
# Classificando provas de alunos do ensino médio segundo a tipologia de Balacheff

Leonardo Andrade **da Silva**
Instituto Federal Fluminense – IFF – Campus Cabo Frio
Brasil
leonardolas@yahoo.com.br
Alexis **Silveira**
Universidade Federal Fluminense – UFF
Instituto Federal Fluminense – IFF – Campus Cabo Frio
Universidade Estácio de Sá – UNESA – Campus Cabo Frio
Brasil
prof.alexissilveira@gmail.com
Gesse Pereira **Ferreira**
Instituto Federal Fluminense – Campus Cabo Frio
Brasil
gessepferreira@gmail.com

**Resumo**

Este trabalho é fruto de pesquisa da equipe de matemática, do IFF – Campus Cabo Frio. A pesquisa teve como objetivos analisar e classificar algumas provas feitas por 35 alunos do 3ºano do Ensino Médio-Técnico do IFF – Cabo Frio. Para esta classificação, foi utilizada a tipologia de Balacheff, que diferencia as provas matemáticas em duas grandes categorias: as provas pragmáticas (ligadas à manipulação e a exemplos) e as provas intelectuais (que se distanciam dos exemplos e utiliza-se mais de abstração). Entre as provas pragmáticas, Balacheff distingue três níveis: o empirismo ingênuo, a experiência crucial e o exemplo genérico e, dentre as provas intelectuais, ele destaca a experiência mental. Estes foram os níveis utilizados para classificar as provas dos alunos e assim compreender um pouco mais acerca de seus raciocínios e justificativas. Dos dados analisados, concluiu-se que a maioria das provas realizadas pelos alunos fica entre empirismo ingênuo e experiência crucial.

*Palavras chave:* Prova Matemática, Classificação de Provas, Balacheff.

## Introdução

Inúmeras discussões e reflexões acerca da prova matemática têm sido travadas por matemáticos, lógicos, filósofos e educadores matemáticos, sejam discussões e reflexões de maneira mais geral como encontramos em Hanna e Sidoli (2007) e Da Silva (2011), sejam discussões e reflexões acerca de aspectos mais particulares ligados à prova matemática, como veremos a seguir.

Em Davis (1993), Brown (1997), Giaquinto (2005) e Mancosu (2005), por exemplo, encontramos investigações sobre o uso das representações visuais e sua potencial contribuição para provas matemática. Acerca deste aspecto Hanna e Sidoli (2007) citam que:

> "Em um extremo estão aqueles que dizem que as representações visuais nunca podem ser mais que auxiliares preciosos para a prova, como é seu papel tradicional, como facilitadores da compreensão matemática em geral. No outro extremo estão aqueles que afirmam que algumas representações visuais podem constituir prova em si, tornando qualquer outra prova tradicional desnecessária. Entre esses dois extremos, podemos encontrar uma variedade de posições que são mais sutis, ou que parecem simplesmente menos claras" (Hanna & Sidoli, 2007, p.74).

Além do aspecto citado acima, podemos citar outros aspectos importantes acerca da prova e que são abordados por diversos pesquisadores, como em Balacheff (2006, 2008, 2010) que faz um estudo epistemológico no que diz respeito à prova matemática; em Hanna (1990, 1996) no qual sua pesquisa tem como foco o papel da prova e o ensino da prova matemática; em Rota (1997) que aborda um aspecto mais filosófico em relação à prova, em Dawson (2006) traz à tona a discussão sobre prova formal e prova informal e em De Villier (2010) que traz reflexões sobre os papéis e funções da prova, dentre outros tantos que não foram citados neste momento.

Diante de tantas preocupações de importantes pesquisadores sobre a prova matemática percebemos a necessidade da reflexão sobre o tema também do ponto de vista da educação matemática, no caso particular do processo de ensino e aprendizagem, foco deste trabalho, visto que a observação da produção dos alunos em relação à prova matemática pode trazer um grande ganho para o professor compreender melhor seus alunos, possibilitando que o professor possa refletir sobre sua própria prática.

