el radio podría ser la distancia desde el cero hasta cierto punto, el cual hace coincidir con el punto medio de la base de uno de los rectángulos representativos.

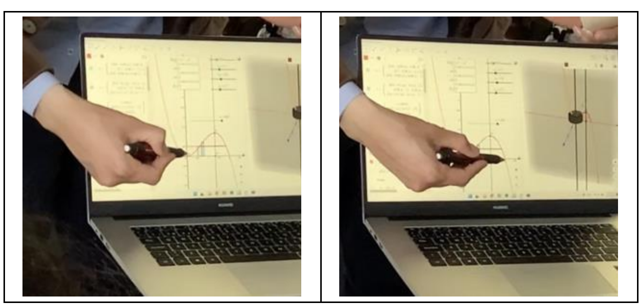
Esta explicación es acompañada con el señalamiento de dicho punto con el lápiz. Una vez es realizada dicha acción gestuales y enunciación, pregunta a los integrantes si están de acuerdo, obteniendo como respuesta que sí.

> **L31. Profesor**: *Aquí* [Refiriéndose a la modelación proyectada a través de GeoGebra] *sería éste, la distancia de cero* [Señala con el lápiz el origen del plano cartesiano] *puede ser a este punto* [Señala con el lápiz el punto medio de la base del rectángulo representativo verde]. *Sería* r. *¿Sí?* [Daniel y Carolina afirman que sí] *porque ahí se forma éste* [Ubica el cascarón frente a la pantalla].
> **L32. Daniel**: *Pero ¿cómo encontramos ese punto?* [Refiriéndose al punto medio].
> **L33. Profesor**: *Llamémoslo* x_i. *No sabemos cuál es. Pero, sabemos que está entre cero y dos* [Simultáneamente a la enunciación, primero, señala con el lápiz el punto $(0,0)$. Segundo, desliza el lápiz de izquierda a derecha hasta el punto $(2,0)$. Tercero, deja el lápiz sobre el punto $(2,0)$. Daniel manifiesta que está de acuerdo]. *Entonces a* r *lo vamos a llamar* x_i. *O mejor, llamémoslo así,* x [Escribe en el cuaderno la expresión $2\pi x$], *donde* x *es uno que está comprendido entre cero y dos. ¿Están de acuerdo?* [Los integrantes afirman que sí].

No obstante, Daniel se cuestiona sobre el procedimiento para encontrar el punto medio del rectángulo representativo (L32). El profesor acude al llamado de Daniel, respondiéndole que ese punto puede denominarse x_i y que, aunque no se conozca con exactitud cuál es, ese punto va a estar comprendido entre $(0,0)$ y $(2,0)$. Esta respuesta es acompañada simultáneamente por el señalamiento del punto $(0,0)$ con el lápiz, el deslizamiento de éste de izquierda a derecha hasta el punto $(2,0)$ y el señalamiento del punto $(2,0)$ (ver Figura 12). Ante la respuesta brindada por el profesor, Daniel manifiesta su aprobación (L33).

