Explorando una consecuencia de la comprensión matemática

Asela **Carlón** Monroy
UNAM, FES-Acatlán
México
asela.carlon@gmail.com
Sergio **Cruz** Contreras
UNAM, FES-Acatlán
México
correoaselasergio@gmail.com

Resumen

La carencia de aprendizajes matemáticos con comprensión no es exclusiva de un determinado nivel educativo ni de un tópico específico. Es, desafortunadamente, una situación generalizada en los salones de clases de matemáticas. Sin embargo, es necesario promover aprendizajes con comprensión. En este trabajo se reporta el desempeño que muestran 70 estudiantes de bachillerato al construir e interpretar gráficas en contexto no matemático. Dicho desempeño se considera como elemento que permite valorar la comprensión que logran los referidos estudiantes en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$, *donde a*, $b \in \Re$, $a \neq 0$ y n = 1, 2 y 3. La manera en la que los alumnos enfrentan los cuestionamientos que se les formulan, revela que logran un aprendizajes con comprensión de las funciones polinomiales elementales, al menos en los aspectos aquí explorados.

Palabras clave: comprensión matemática, aprendizajes con comprensión, funciones, funciones en contexto no matemático, funciones polinomiales, construcción de gráficas, interpretación de gráficas.

Introducción

De acuerdo a investigaciones en educación matemática (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Knuth, 2000; NCTM, 2000, entre otras) muchas de las dificultades que muestran los estudiantes cuando enfrentan tareas que involucran la conversión entre distintas representaciones de una función, pueden ser atribuidas a una "deficiente" comprensión en el aprendizaje de las funciones. Por su parte, el NCTM (2000) afirma que "[a]prender sin comprensión ha sido un problema persistente desde al menos los 1930" (p. 20). Con esto, hace explícito que la situación no es exclusiva del tópico de funciones (alrededor del cual gira este estudio); por el contrario, es generalizada. Pero, por la importancia que tiene el concepto de función tanto en matemáticas como en otras áreas del saber, un aprendizaje "sin comprensión" de él, es un problema crítico. Más aún, si se considera la posición de Hiebert y Carpenter (1992) en el sentido de que una consecuencia de la comprensión es que *aumenta la transferencia* y que, transferir es esencial: nuevos problemas necesitan ser resueltos utilizando estrategias previamente aprendidas. El estudio que en estas páginas se reporta se inscribe en esta problemática.

El Estudio

Propósito

La intención del presente estudio, es explorar la forma en la cual 70 estudiantes de segundo año de bachillerato, al trabajar en grupos pequeños, construyen e interpretan la representación gráfica de funciones elementales en contexto, después de haber sido sometidos a un proceso de instrucción y, haber mostrado, a la luz de una prueba de rendimiento, que 64 de los 70 dominan la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde a, b* $\in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3; con un enfoque global cualitativo y en un contexto puramente matemático.

Se considera que el desempeño que los estudiantes muestren al construir e interpretar las citadas representaciones gráficas, es *un* elemento que permite valorar la comprensión que logran en las referidas funciones polinomiales elementales.

Antecedentes

La importancia del estudio de las funciones en las matemáticas escolares. El NCTM (2000), en sus *Principles and Standards for School Mathematics*, considera a las funciones como uno de los hilos conductores en el proceso enseñanza—aprendizaje desde el Kindergarten hasta el grado 12 y propone que los estudiantes deberían comprender relaciones y funciones, usar varias representaciones, convertir a través de ellas, analizar las funciones investigando el cambio de coeficientes y el comportamiento global de la gráfica.

Dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las funciones. En el ámbito escolar, numerosas observaciones en clase, el análisis de los resultados de encuestas y evaluaciones, así como experiencias de aprendizaje, muestran que los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje de las funciones (Duval, 1999; Ellis, 2003; Eraslan y Aspinwall, 2007; Hartter, 2009; Janvier, 1987; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Moschkovich, 1999; Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993; Pilipczuk, 2008; Rivera, 2007; Romberg, Fennema y Carpenter, 1993; Sinclair y Alayne, 2011; You, 2009).

Aprendizaje y comprensión. El NCTM (2000) reconoce que desafortunadamente aprender matemáticas sin comprensión ha sido por mucho tiempo un resultado común de la instrucción de las matemáticas escolares. Por su parte, Hiebert y Carpenter (1992) señalan que el problema de la comprensión matemática logra su importancia a través de las numerosas demandas hechas en su nombre.