## Sobre a prova matemática: pensamentos divergentes

Acerca do conceito de prova matemática, podemos citar Rota (1997) que defende a prova matemática do ponto de vista formal, não só por dizer que: "Todo mundo sabe o que é prova matemática. A prova de um teorema matemático é uma sequência de passos que conduz para uma conclusão desejada. (Rota, 1997, p.183)", mas também por dizer que "A expressão "prova correta" é redundante. Prova matemática não admite graus" (Rota, 1997, p.183). Assim sendo, o autor nos transmite a ideia que uma prova matemática pode ter lacunas e ser completada, pode ter algum erro e ser corrigida, no entanto não poderíamos dizer que uma prova matemática está "meio certa" e prova é uma prova formal.

Contrapondo ao pensamento de Rota (1997), Dawson (2006) defende uma proposta diferente para o conceito de prova matemática, dizendo que:

> "Para teorias formalizadas, a noção de uma prova é absolutamente precisa: É uma sequência de fórmulas bem definidas, onde ao fim o teorema é provado e cada um dos

> passos é ou um axioma ou o resultado da aplicação de uma regra de inferência às fórmulas anteriores, em sequência. Não devemos, entretanto, adotar essa definição. Preferencialmente, pegaremos uma prova para ser um argumento informal cujo objetivo é convencer aqueles que se esforçam para verificar que certa afirmação matemática verdadeira (e, idealmente, para explicar porque é verdadeira)" (Dawson, 2006, p.270).

Dawson nos explica ainda que se as atenções fossem voltadas apenas para as provas formais, seria excluída a maior parte das reais provas usadas, visto que são poucas as teorias matemáticas formalmente axiomatizadas. Enfim, Dawson defende a prova informal como a prova mais produtiva e sendo um argumento capaz de convencer uma comunidade matemática:

> "Quem pode dizer, por exemplo, que uma prova agora aceita como válida não será um dia considerada deficiente? E se argumentos defeituosos não têm qualquer validade, porque é que muitos deles acabam por serem reparados para conter, por assim dizer, um "germe" de verdade? A definição de um prova informal como um argumento convincente, a ser realizada por consenso da comunidade matemática em um dado momento, implica que uma prova pode não ser válida para todos os tempos, um ponto de vista que, embora em desacordo com a concepção formal, é o único que parece historicamente defensável" (Dawson, 2006, p.272).

Davis (1993) também argumenta a favor das provas ditas informais, já que segundo o mesmo:

> "A formalização dita cima, nas linhas de Hilbert, é longa, chata, ante-intuitiva, pouco convincente e um absoluto horror estético. Pessoas que tentaram ensinar geometria elementar com um alto nível de rigor cavaram um poço de instrução" (Davis, 1993, p.335).

**Balacheff (1988) é outro autor que defende a prova matemática como argumento informal que tem o objetivo de convencer outras pessoas de que certa afirmação matemática é verdadeira, nesse caso encaixam-se as produções feitas por alunos, visto que em geral, não se produz provas formais nas salas de aula da educação básica, por este motivo escolhemos a tipologia de Balacheff para classificar estas provas.**

## A tipologia de Balacheff

Balacheff, em sua tese, defendida em 1988, diferencia as provas matemáticas em duas categorias que intervêm na aprendizagem da demonstração, as provas pragmáticas e as provas intelectuais:

• As provas pragmáticas, que são provas baseadas em manipulações ou exemplos. Estas são distinguidas em 3 níveis por Balacheff:

 **O empirismo ingênuo**: Não aparecem indícios de processo de validação. Geralmente a afirmação é obtida a partir de alguns casos. Esse nível se caracteriza por verificar a validade de um enunciado por meio de exemplos.

 **A experiência crucial**: Esse nível se caracteriza pela verificação de uma proposição por meio de um caso no qual não se hesita em dizer que se a proposição é verdadeira neste caso, ela funcionará sempre. Distingue-se do empirismo ingênuo, pois na experiência crucial o exemplo utilizado é pouco particular e conhecido.

 **O exemplo genérico**: Aqui há a explicação das razões da validade da afirmação por meio de um objeto seguida de uma generalização, ou seja, ainda é uma demonstração particular, mas que vale para toda classe representada.

