
# Interpretación de la relación funcional en estudiantes de noveno

Enzo Fabián **Marines** Lamprea
Universidad del Tolima
Colombia
enzofabianmarineslamprea@outlook.com
Cristian Jair **Ayala** Vargas
Universidad del Tolima
Colombia
niels.bohr@hotmail.com

**Resumen**

El principal motivo de este trabajo es lograr establecer un vínculo de situaciones cotidianas basadas en patrones matemáticos para que los alumnos por medio de su desarrollo manifiesten sus distintas interpretaciones de esta noción. A partir de esto se plantearon 3 sesiones donde se implementaron distintas actividades con patrones matemáticos para observar en los estudiantes el desarrollo de su pensamiento teniendo en cuenta los niveles de conocimiento de Anna Sfard (interiorización, reificación y condensación) utilizando los dos primeros en el análisis de las dos primeras sesiones de nuestro proyecto. En esta investigación se pudo concluir que los alumnos se inclinaron más por escribir expresiones generales por medio del lenguaje natural (representación escrita), también que no estaban familiarizados con este tipo de actividades y por último se pudo observar que el trabajo con patrones es una herramienta eficaz para que los alumnos vean regularidades entre cantidades variantes.

*Palabras clave:* Patrones matemáticos, regularidades, observar, herramienta, niveles de conocimiento.

## Planteamiento del problema

En este proyecto de investigación la intención primordial es lograr que los alumnos desarrollen un concepto de relación funcional porque creemos que la construcción de dicho concepto permite a los estudiantes tener una idea más clara cuando afrontan problemas que tengan que ver con este tópico. También es importante lograr que los alumnos construyan una expresión matemática que permita establecer la conexión entre dos cantidades que varían y así que puedan observar el comportamiento de las cantidades de acuerdo a un contexto dado, por otra parte tratar que los alumnos vean las matemáticas como una herramienta para la vida diaria en la resolución de problemas cotidianos.

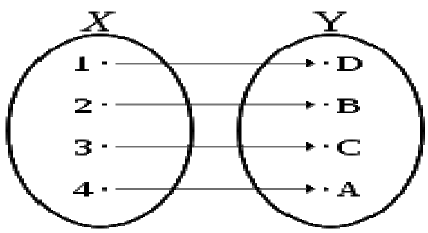
El trabajo propuesto espera que los estudiantes puedan encontrar una conexión con las sesiones anteriores y con la propuesta en ese instante para lograr tener un buen resultado en la sesión 3, que es donde se encontraran con una situación del diario vivir.

Según nuestra experiencia en el curso de optativa 3 y en nuestros años en el colegio cuando se abordaba el tema de relaciones funcionales el maestro tenía la particularidad de dar la definición, después un ejemplo y por ultimo ejercicios creyendo que los estudiantes ya dominaban esa noción con el solo hecho de haber solucionado un ejercicio. Luego con esa educación que recibimos y al llegar aquí a la universidad influenciados por algunos cursos y por nuestras propias dudas nos pusimos a pensar ¿qué es lo que los estudiantes entienden por relación funcional? Luego de haber abordado en el curso anterior (optativa 3) y hacer un proyecto de investigación basado con un modelo de Ponte nos interesó saber que interpretación de relación funcional tienen los estudiantes de grado noveno la cual es nuestra pregunta problema y posteriormente observar las diferentes interpretaciones que nos muestre los alumnos de grado 9°; Además de diagnosticar las distintas interpretaciones queremos precisar cuáles son las aproximaciones que tienen los alumnos respecto al concepto de relación funcional y también aquellos que no presentan una idea cercana a dicha noción.

## Antecedentes y fundamentación teórica

Según los lineamientos curriculares del Ministerio De Educación Nacional (MEN, 1998) en Colombia los alumnos de grado 9° deben reconocer el concepto de función, graficar una función lineal en el plano, conocer las características de una recta, conocer las propiedades de la recta en el plano cartesiano. Esto significa que el estudiante debe estar en capacidad de identificar relaciones funcionales presentes en situaciones-problema específicas.

Definición de función de un texto guía:




Dados dos conjuntos, no vacíos, X e Y, una regla f, que asigna a cada elemento de X uno y solamente uno del conjunto Y es una función de X en Y. Se denota por: f: X Y que se lee “f de X en Y” (Londoño y Bedoya, 1984, 1986,1988)

El uso de la definición de función tomada de un texto posiblemente no sea la única manera de iniciar el trabajo con funciones.