Marco de Referencia

De los elementos que entran en juego (diseño de ambientes de aprendizaje, aprendizaje con comprensión, trabajo en grupos pequeños, funciones, registros de representación y su conversión, entre otros) en el estudio que se reporta, y ante los cuales se asume una postura teórica, en esta sección, se enuncia, brevemente, **una** de ellas: la relacionada con la *comprensión*. Algunas otras, únicamente se refieren en los resultados.

Marco de Referencia para la Comprensión

En este estudio, se asume la posición de Hiebert y Carpenter (1992) para la comprensión matemática. Ellos manifiestan que una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. Para estos autores, las redes se construyen gradualmente cuando nueva información es conectada a una red existente o cuando nuevas relaciones son construidas entre previa información desconectada. Aunado a lo anterior, manifiestan que la forma en la cual un estudiante trata o genera una representación externa revela algo de cómo el estudiante tiene representada esa información internamente. Por otra parte, consideran *que una consecuencia de la comprensión es que incrementa la transferencia*.

Metodología

Previo al estudio

Antes de llevar a cabo el estudio, i) se diseña un ambiente de aprendizaje, bajo los lineamientos de Bransford, Brown y Cocking (1999), con el propósito de que los estudiantes logren el dominio en la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3, con un enfoque global cualitativo y en un contexto puramente matemático; ii) se lleva a cabo el proceso de instrucción con la población bajo estudio y, iii) se aplica el instrumento para valorar el dominio en la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en las funciones polinomiales elementales arriba citadas.

Población sujeta a estudio

70 estudiantes de 4° semestre de bachillerato cuya edad oscila entre los 16 y 17 años.

Instrumento utilizado

Con base a la posición de Hiebert y Carpenter (1992), es posible apreciar el grado de comprensión que alcanzan los estudiantes en funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3, a través de la forma en la cual tratan o generan representaciones externas en virtud de que éstas *revelan algo* del número de conexiones que los alumnos han logrado establecer en sus redes internas de conocimiento y dado que, a mayor número de conexiones, mayor comprensión entonces, es factible valorar la comprensión que logran los estudiantes, en términos del desempeño que muestren cuando enfrentan situaciones problemáticas cuyo contenido matemático está relacionado con las referidas funciones polinomiales. En otras palabras, dicho desempeño es un indicador de la medida en que establecen conexiones pertinentes con otros aspectos de las citadas funciones que *no fueron abordados en la instrucción*; de tal manera que, a mayor éxito de los estudiantes en las situaciones planteadas, existen mayores posibilidades de que su aprendizaje hayan sido con comprensión.

A la luz de lo anterior, el instrumento para evaluar la comprensión es una prueba de rendimiento que consta de *cinco situaciones* (denotadas como 1, 2, 3, 4 y 5), con un total de 14 preguntas. A continuación se reproducen las situaciones del mencionado Instrumento.

Las cinco situaciones del Instrumento para evaluar la comprensión son:

1. En el sistema de coordenadas cartesianas que se muestra a continuación, se encuentran los bosquejos de las gráficas que representan la cantidad de agua de dos familias (F_1 y F_2) durante el tiempo que la consumen. Con base a los bosquejos contesta las siguientes preguntas. Explica tu respuesta.

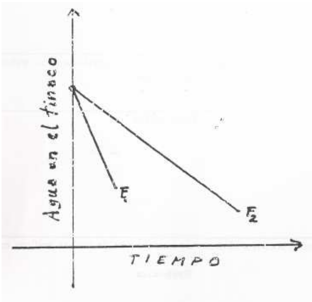

Figura 1. Bosquejos de la Situación 1.

Preguntas de la Situación 1

a) ¿Cómo era la cantidad original de agua del tinaco de la familia F_1 con respecto a la cantidad de agua de la familia F_2?

b) ¿Qué familia gasta más agua?

c) ¿Qué familia gasta más rápidamente el agua?

d) ¿Qué familia usa más tiempo el agua?

2. Dos automovilistas (A y B) para dirigirse de su casa al trabajo utilizan únicamente vías rápidas. Las gráficas siguientes representan la distancia recorrida durante el tiempo que tardan en llegar a su trabajo. Con base en las gráficas contesta las preguntas que se formulan. Explica tu respuesta.

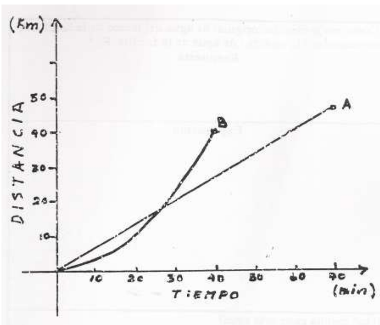

Figura 2. Gráficas de la Situación 2.