Figura 12

Señalamiento con el lápiz del punto $(0,0)$ *y del punto* $(2,0)$



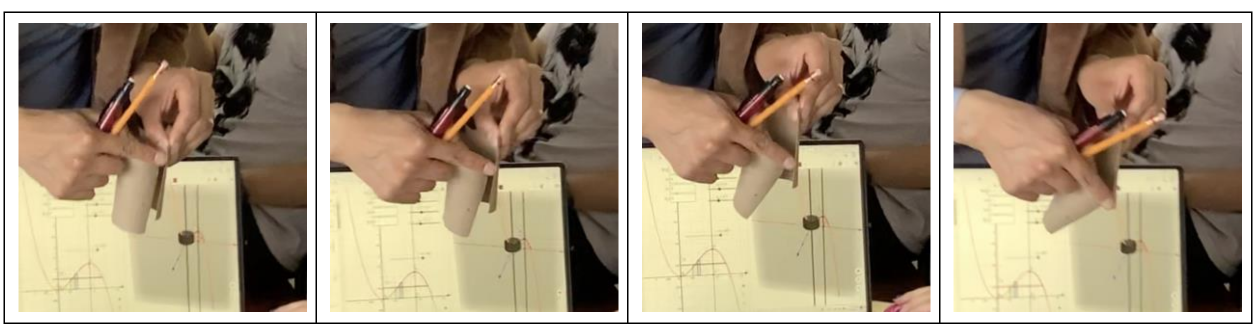
No obstante, el profesor complementa su respuesta manifestando que a r lo van a denominar x_i o mejor aún, x, expresión que es escrita por él en uno de los cuadernos. Adicionalmente, hace la precisión de que x es un valor comprendido entre el cero y el dos, los x que corresponden a la intersección del eje x y $f(x)$. Una vez que es dotado de sentido y significado el radio del cascarón en el contexto del plano cartesiano, el profesor dando continuidad a su propósito, les pregunta quién es h.

> **L34. Profesor**: *Listo. Ahora pregunta ¿quién sería* h *en términos del plano cartesiano, la gráfica? Imagínense que éste es el azulito* [Ubica el cascarón cilíndrico frente a la pantalla del computador]. *Y el rectángulo, miren, este fue el rectángulo azul que pusimos a girar* [Desliza su dedo índice de arriba hacia abajo sobre el grosor de la versión plana del cascarón]. *Supremamente delgado.*
> **L35. Daniel**: *La imagen de ese punto*.
> **L36. Profesor**: *La imagen. ¡Muy bien! ¿Matemáticamente cómo denoto la imagen de una función?*
> **L37. Daniel**: *Por la fórmula* [Carolina interviene para enunciar que a través de la letra y].
> **L38. Profesor**: y, *¿o de qué otra manera? ¿qué otra expresión usamos?* [Danna interviene enunciado que $f(x)$] $f(x)$ [Escribe en el cuaderno $f(x)$ después de $2\pi x$]. *Recuerdan cómo denotábamos en el método de discos y en el método de arandelas el grosor, el espesor muy delgado*. [Interviene Carolina para enunciar que delta de x]. dx [Escribe en el cuaderno dx después de $2\pi x f(x)$].

La pregunta planteada por el profesor es acompañada por la instrucción de que imaginen que el cascarón cilíndrico de cartón, el cual ubica frente a la pantalla del computador, es el azul que ha sido construido y está siendo proyectado. Así mismo, precisa que el rectángulo representativo azul que fue puesto a girar en la modelación de GeoGebra es el mismo que se puede observar en el grosor de la lámina de cartón. Esta precisión es acompañada por el deslizamiento del dedo índice, de arriba hacia abajo sobre el grosor de la versión plana del cascarón.

Figura 13

Deslizamiento del dedo índice, de abajo hacia arriba, sobre el grosor de la versión plana del cascarón



A través del deslizamiento realizado, el profesor hace visible la altura del cascarón, la cual a su vez corresponde a la altura del rectángulo representativo azul y que finalmente hace referencia a la imagen de la función para el punto medio de dicho rectángulo. Ante la diversidad de medios semióticos de objetivación que son movilizados por el profesor y son interpretados y dotados de sentido por los integrantes, Daniel interviene para concluir que la altura corresponde a la imagen de la función en ese punto (L35). El profesor aprovechando dicha respuesta, plantea *¿Matemáticamente cómo denoto la imagen de una función?* (L36). A través de esta pregunta él busca delimitar el símbolo que representa a la altura de cualquier rectángulo representativo y que debe ser asignado a la fórmula que permite determinar el volumen del sólido.