• As provas intelectuais, que se caracterizam pelo distanciamento em relação a ação. Dentre as provas intelectuais ele ressalta:

 **O experimento mental:** Invoca a ação, interiorizando-a e afastando-se de sua realização sobre um representante particular.

## Metodologia

A metodologia adotada para a elaboração deste trabalho foi de uma pesquisa bibliográfica associada a uma qualitativa por meio de análise de produção dos alunos. Com o objetivo de classificar algumas provas elaboradas pelos alunos segundo a tipologia de Balacheff, foi elaborado e aplicado um questionário com 14 itens sobre diversos conteúdos já estudados anteriormente ou no Ensino Fundamental ou no próprio Ensino Médio.

O questionário foi aplicado a uma turma do 3º ano do Ensino Médio, no qual 35 alunos participaram da aplicação. Essa turma foi escolhida por estar no 3º ano do Ensino Médio (último ano que estudam matemática, já que no 4º ano não há matemática dentre as disciplinas) e também porque um dos pesquisadores era professor da turma em questão. Os alunos tiveram dois tempos de aula (uma hora e quarenta minutos no total) para responder as questões do questionário no que o fizeram individualmente.

Elaborou-se um questionário com as seguintes questões:

Explique o máximo possível por meio de figuras, palavras ou símbolos:

**1)** Prove que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é dada pela fórmula (n-2). 180º.

**2)** Prove que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º

**3)** Prove que a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360º

**4)** Prove que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é dado pela fórmula n(n-3)/2.

**5)** Prove que a medida de um ângulo inscrito numa circunferência é igual à metade da medida do arco compreendido entre seus lados.

**6)** Prove que a soma de dois números pares pode ser dividida em duas partes iguais.

**7)** Prove que o quadrado de um número par é par.

**8)** Prove que se p2 é par então p é par.

**9)** Prove que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

**10)** Prove que o produto de um número par por um número ímpar será par.

**11)** Demonstre a “fórmula de Bhaskara”.

**12)** Demonstre o teorema de Pitágoras.

**13)** Verifique se é verdadeira ou falsa a afirmação: “n2 –n +41 é um número primo para n natural”.

**14)** Prove que se um triângulo possui dois lados congruentes terá como consequência dois ângulos congruentes.

## A análise dos resultados

O objetivo da pesquisa foi classificar as produções dos alunos segundo a tipologia de Balacheff.

Para alcançar tal objetivo construímos um quadro resumo das classificações das provas feitas pelos alunos (Quadro 1) e apresentamos algumas dessas provas para apreciação de como foram feitas as classificações.

Quadro 1

*Análise Quantitativa das Categorias e Níveis de Prova.*

| Questões | Provas Pragmáticas | | | Provas Intelectuais | Dados insuficientes para categorizar ou não fez a questão |
|---|---|---|---|---|---|
| | Empirismo ingênuo | Experiência crucial | Exemplo genérico | Experimento mental | |
| 1 | 11 | 3 | 3 | 1 | 17 |
| 2 | 9 | 3 | 5 | 0 | 18 |
| 3 | 8 | 3 | 1 | 2 | 21 |
| 4 | 2 | 2 | 0 | 0 | 31 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 35 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 35 |
| 7 | 6 | 7 | 0 | 0 | 22 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 35 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 35 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 35 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 1 | 33 |
| 12 | 3 | 2 | 0 | 0 | 30 |
| 13 | 4 | 6 | 0 | 0 | 25 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 35 |

Infelizmente não houve dados suficientes para analisar resultados das questões 5, 6, 8, 9, 10 e 14. Talvez tenha ocorrido isso pela dificuldade dessas questões ou até mesmo pelo não conhecimento prévio de tais assuntos (pelo menos não da forma que está sendo solicitado para demonstrar).

Importante ressaltar que apareceram muitos resultados interessantes para análise e que apenas algumas respostas de certas questões foram escolhidas para este artigo. Escolhemos algumas provas das questões: 1, 2 e 3, por apresentar os três níveis da tipologia de Balacheff.