Preguntas de la Situación 2

a) ¿Cuántos Km recorre el automovilista B para llegar a su trabajo?
b) ¿Cuánto tiempo se tarda en llegar el automovilista A a su trabajo?
c) ¿Qué automovilista recorre más distancia durante los primeros 30 minutos?
d) ¿A qué automovilista le queda más lejos su trabajo?
e) ¿Qué representa el punto de intersección de ambas gráficas entre sí?
f) ¿Qué automovilista crees que maneja más rápido?

3. Las tarifas del transporte público (Metro, trolebús, metrobus, “microbus”, camión, etc.) en la Ciudad de México son variables. En un sistema de coordenadas cartesiano haz una gráfica que represente el costo de un viaje en Metro, en una ruta que tiene, a lo más, 12 kilómetros de longitud, y en otro sistema de coordenadas, haz lo mismo, bajo las mismas condiciones, pero considerando como medio de transporte un “Microbus”.

4. A continuación (Figura 3) se muestra el bosquejo de la gráfica que representa la variación del área de un rectángulo (de perímetro fijo) con respecto a la longitud de uno de sus lados. ¿Qué información proporciona el bosquejo?

5. Los tres bosquejos que se muestran en la Figura 4 representan cómo se reproduce la bacteria B en tres medios distintos (m_1, m_2 y m_3). ¿Qué información proporcionan los bosquejos?

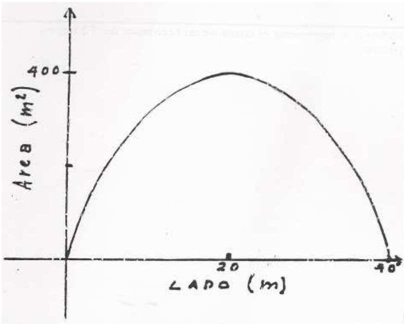

Figura 3. Bosquejo para la Situación 4.

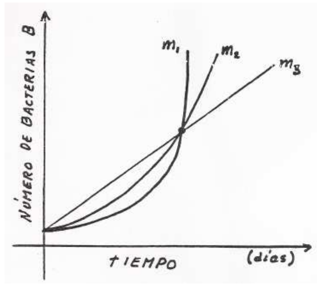

Figura 4. Bosquejos para la Situación 5.

Condiciones de aplicación del instrumento

Los alumnos lo enfrentan trabajando en grupos pequeños en una sesión posterior al término de la instrucción y, cuentan con aproximadamente 110 minutos para resolverlo. Los 70 estudiantes se distribuyen en 18 grupos pequeños; a cada uno de éstos se les asigna, al azar, un número del 1 al 18 con el cual se les identifica al presentar los resultados.

Resultados y Discusión

Esta sección se encuentra dividida en cuatro partes: en la primera, se presentan los resultados de las tres primeras situaciones; en la segunda, los de la cuarta y quinta; en la tercera, el desempeño global de los grupos pequeños en todo el instrumento y, finalmente, en la cuarta, una breve discusión de los resultados.

Primera parte

En las tres primeras situaciones los 18 grupos pequeños enfrentan un total de 12 preguntas. El *promedio* de aciertos *por grupo pequeño* es nueve y el *promedio* de aciertos *por pregunta*, 14. Las dos tablas siguientes concentran la información del desempeño de los estudiantes desde dos puntos de vista: en términos del porcentaje promedio de respuestas correctas de cada situación (Tabla 1); de acuerdo al número total de aciertos que logran los grupos pequeños en las tres situaciones (Tabla 2).

Tabla 1

Porcentaje promedio de respuestas correctas que logran los grupos pequeños en la Situación 1, 2, y 3.

Situación	1	2	3
Porcentaje promedio de respuestas correctas	82.5%	83.3%	44%

Tabla 2

Número total de aciertos que logran los grupos pequeños en las tres primeras situaciones.

N° de aciertos (de 12)	12	11	10	9	8	7
N° del (de los) grupo(s) pequeño(s)	2 y 14	12	5, 7, 9, 10 y 17	3, 4 y 6	1, 8, 11, 16 y 18	13 y 15

Segunda parte

En las Situaciones 4 y 5 la interpretación de la gráfica que las representa es "libre": sólo se pregunta qué información proporciona el (los) bosquejo(s), según la Situación. Con base en esto, desde un punto de vista técnico, lo que afirmen los estudiantes no es posible catalogarlo como correcto o incorrecto en virtud de que no se les formula una pregunta que exija una respuesta específica. "La información que le proporciona el bosquejo" a un grupo pequeño, no necesariamente es la misma que la que le proporciona a otro. No obstante lo anterior, las afirmaciones que ellos formulen, desde un punto de vista matemático, es decir, por el contenido matemático que ellas contienen, es factible valorarlas como correctas o no. Hecha esta aclaración, continuamos con la exposición de resultados.