Daniel toma la iniciativa enunciando que a través de la fórmula. No obstante, Carolina interviene afirmando que a través de la letra y (L37), a partir esta última respuesta el profesor plantea otras dos preguntas, con el propósito de delimitar un poco más el símbolo a utilizar (L38). Danna hace escuchar su voz para manifestar que a través de $f(x)$, el cual es enunciado una vez más y es escrito en el cuaderno seguido de $2\pi x$, obteniendo así $2\pi x f(x)$. Posteriormente, el profesor les solicita que recuerden cómo era denotado el grosor o espesor muy delgado en el método de discos y en el método de arandelas. Ante esta solicitud, Carolina interviene para confirmar que a través de *delta de* x, respuesta que es enuncia una vez más y escrita en el cuaderno seguido de $2\pi x f(x)$, obteniendo así $2\pi x f(x)dx$.

Tan pronto son dotadas de sentido y significado cada una de las longitudes implicadas en el cascarón en el contexto del plano cartesiano, la función y el eje de rotación, el profesor plantea que esa es la fórmula que permite determinar el volumen de uno de los cascarones, por ejemplo, el volumen del cascarón cilíndrico representando a través de la lámina de cartón, el cual ubica frente a la pantalla del computador.

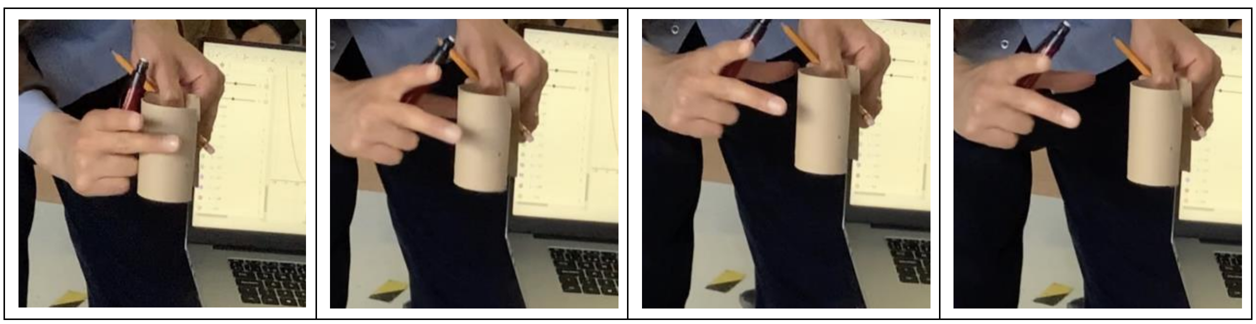
> **L39. Profesor**: *Esta fórmula nos da el volumen de uno de ellos en particular. De éste* [Ubica el cascarón frente a la pantalla del computador]. *Pero imagínense que yo tuviera más capitas acá* [Desliza su dedo índice rodeando el cascarón], *más cascarones cilíndricos y ahí ya puedo calcular el volumen, es decir, conclusión es hacer la sumatoria de este volumen* [Encierra con su dedo pulgar, índice y medio el cascarón] *más otro que está acá* [Encierra, nuevamente, con su dedo pulgar, índice y medio el cascarón. Pero, alejándose sus dedos de éste] *más otro* [Encierra, nuevamente, con su dedo pulgar, índice y medio el cascarón. Pero, alejándose sus dedos de éste] *más otro, más otro, más otro* [Cada vez que menciona la expresión más otro, encierra, nuevamente, con su dedo pulgar, índice y medio el cascarón. Pero, alejándose sus dedos de éste cada vez más]. *¿Si se dan cuenta?* [Los integrantes afirman que sí]. *¿cómo hacemos la acumulación de todas esas sumas? A través de la integral. Entonces tenemos que hacer la integral ¿desde dónde hasta dónde?*
> **L40. Daniel**: *De cero a dos* [Interviene el profesor para afirmar que sí].