**Nas análises das respostas, os alunos tiveram seus nomes descritos por letras do alfabeto**

Na análise da questão 1, apresenta-se a prova desenvolvida pelo <aluno-A> (Figura 1) e pelo <aluno-B> (Figura 2).

**1ª resposta escolhida:**

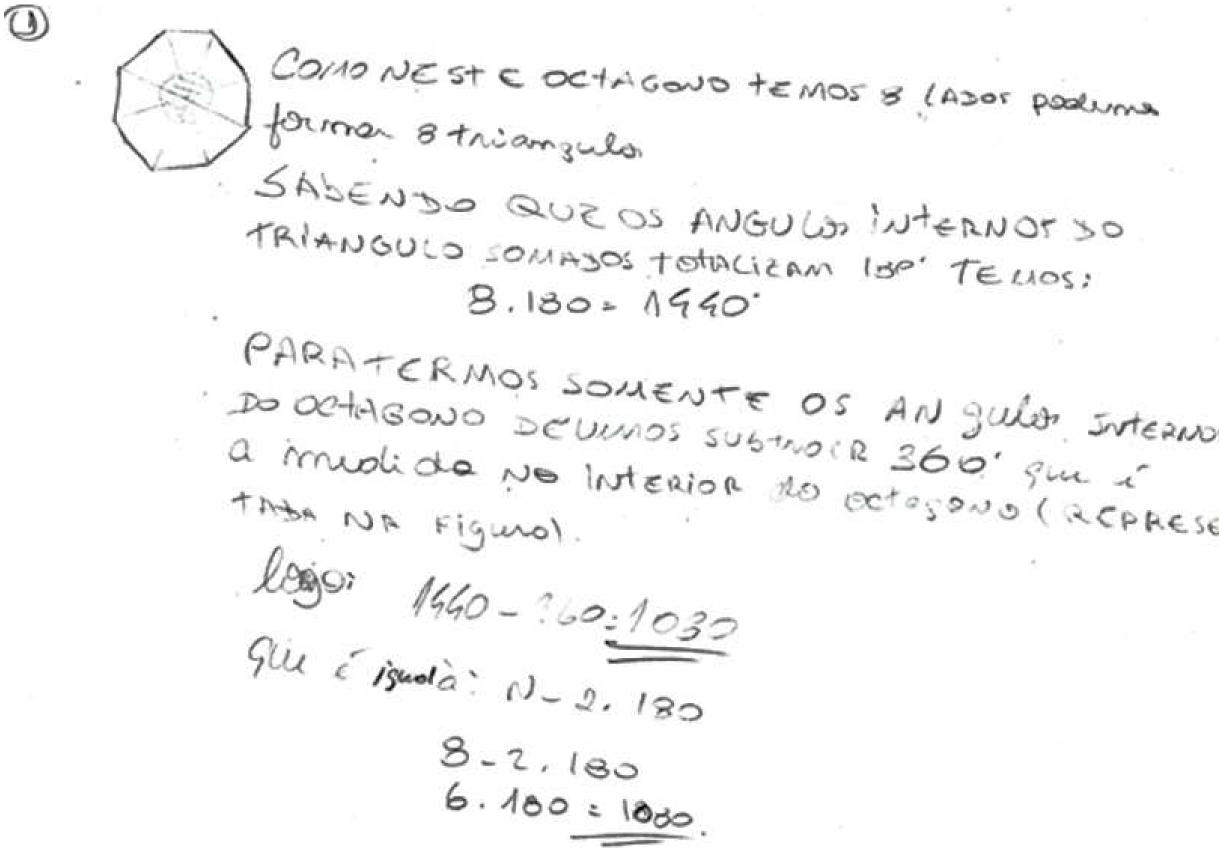


*Figura 1.* Prova da Questão 1 desenvolvida pelo <aluno-A>.