Al considerar todas las afirmaciones correctas que hacen los distintos grupos pequeños se obtienen ocho afirmaciones diferentes para la Situación 4 y seis, para la 5. El desempeño de los grupos pequeños se juzga a la luz de estas afirmaciones. El promedio de afirmaciones correctas por grupo pequeño es, prácticamente, tres; tanto en la 4ª situación como en la 5ª. El desempeño de los grupos pequeños en estas dos situaciones se registra en la Tabla 3 y 4.

Tabla 3

Número de afirmaciones correctas (de ocho) enunciadas por los grupos pequeños en la Situación 4.

N° de afirmaciones correctas enunciadas	8	7	6	4	3	2	1	0
N° del grupo pequeño	4	12	3 y 14	13 y 17	2 y 10	9	1, 5, 7, 8 y 11	6, 15, 16 y 18

Tabla 4

Número de afirmaciones correctas (de seis) enunciadas por los grupos pequeños en la Situación 5.

N° de afirmaciones correctas enunciadas	6	4	3	2	1	0
N° del grupo pequeño	14	2	3, 5, 7, 9, 10, 11 y 12	1, 4, 8, 13, 17 y 18	6 y 15	16

Tercera parte

La puntuación promedio (sobre 10) que obtienen los grupos pequeños en el Instrumento es, aproximadamente, 7 (6.9). La puntuación de cada grupo pequeño se registra en la Tabla 5.

Tabla 5

Puntuaciones obtenidas por los grupos pequeños en el Instrumento de Comprensión.

N° del grupo pequeño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Puntuación	6.2	9.5	8	7.2	7.4	5.5	6.8	5.6	7.7	8.1	6	9.4	5.9	9.8	4.1	4.9	7.7	5.4

Cuarta parte

Los aspectos explorados en este Instrumento, en lo fundamental, se refieren a la interpretación cualitativa y cuantitativa de gráficas en contexto; al enfoque puntal, por intervalos y global de gráficas de situaciones y a la construcción de la gráfica que representa una determina situación de la vida cotidiana. El desempeño mostrado por los estudiantes en estos aspectos aporta elementos que apoyan las declaraciones siguientes.

En términos generales, los grupos pequeños enfrentan con "relativo" éxito las situaciones en contexto que contiene este instrumento. Este hecho parece indicar que: los grupos pequeños aplican su conocimiento con "cierta" flexibilidad lo cual, desde el marco de Hiebert y Carpenter (1992), es una consecuencia de la comprensión y, desde el punto de vista de Schoenfeld (1992), es uno de los objetivos de la instrucción matemática.

No existe una marcada diferencia en el desempeño de los grupos pequeños en las gráficas en contexto que exigen una interpretación cualitativa de las que requieren una cuantitativa; de tal manera que, por ejemplo, en la primera situación (que demanda una interpretación cualitativa en las cuatro preguntas que contiene) el porcentaje promedio de respuestas correctas por grupo pequeño es de 82.5% y en la segunda situación (que reclama una interpretación cuantitativa en sus seis preguntas), dicho porcentaje es de 83.3%. Estos resultados sugieren que la automatización en la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales por la vía global cualitativa, desde un punto de vista estrictamente matemático, favorece el rendimiento de los equipos cuando deben, por un lado, interpretar una gráfica cuantitativamente y por otro, enfrentar gráficas en contexto. Esto último parece apoyar la posición de Duval (1992) en el sentido de que la interpretación de gráficas que representan un fenómeno físico, económico o biológico (gráficas en contexto) presupone la aprehensión del funcionamiento del registro gráfico.

En torno a la otra dimensión mediante la cual es posible analizar una gráfica: de lo puntal a lo global (Leinhardt et al., 1990); el desempeño de la población revela que en las interpretaciones "guiadas" (Situación 1 y 2), en términos generales, los grupos pequeños no presentan mayores dificultades al enfocar una gráfica puntualmente es decir, el enfoque global, que ellos dominan, no les obstaculiza el puntual que el problema exige (al margen de que dicho problema implique una interpretación cualitativa o cuantitativa de la gráfica que lo representa). Así por ejemplo, 17 grupos pequeños contestan correctamente la cuarta pregunta de la segunda situación (2.d); la cual demanda una interpretación cuantitativa de las gráficas y la lectura de dos puntos. La respuesta del 10° grupo pequeño (Transcripción 1) ilustra el tenor de las respuestas correctas.

A. Por que cuando B llega a su trabajo tan sólo ha recorrido 40 Km mientras que A recorre 50 Km

Transcripción 1. Respuesta del 10° grupo pequeño a la pregunta 2.d.