Una situación-problema del contexto cotidiano que nos ayudó a clarificar nuestras ideas sobre relaciones funcionales es la siguiente, tomada de Agudelo Valderrama, C (2000), p.22-23:

María trabaja los domingos vendiendo helados en la Plaza de Bolívar. Su patrona le paga $2000 como básico, más $100 por cada helado que venda.

Pregunta A: ¿Cuánto se puede ganar María en un domingo?

Pregunta B: ¿Cuántos helados debe vender María para ganarse $6000 en un domingo?

Pregunta C: Qué variables puede identificar en la situación de María vendiendo helados.

Podemos afirmar que en los años escolares los trabajos de reconocimiento de patrones fue un tema que no se trabajó, solo se trabajaba la tabulación de datos con las famosas tablas de valores y conceptos como generalización, patrón matemático, relación funcional eran desconocidos para nosotros. El propósito de este tipo de preguntas es hacer énfasis en los comienzos de la construcción de las primeras bases para los conceptos de relación funcional y de allí que pueda formar su concepto de función por medio de situación cotidianas que van aportar un significado para la comprensión del alumno.

Queremos clarificar que nuestro interés no es que los alumnos construyan el concepto de función, lo que queremos es brindarles las herramientas necesarias para que los alumnos reconozcan que es una relación funcional.

Según Kieran y Filloy (1989) las investigaciones muestran que los estudiantes que entienden de una mejor manera los conceptos básicos de función utilizan los métodos gráficos para mostrar los resultados, mientras que los menos expertos o los que tienen menor comprensión de los conceptos básicos de función proceden a mostrar sus resultados por medio de tabulaciones, es decir construcción de tablas de valores. De lo anterior se puede afirmar que si se inicia el trabajo escolar sobre el tema de función dando la definición de manera gráfica puede llevar a que los alumnos comprendan mejor su significado. También según nuestra experiencia muchos de nuestros compañeros de clase utilizaban la construcción de tablas de valores para poder resolver ejercicios, pero esto se convertía en algo mecánico. Del mismo modo dibujando patrones o gráficos que puedan llevar a la construcción del concepto de relación funcional puede ser un punto de apoyo importante para que los alumnos desarrollen este conocimiento.

Según las investigaciones, trabajar con patrones no produce un conocimiento inmediato de la noción de función (Mc.Gregor y Stacey, 1995) pero puede ser un principio esencial en el desarrollo del alumno para que pueda llegar a una mejor comprensión de la relación funcional, ya que la identificación de la relación que conecta las variables presentes en distintas situaciones de la vida cotidiana, está en el centro de la comprensión de la noción de función

El inicio del trabajo algebraico escolar con la identificación y expresión de patrones ha sido considerada por la comunidad internacional de educadores matemáticos como una forma efectiva de apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico y consecuentemente la formación de la noción de relación funcional; Agudelo-Valderrama (1999). Presentación de la versión en español de rutas hacia el álgebra y raíces del algebra, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Una manera muy eficaz para que el alumno cree, modele, construya es la interacción con hechos de la vida real que le permitan al alumno darse cuenta que los hechos que resuelve mecánicamente o esas definiciones que le son dadas se pueden describir con hechos reales que él mismo puede estudiarlos hasta el punto de construir generalizaciones o nuevos conceptos, involucrar al alumno con los hechos reales es ubicarlo en un mundo en el que él puede encontrar sentido a lo que está trabajando y tenga capacidad de asimilar lo que observa, mediante los cambios del mundo real; involucrar la enseñanza de las funciones necesita basarse en hechos que llamen la atención del niño, que se dé cuenta de los cambios, o de lo que permanece estático, que los comportamientos que él observa tengan un sentido significativo.