> **L41. Profesor**: *Entonces sería de cero a dos,* $2\pi rx$ *que es cualquier* x *que está comprendida entre ese intervalo cerrado de cero a dos, por* $f(x)dx$ *y este es el método, bueno, para este caso particular. Esa es la integral.*

No obstante, el profesor les propone que imaginen si se tuvieran más capitas acá, es decir, más cascarones cilíndricos, simultáneamente que los representa deslizando su dedo índice, varias veces, alrededor del cascarón cilíndrico de cartón. Adicionalmente, él menciona que a través de todos esos cascarones ya se puede calcular el volumen, concluyendo así que calcular el volumen del sólido consiste en realizar la sumatoria de este volumen, *más otro que está acá, más otro, más otro, más otro, más otro* (L39). Simultáneamente que enuncia cada expresión que refiere al volumen del cascarón a sumar, encierra con su dedo pulgar, índice y medio el cascarón. Pero, cada vez, alejando sus dedos de éste a medida que enuncia cada expresión. Tan pronto termina de enunciar los volúmenes a sumar verifica si se han dado cuenta, obteniendo como respuesta que sí.

Figura 14

Gestos asociados a encerrar con el dedo pulgar, índice y medio el cascarón cilíndrico, mientras que aleja sus dedos de éste



Continuando con su intervención, el profesor les pregunta cómo hacen la acumulación de todas esas sumas, es decir, la acumulación de todos los volúmenes. No obstante, él se responde a si mismo que a través de la integral. Respuesta que enuncia una vez más y que complementa preguntado de dónde hasta dónde debe hacerse la integral, obteniendo como respuesta, por parte de Daniel, que desde cero hasta dos (L40). Tan pronto Daniel finaliza su intervención, el profesor delimita que la integral sería de cero a dos de $2\pi rx,$ donde x es cualquier x que está comprendía entre cero y dos, por $f(x)dx$. Una vez delimitada la integral concluye que ese corresponde al método, para ese caso particular, los cascarones cilíndricos.

CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

A través de las evidencias empíricas presentadas es posible observar como las formas sensibles y materiales de producción de saberes asociados al método de cascarones cilíndricos van transformándose, evolucionando y refinándose hasta quedar cristalizadas en una fórmula, en una síntesis cultural colectiva, para determinar el volumen del sólido de revolución propuesto en la tarea; fórmula que trae consigo las trazas de las formas de acción, reflexión y expresión que fueron movilizadas tanto por los integrantes como por el profesor, con el propósito de hacer notar algo que estaba allí pero que estaba siendo desapercibido, que no era reconocido o encontrado y que solo empieza a adquirir forma tangible, revelándose así a la conciencia, a través de la actividad semiótica corpórea, sensorial y artefactual.

Esa forma tangible que empieza a adquirir el saber es producto de la movilización sincrónica y dinámica de diferentes medios semióticos de objetivación no solamente movilizados por los estudiantes o por el profesor sino movilizados por ambos de manera entrelazada, de manera conjunta, complementándose unos a otros. Movilización que constantemente está siendo interpretada, dotada de sentido y significado por los integrantes y el profesor, posibilitando así que lleguen a ser parte del repertorio de acción y reflexión de cada uno de ellos, es decir, constituyéndose así en una capacidad generativa de hacer algo, de reflexionar sobre las cosas y el mundo.

Esta movilización está fuertemente influenciada por el uso de artefactos, en este caso, la versión plana del cascarón cilíndrico a partir de la lámina de cartón y a partir de la modelación proyectada en GeoGebra; artefactos que desempeñaron un papel fundamental en la producción de saberes, puesto que materializaron a los cascarones cilíndricos y a las longitudes implicadas en éstos, las cuales se volvieron visibles al ámbito de la atención, del entendimiento y de la reflexión de los integrantes y del profesor, pero que sobre todo llegan a ser manipulables, posibilitando delimitarlas, señalarlas, tocarlas y relacionarlas tanto en la versión plana como en la versión sólida del cascarón cilíndrico.