Apesar do <aluno-A> ter utilizado um caso particular, um octógono, observou-se que o raciocínio dele é geral, por este motivo a classificação desta prova é exemplo genérico

**2ª resposta escolhida:**

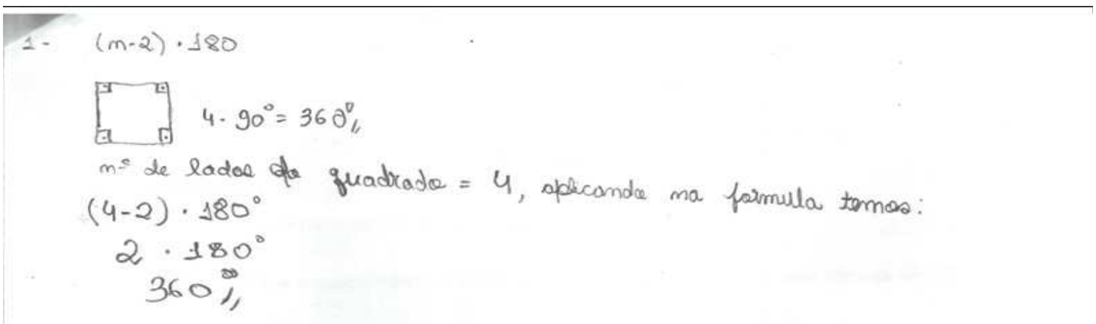


*Figura 2.* Prova da Questão 1 desenvolvida pelo <aluno-B>.

Observou-se que esse aluno utilizou um polígono provavelmente bem conhecido por ele desde o Ensino Fundamental para justificar uma afirmação geral. Por isso a classificação é empirismo ingênuo.

Na análise da questão 2, apresenta-se a prova desenvolvida pelo <aluno-C> (Figura 3), <aluno-D> (Figura 4) e pelo <aluno-E> (Figura 5).

**1ª resposta escolhida:**

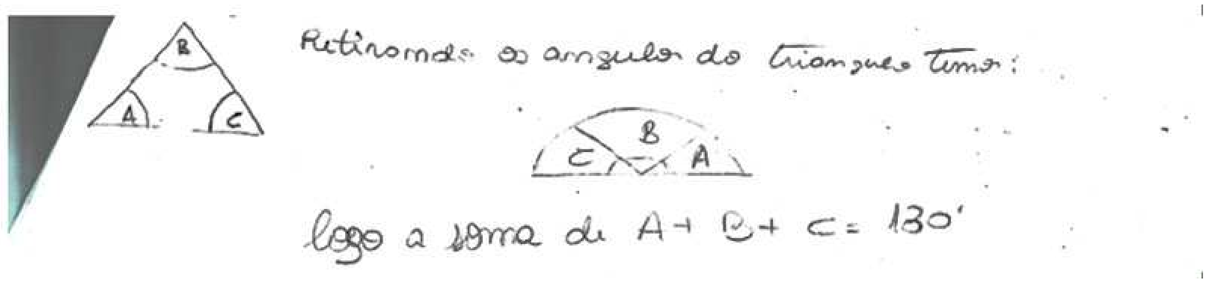


*Figura 3.* Prova da Questão 2 desenvolvida pelo <aluno-C>.

A classificação desta prova é exemplo genérico, visto que não foi colocado um valor específico para os ângulos, mas variáveis.