En las interpretaciones "libres" (Situación 4 y 5), los grupos pequeños no muestran una marcada preferencia a interpretar una gráfica en contexto por la vía global en detrimento de la puntual o por intervalos (ver Transcripción 2). Por ejemplo, de las 48 afirmaciones (catalogadas como correctas) que emitieron 14 grupos pequeños en la Cuarta Situación, 12 son globales, 7 de intervalo y 18 puntuales (las 11 restantes se han etiquetado como "*inferencias*" y se comentan en el párrafo siguiente). Este comportamiento de los grupos pequeños parece indicar, entre otras cosas, que el dominio del enfoque global no obstaculiza el puntual o por intervalos (aún en gráficas en contexto); por el contrario, al parecer lo favorece.

- Cuando el lado mide 20m. el area es de 400 m^2 (el área máxima)
- Cuando el lado es mayor que "0" pero menor que 20 el area 0< A < 400 m^2
- Cuando el 20 < L < 40 m el 0 < A < 400 m^2

Transcripción 2. Interpretación del 2° equipo al bosquejo de la gráfica que representa la Situación 4.

Algunos grupos pequeños, en las interpretaciones “libres”, analizan más a fondo la gráfica en contexto (combinan la información que les proporcionan los enfoques global y/o por intervalo y/o puntual) de tal manera que logran extraer información de la gráfica sin que aquélla se muestre directamente en ésta (ver Transcripción 3). Dicha información se ha denominado, en estas páginas, “*inferencia*”.

Cuando el lado mide 10 m. el área es de 300 m^2, es un rectángulo y otro lado debe medir 30 m. Cuando el lado dado mide 20 m, el area es de 400 m^2, el otro lado mide 20 m, por lo que es un cuadrado Cuando el lado mide 40 m es una linea y el area es 0. Y en todos el perímetro es de 80 m.

Transcripción 3. Interpretación del 4° equipo al bosquejo de la gráfica que representa la Situación 4.

Los grupos pequeños dan muestras de que al analizar globalmente dos o tres gráficas y compararlas ente sí, son capaces de ordenarlas, correctamente, según la rapidez de variación que representan; bien sea que dichas gráficas sean dos rectas (Pregunta 1.c.), una recta y una curva (Pregunta 2.f) o una recta y dos curvas (5ª Situación). En estos tres casos, el número de equipos que interpretan correctamente la rapidez de variación de la gráfica es 18 y 14, respectivamente, para las dos primeras preguntas; en la Situación 5 –cuya interpretación de la gráfica es “libre”–, los 13 equipos que centran su atención en el referido aspecto, llevan a cabo una adecuada interpretación (un ejemplo se muestra en la Transcripción 4). Los grupos pequeños asocian “lo pronunciado” de la gráfica con la magnitud del cambio; de tal manera que las gráficas “más pronunciadas” representan mayor rapidez de variación.

Se reproduce más rapido m_1, luego m_2 y tarda más días m_3

Transcripción 4. Interpretación del 7° grupo pequeño al bosquejo de las gráficas de la Situación 5.

Para el caso de las rectas, como es sabido, la pendiente corresponde a la rapidez de variación, conceptos que, no está por demás señalar, no se abordaron durante el proceso de instrucción. El desempeño de la población bajo estudio, con relación al punto a discusión, da la pauta para suponer que el conocimiento adquirido por los alumnos durante la instrucción, en torno al comportamiento de las gráficas, lo aplican al interpretarlas en contexto; esto es posible considerarlo, al tomar como parámetro el marco de Hiebert y Carpenter (1992), como una consecuencia de la comprensión, al tiempo que parece revelar que las redes de conocimiento de los estudiantes se hacen más largas y organizadas.

Bajo la óptica de lo que señalan Leinhardt et al. (1990) en el sentido de que “Kerslake [al igual que otros] también encontró que las traducciones que involucran funciones constantes son excepcionalmente difíciles” (pp. 35, 36), es posible considerar como “bastante bueno” el rendimiento de los grupos pequeños en la primera parte de la Situación 3 (Pregunta 3.a): la mayoría de ellos (12) construyen adecuadamente la gráfica que representa la situación ahí planteada: la gráfica de una función constante. La complejidad que entraña este tipo de conversiones, se incrementa cuando dichas conversiones están referidas a gráficas escalonadas. A pesar de esto, cuatro grupos pequeños logran superar esa complejidad al construir una gráfica escalonada para representar, correctamente, lo planteado en la 3.b. Este desempeño se considera “bastante satisfactorio” a pesar de que estos grupos pequeños representan un poco más del 22% de la población bajo estudio.