## Diseño y Metodología

Nuestra investigación está basada en el enfoque de investigación-acción propuesto por Hopkins (2008); S.kemmis y R. Mc.taggart (1998); que consta de un proceso continuo en el aula que permite la retroalimentación del maestro en la investigación, basada en el método propuesto por Ponte, P (1995). Para hacer posible este trabajo de investigación-acción diseñamos tres sesiones donde se impartirá unas actividades que fomentaran y desarrollaran el pensamiento variacional del estudiante, con el fin de que él pueda ir iniciando su propia noción de relación funcional y así poder evidenciar las distintas interpretaciones basándonos en los autores que soportan nuestro trabajo y a partir de esto poderlas categorizar. En estas sesiones uno hará el rol de profesor investigador y el otro observador investigador

## Resultados

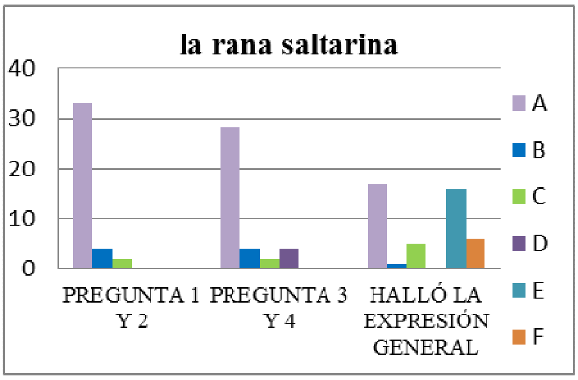
Sesión 1: la rana saltarina

| puntos | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 | | 5 | | 7 | | | | | |
| Y | 2 | 4 | 6 | | | | | | 18 | | | 24 |

Luego se les pedirá que nos respondan las siguientes preguntas:

1. Si X es 5 ¿Cuánto le corresponderá a Y? ¿Por qué?
2. Si X es 7 ¿Cuánto le corresponderá a Y? ¿Por qué?
3. Si Y es 18 ¿Cuánto le corresponderá a X? ¿Por qué?
4. Si Y es 24 ¿Cuánto le corresponderá a X? ¿Por qué?
5. Si X es 800 ¿Cuánto le corresponderá a Y? ¿Por qué? ¿Cómo hizo para encontrar ese número?
6. ¿Se puede hallar una expresión general que permita encontrar cualquier valor dando el valor de X? escriba todo lo que hizo para encontrarla.
7. terminen de llenar esa tabla siguiendo siempre el patrón.

- A: Tipo de representación escrita.
- B: Tipo de representación numérica (por medio de operaciones numéricas o solo colocó la respuesta como un número).
- C: No respondió.
- D: Efecto memoria utilizado en las preguntas 1 y 2.
- E: No hay claridad en la respuesta (les falto completar la expresión).
- F: caso particular.



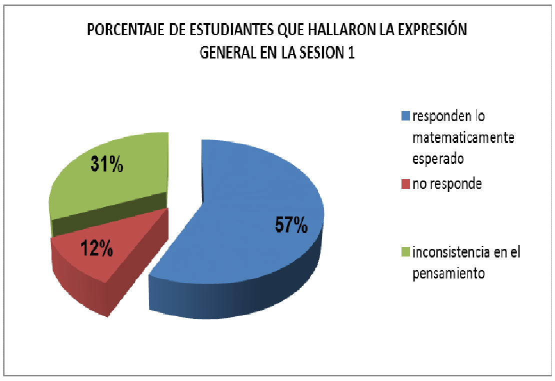




*Figura 1.* Resultados de la sesión 1.

En esta sesión se encontraban 35 estudiantes que nos proporcionaron distinta información de manera general con respecto a la actividad como la siguiente:

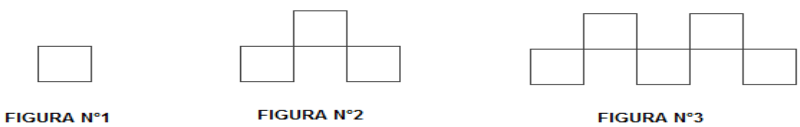
- Todos con excepción de 1 estudiante no completo la tabla de valores.
- Los estudiantes demostraron que no presentaban inconvenientes al saber las coordenadas de un punto en el plano cartesiano.
- Reconocen las matemáticas como algo necesario y elemental para vida cotidiana.
- Identificaron la regularidad presentada en los saltos de la rana.
- Hallaron las coordenadas siguiendo la secuencia de los saltos de la rana en los puntos pedidos.

En las preguntas 1 y 2, de 35 estudiantes que realizaron la actividad, 33 se inclinaron por la opción A (Tipo de representación escrita.), debido a que los estudiantes se les facilitan dar a conocer sus pensamientos por medio del lenguaje natural y tuvieron claridad al expresar el proceso realizado al dar esa respuesta a la pregunta y esto es fundamental para ir construyendo de manera autónoma el concepto de relación funcional.