No obstante, dichas longitudes implicadas en el cascarón fueron estrechamente relacionadas al contexto del plano cartesiano, la función y al eje de rotación por necesidad de los integrantes, quienes no lograban reconocer como éstas eran representadas en dicho contexto. Solamente, a través de la movilización sincrónica y dinámica entre diferentes medios semióticos de objetivación, entre ellos la modelación proyectada a través de GeoGebra y la versión plana del cascarón cilíndrico se hizo visible dicha relación, logrando que los integrantes reconocieran y dotaran de sentido y significado a cada una de las longitudes y así le asignarán símbolos asociados a la función, al plano cartesiano, al eje de rotación y al intervalo de integración.

Lo anterior, pone en evidencia que la producción de saberes se constituye en un proceso gradual y progresivo en el cual los individuos van tomando conciencia, poco a poco, de formas de pensar, actuar y reflexionar que han sido constituidas histórica y culturalmente como producto del trabajo conjunto de generaciones precedentes. Pero, que a su vez dicho proceso está impregnado de aciertos, desaciertos, tensiones y contradicciones.

En términos generales, los resultados reportados en este artículo ponen en evidencia el *proceso de producción de saberes* entrelazados al método de cascarones cilíndricos para determinar el volumen de un sólido de revolución. Este *proceso de producción* posibilita a los profesores en ejercicio, estudiantes para profesor e investigadores tomar conciencia de la manera cómo se actualizan y materializan dichos saberes matemáticos a través de la actividad semiótica corpórea, sensorial y artefactual y los cuales están basados en formas de colaboración humana de carácter no individualistas. Esta toma de conciencia puede contribuir al fortalecimiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje del cálculo integral en la educación media, técnica y superior y porque no a la constitución de nuevas líneas de acción, reflexión y expresión basadas en la Teoría de la Objetivación, más específicamente en sus constructos teóricos y metodológicos, que posibiliten reconocer, comprender y reflexionar en torno a las formas en las cuales se actualizan y materializan los saberes matemáticos en las aulas de clase.

ACLARATORIAS

El autor no tiene conflicto de interés que declarar. La investigación fue financiada con recursos propios. Queremos agradecer a María, Carolina, Danna, Juliana, Yesenia y Daniel por darnos la oportunidad de constituir una labor conjunta con ellos y para todos, en la cual emergió el encuentro con nuevas formas de ser, de actuar y de pensar en el curso de Cálculo II en la Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

REFERENCIAS

Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática, 19*(3), 5-30.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2017). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore, & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 115-137). Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2018, 13 de abril). *Teaching and learning (algebra or something else): Working together to make sense of similarities and differences between theories (and understanding oneself)* [conferencia]. AERA Symposium Dealing with Diverse Discourses (3D): Can We Build on Each Other's Research Contributions? New York, EE.UU.

Radford, L. (2022). Activité, apprenant(s), apprentissage. *Révue Québécoise de Didactique des Mathématiques,* (Numéro thématique 1), 134-157.

Radford, L. (2023*). La teoría de la objetivación. Una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Uniandes.

Radford L., Bardini C., & Sabena C. (2006). Rhythm and the Grasping of the General. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 393-400). PME.

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the General. The Multi-Semiotic Dimension of Students' Algebraic Activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 507-530.

Sánchez, I. (2017). Una lógica de producción de saberes matemáticos de los promotores del aprendizaje en torno a la elaboración de simuladores con GeoGebra. En J. L. Prieto, & R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del III Encuentro de Clubes de GeoGebra del Estado de Zulia* (pp. 282-299). Aprender en Red.

Sánchez, I. C., & Prieto, J. L. (2019). Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 14*(1), 55-83. https://doi.org/10.30827/pna.v14i1.8657

Sandoval-Troncoso, L., & Ledezma, C. (2021). Los gestos, una manera de comunicar matemática: el caso particular de las funciones. *Educación Matemática, 33*(2), 205-226. https://doi.org/10.24844/EM3302.08

Cómo citar este artículo:

Pantano-Mogollón, O. L. (2023). Produciendo saberes entrelazados al método de cascarones cilíndricos para determinar el volumen de un sólido. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, *3*(3), e202315. https://doi.org/10.54541/reviem.v3i3.78