No obstante que lo señalado en los puntos anteriores refleja, en términos generales, un buen desempeño de los grupos pequeños en los aspectos explorados en este instrumento, en ciertas ocasiones algunos de ellos encaran algunas dificultades que no pueden superar. A continuación se enuncian las que se consideran más relevantes.

En determinados momentos, algunos grupos pequeños emiten su respuesta basados en un análisis global de la gráfica en lugar del enfoque puntual o por intervalos que el problema exige. En este sentido, el caso más crítico (dado el número de grupos pequeños que contestan incorrectamente) se presenta en la Pregunta 1.b. Ante la pregunta ¿qué familia gasta más agua?, la respuesta de diez equipos sugiere un enfoque global de la gráfica y no el puntual requerido (ver Transcripción 5). Posiblemente el proceder de estos diez equipos es factible interpretarlo desde dos perspectivas que pueden estar operando simultáneamente: primera, influencia del análisis global de las gráficas, es decir, no logran "desprenderse" del enfoque global y éste los lleva a establecer *quién gasta más rápidamente el agua* en lugar de *quién gasta más agua*; segunda, interferencia de distractores personales (según la acepción que Janvier–citado en Leinhardt et al., 1990– le asigna al término); esto es, en este caso, su experiencia personal en el sentido de que, *quien gasta más rápidamente el agua*, *gasta más agua*.

Familia 1. Porque en menos tiempo gasta casi la misma cant.[idad] que la otra en mayor tiempo

Transcripción 5. Respuesta del 3er. grupo pequeño a la Pregunta 1.b.

De acuerdo a Leinhardt y sus colaboradoras (1990), "[e]l error estudiantil citado con más frecuencia con respecto a la interpretación y construcción de gráficas que representan situaciones es la interpretación icónica" (p. 39). En la mayoría de los equipos (17), no se observa una tendencia a interpretar las gráficas en contexto icónicamente. Sin embargo, en determinadas ocasiones algunos de ellos no logran mantenerse al margen de interpretar "una gráfica de una situación como una imagen literal de esa situación" (Leinhardt et al., 1990). El caso más relevante en este tenor de ideas se presenta en la Pregunta e de la Segunda Situación (2.e.). La respuesta de diez equipos a esta pregunta, revela que, como lo señala Kerslake (citado por Leinhardt et al., 1990), estos grupos pequeños interpretan las gráficas de movimiento como las trayectorias de los viajes reales. Un ejemplo de este tipo de respuestas se muestra a continuación.

El punto en el que se cruzan los 2 automovilistas

Transcripción 6. Respuesta del 1er. grupo pequeño a la Pregunta 2.e.

En contraste con lo anterior, los otros ocho grupos pequeños nunca incurren en una interpretación icónica pero, innegablemente, el punto de intersección de las gráficas que representan la Segunda Situación es "el talón de Aquiles" de la población bajo estudio. Es posible que en esta circunstancia se esté ante un caso de un aspecto que señalan Leinhardt et al. (1990): "las dificultades no necesariamente proponen un concepto erróneo como la razón de la dificultad. Más bien, es más probable que impliquen que algo acerca de la tarea es lo que la hace especialmente difícil" (p. 30). Desde esta óptica, es probable que el punto de intersección de las gráficas que representan la Segunda Situación es "ese algo" de la tarea (al que se refieren Leinhardt y sus colaboradoras) que la hace especialmente difícil para los grupos pequeños que interpretaron icónicamente las mencionadas gráficas. Tal vez la dificultad estriba en que el citado punto "limita" a los grupos pequeños a considerar las gráficas simbólicamente, esto es, omitir semejanzas pictóricas con elementos de las trayectorias y los "seduce" a interpretarlas como una imagen literal de la situación. En otras palabras, algunas situaciones resultan ser "más susceptibles" que otras de que sus gráficas sean interpretadas icónicamente. Considerar que el factor principal que ayuda a dar cuenta del rendimiento de los grupos pequeños, en la pregunta a discusión, es la propia dificultad de la tarea más que la dificultad que ellos tienen para interpretar adecuadamente gráficas que representen situaciones es, en dado caso, viable para siete de los diez grupos pequeños que no la contestaron correctamente, dado que en ningún otro caso incurren en una interpretación icónica. Sin embargo, de los tres restantes, uno de ellos incurre en este tipo de interpretación en otras tres ocasiones y los otros dos, en una. En estos tres casos, al parecer, la dificultad está más en los grupos pequeños que en la tarea propiamente dicha.