**2ª resposta escolhida:**

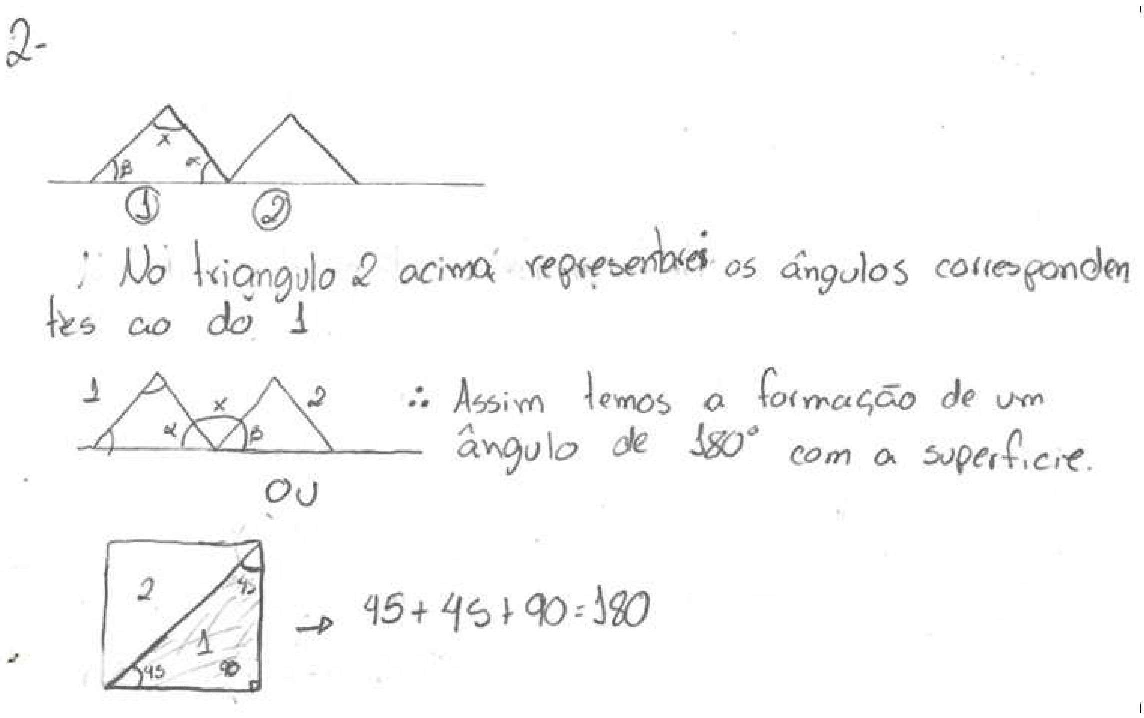


*Figura 4.* Prova da Questão 2 desenvolvida pelo <aluno-D>.

Na primeira parte da prova, pode-se classificar como exemplo genérico, visto que faltou justificar o porquê o x aparece, mas na parte que o aluno utiliza o quadrado para justificar poderse-ia classificar como empirismo ingênuo, visto que se utilizou de um caso particular muito conhecido.

**3ª resposta escolhida:**


*Figura 5.* Prova da Questão 2 desenvolvida pelo <aluno-E>.

Observou-se que o aluno fez mais de um exemplo e que não são tão particulares e conhecidos assim, por isso a classificação como experiência crucial.

Na análise da questão 3, apresenta-se a prova desenvolvida pelo <aluno-F> (Figura 6).

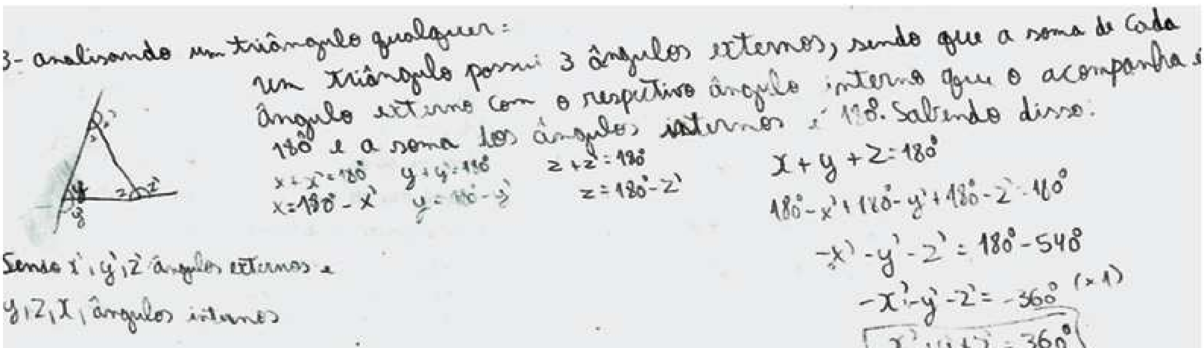


*Figura 6.* Prova da Questão 3 desenvolvida pelo <aluno-F>.

O aluno conseguiu fazer uma demonstração geral, sem utilizar quaisquer representantes particulares, argumentando de forma eficaz e convincente, por isso a classificação como experimento mental.