Como se señala renglones arriba, la construcción de las gráficas que representan la primera y la segunda parte de la Tercera Situación (3.a y 3.b, respectivamente), son “particularmente difíciles”: la primera demanda la gráfica de una función constante y la segunda, una gráfica escalonada. Seis equipos fallan al intentar construir la gráfica que represente lo planteado en la situación 3.a y 14, en lo de la 3.b.

En los intentos de construir las mencionadas gráficas, se observa, en lo fundamental, una tendencia a la linealidad en la situación 3.a (ver Figura 5) y a la linealidad y continuidad, en la 3.b (ver Figura 6). Leinhardt y sus colaboradoras (1990) refieren numerosos estudios en los que se han observado dichas tendencias.

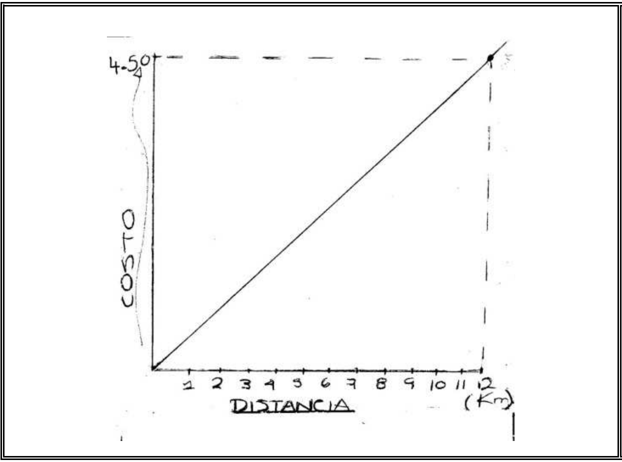

Figura 5. Respuesta del 8° grupo pequeño a la Pregunta 3.a en la que se observa una tendencia a la linealidad.

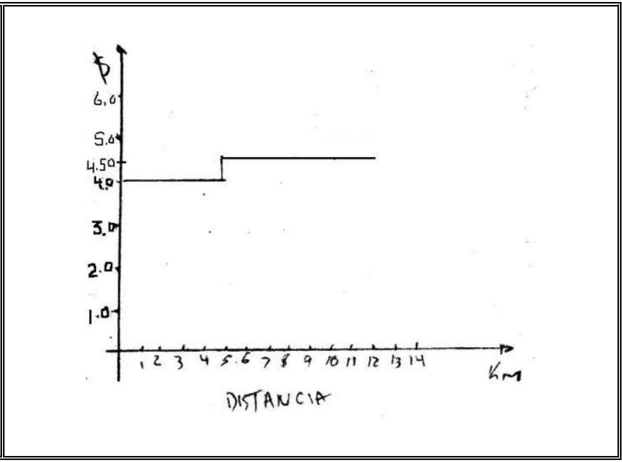

Figura 6. Respuesta del 14° grupo pequeño a la Pregunta 3.b en la que se observa una tendencia a la continuidad.

Los “intentos fallidos” para construir la gráfica correcta en las referidas situaciones son: en la situación 3.a, trazan un segmento de recta con pendiente positiva y colocan la leyenda “tarifa constante” o, asignan el mismo valor, o no asignan valor alguno en cada extremo de los intervalos del eje que representa el costo o proceden en forma similar a la que se muestra en la Figura 5. En la situación 3.b, trazan dos segmentos de recta “unidos” (bien sea uno con pendiente positiva y el otro paralelo al eje correspondiente o, los dos con pendiente positiva) o, tres segmentos de recta con pendiente positiva de diferente longitud y que parten del origen. Cabe señalar que es factible que en los ocho equipos que contestan correctamente la situación 3.a (gráfica de una función constante) y fallan en la situación 3.b (gráfica escalonada) impere “la visión” de que las gráficas deben ser continuas. Al parecer, esta es la situación en la que se encuentra el 14° grupo pequeño. Véase su respuesta en la Figura 6.

En las dos últimas situaciones del Instrumento (Cuarta y Quinta) –en las cuales la interpretación de las gráficas que las representan es “libre”–, es posible afirmar que la dificultad que enfrentaron los cuatro grupos pequeños que interpretan incorrectamente la gráfica de la Cuarta Situación estriba, fundamentalmente, en el hecho de que no conciben que el área de un rectángulo varíe mientras su perímetro permanece fijo. La Transcripción 7, muestra la forma en la que el 18° grupo pequeño expresa la citada dificultad. De aquí que, los referidos grupos pequeños, consideran que sólo hay *un* rectángulo. En torno a él, dos grupos pequeños formulan sus afirmaciones y los otros dos, se limitan a señalar lo antes expuesto. Esto conlleva a suponer que el problema que ellos enfrentan, de hecho, no radica en la interpretación de la gráfica en sí, sino en el contenido matemático que involucra la propia situación planteada.