## Conclusões

Classificando as provas feitas por alunos, observou-se uma grande quantidade de dados insuficientes ou de alunos que não fizeram as demonstrações, o que provavelmente demonstra a grande dificuldade é fazer uma demonstração. Ao classificar as demonstrações, acredita-se compreender seus raciocínios e com isso o professor pode buscar uma melhor forma de ensinar e de fazer com que o aluno aprenda matemática e a provar em matemática, visto que argumentações e justificativas são importantes até mesmo para o dia a dia.

Desses resultados poderíamos nos perguntar por que tão poucos alunos conseguiram dar uma resposta, por exemplo, genérico e como experimento mental? Será que existe alguma relação no processo ensino-aprendizagem de matemática, principalmente no que diz respeito a argumentação e provas no Ensino Básico com esses resultados? Essas são algumas das perguntas que surgem para futuramente pesquisarmos mais a fundo.

Com as análises dos resultados, pode-se observar que poucas foram as provas classificadas como experiência mental (apenas quatro dentre todas as provas apresentadas), nove foram classificadas como exemplo genérico, mas a maioria (dentre as que puderam ser classificadas) foram classificadas como empirismo ingênuo e experiência crucial, o que pode significar que professores devem trabalhar para conseguir que os alunos também justifiquem com o exemplo genérico e com o experimento mental.

Diante dessas análises, os pesquisadores da turma concluíram que se deve trabalhar demonstrações matemáticas em sala de aula, criando um ambiente propício para argumentações e provas serem produzidas pelos próprios alunos.

Eles ressaltaram, também, que alguns desses conteúdos, como por exemplo, geometria básica, a última vez que os alunos tinham estudado havia sido no Ensino Fundamental, e outros tópicos, como “fórmula de Bhaskara”, os alunos haviam estudado com ele, inclusive a demonstração, no 1º ano do Ensino Médio. Mas, de toda forma, acredita-se que os alunos possuíam os pré-requisitos necessários para demonstrar qualquer das demonstrações apresentadas no questionário, o que levou a uma reflexão sobre aprofundar certos conteúdos em sala de aula.

Provas matemáticas devem também ser discutidas em sala de aula, visto que compreender o porquê uma afirmação é verdadeira e não apenas a aceitar por meio de um ou mais exemplos. Assim, pode-se favorecer o aprendizado e a compreensão dos alunos para uma matemática que seja útil e interessante.

## Referências e bibliografia

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des eleves de collège* (Thèse). Université J. Fourier, Grenoble, França.

Balacheff, N. (2006). Bridging knowing and proving: the complexity of the epistemological genesis of mathematical proof. *Explanation and proof in mathematics: philosophical and educational perspectives*. Duisburg, Novembre (proceedings under preparation)

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher´s epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *Mathematics Education, 40,* 501-512

Balacheff, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. In *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 115-136). Springer.

Brown, J. R. (1997). Proofs and pictures. *British Journal for the Philosophy of Science, 48,* 161-180.

Da Silva, L. A. (2011). *Representação Visual e Prova Matemática* (Dissertação). UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in mathematics*, *24*, 333-344.

Dawson, J.W., Jr. (2006). Why do mathematicians re-prove theorems? *Philosophia Mathematica, 3*(14), 269–286.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and Proof in Mathematics, Explanation and Proof in Mathematics. In *Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 205-222). Springer.

Giaquinto, M. (2005). From symmetry to basic geometry. In *Vizualization, Explanation and Reasoning in Mathematics* (pp. 31-55). Springer.

Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Hanna, G. (1996). The Role of Proof in Mathematics Education. *Joetsu Journal of Mathematics Education, 11,*155-168. (In Japanese)

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *Mathematics Education*, *39*, 73-78.

Mancosu, P.et al. (eds.) (2005). Visualization in Logic and Mathematics. In *Vizualization, Explanation and Reasoning in Mathematics* (pp. 13-30). Springer.

Rota, G. C. (1997). The phenomenology of mathematical proof, *Synthese*, *111*, 183–196.