Creemos que no es posible tener un perímetro fijo en una figura, mientras su area está aumentando

Transcripción 7. Interpretación del 18° grupo pequeño al bosquejo de la gráfica de la Situación 4.

Por otra parte, “el problema”, por así decirlo, que se observa en el desempeño de los 17 grupos pequeños que hacen afirmaciones correctas, al interpretar las tres gráficas que representan la Situación 5, es que *ninguno* de ellos establece alguna afirmación que indique que hayan centrado su atención en uno de los dos puntos de intersección de dichas gráficas; a saber, el que se localiza en el eje de las ordenadas, el cual, en la situación que se discute, representa el mismo número de bacterias en cada uno de los tres medios al momento de iniciarse la reproducción (tiempo inicial). Al parecer, el punto pasa inadvertido. Esta omisión de los grupos pequeños tal vez, es factible de interpretarla desde tres vertientes que pueden ser convergentes:

1a. Un análisis puntual un tanto restringido: se fija la atención en unos puntos de la gráfica y no en otros.

2a. Interferencia, en el análisis de las gráficas, de los distractores personales (según la acepción que Janvier –citado en Leinhardt et al., 1990– le asigna al término). En el caso que nos ocupa, el distractor puede ser la experiencia de los equipos en el sentido de que, dado que es “común” que los diseños experimentales inicien con el mismo número de elementos (semillas, bacterias, plantas, etc.), ni siquiera vale la pena mencionarlo.

3a. Ambigüedad en una de las frases que incluye el planteamiento de la situación: “la bacteria B”. Ésta puedo haberse entendido como *una* (y sólo una) bacteria. De ser este el caso, tal vez consideran innecesario emitir una afirmación en la que se explicite el número de bacterias que había en cada medio, al momento de iniciar su reproducción, si “ya se sabe que es *una*” (el planteamiento de la situación, así lo indica).

Conclusiones

Con base en el desempeño que muestran los estudiantes al interpretar y construir gráficas en contexto, es posible afirmar que el dominio en la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones de la forma $y = ax^n + b$, *donde* $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3 por la vía global cualitativa y desde un punto de vista estrictamente matemático, favorece la comprensión de dichas funciones al menos, en los aspectos explorados con el instrumento que en estas páginas se presenta.

Referencias y bibliografía

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (1999). The Design of Learning Environments. En J. D. Bramsford, A. L. Brown, & R. R. Cocking (Eds.), *How People Learn: Brain,Mind,Experience,and School* (119-142).Washington,D.C.: National Academy Press.

Duval, R. (1992). Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (pp. 125-139). México: CINVESTAV.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle y Peter Lang S. A. (Trad. Myriam Vega Restrepo). Santiago de Cali, Colombia.

Ellis, M. (2003). Constructing a Personal Understanding of Mathematics: Making the Pieces Fit. *Mathematics Teacher*, *6*(8).

Eraslan, A., & Aspinwall, L. (2007). Quadratic Functions: Students' Graphic and Analytic Representations. *Mathematics Teacher*, *101*(3).

Hartter, B.J. (2009). A Function or Not a Function. That Is the Question. *Mathematics Teacher*, *103*(3), 201-205.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching With Understanding. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Company.

Janvier, C. (Ed.). (1987). Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Knuth, E. J. (2000). Student Understanding of the Cartesian Connection: An Exploratory Study. *Journal for Research in Mathematics Education, 31 (4),* 500-508.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60 (1),* 1-64.

Moschkovich, J. (1999). Students' use of the X-Intercept as an Instance of a Transitional Conception. *Educational Studies in Mathematics 37*, 169-197.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A.H., & Arcavi, A. (1993). Aspects of Undertanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them. En A. Romberg, E. Fenema & T. A. Carpenter, (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of funtions* (pp. 69-100). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM.

Pilipczuk, C. (2008). Graphing Functions. Resolving Students' Misconceptions by Using "Messy" Data and Calculator-Based Laboratory Activities. *Mathematics Teacher*, *101*(9).

Rivera, F. (2007). Visualizing as a Mathematical Way of Knowing: Understanding Figural Generalization. *Mathematics Teacher*, *101*(1).

Romberg, T. A., Fennema, E., & Carpenter, T. P. (Eds.). (1993). *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Methacognition, and Sense Making in Mathematics. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.334-370). New York: MacMillan Pu. Co.

Sinclair, N., & Alayne, A. (2011). Tell a Piecewise Story. *Matematics Teaching in the Middle School*, *16*(6), 347-353.

You, Z. (2009). How Students Interpret Graphs. *Matematics Teaching in the Middle School, 15*(4), 188-190.