4 Estudiantes eligieron la opción B (Tipo de representación numérica) en este tipo de representación evidenciamos los estudiantes que respondieron por medio de un algoritmo (operación), estos estudiantes posiblemente estén en un nivel distinto que los que respondieron con lenguaje natural y tengan mayor dificultad en llegar a la contextualización de esta noción.

2 Estudiantes no contestaron debido a diferentes factores, se deduce que no le prestaron el mayor interés, puesto que esta actividad no tendría una nota apreciativa.

Sesión 2: actividad "construyendo la letra L con cuadrados"




- Pregunta A: Dibuje la Figura N°. 4 y la figura N°. 5
- Pregunta B: ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura N°. 13? ¿Por qué?

- Pregunta C: ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura N°. 100? ¿Por qué?
- Pregunta D: Describa el proceso que hizo para saber el número de cuadrados que hay en la Figura N°. 100.
- Pregunta E: Escriba una regla para encontrar el número de cuadrados de la Figura No. 1000.

Cuando se les pidió que armaran las figuras N° 4, 5, y 6 un grupo cambio la forma de la figura refutando que no importa siempre y cuando mantenga la misma cantidad de cuadrados, construyendo de esa manera un cuadrado o una línea recta que cumpliera la condición del número de cuadrados de la figura original. Pudimos lograr mantener el interés con la actividad "construir la letra L con cuadrados" en los estudiantes, este tipo de actividades es un paso inicial para que los estudiantes puedan llegar a una mejor contextualización de esta noción (relación funcional). Con esta actividad logramos que los estudiantes trabajaran en equipo con el propósito de que comuniquen sus pensamientos y así logren una mayor comprensión.

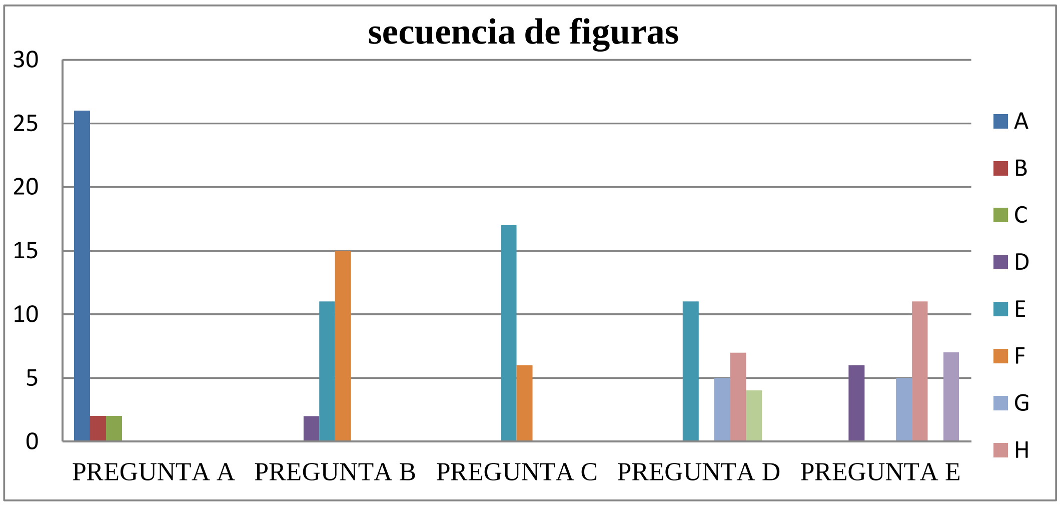



*Figura 2.* Resultados de la sesión 2.

- A: siguiendo la secuencia.
- B: incompleta.
- C: cambiándola de posición.
- D: no respondió.
- E: relaciono el número de cuadrados de la parte inferior con los de la parte superior para hallar el número de cuadrados de la figura.
- F: sumo 2 a cada una de las figuras anteriores hasta llegar a la numero 13.
- G: representación numérica.
- H: representación escrita.
- I: otro.
- J: encontró la generalidad.

En esta sesión asistieron 28 estudiantes, donde se pudo evidenciar que pudieron reconocer rápidamente la secuencia que tenían las figuras cuando aumentaban de posición.

Antes de entregar las actividades les preguntamos a los estudiantes acerca de lo que es un patrón matemático y un estudiante respondió que era una serie siguiendo un orden y otro relaciono lo de la sesión anterior diciendo que eran aquellas cosas que se pueden repetir.

Con respecto a la pregunta A, B y C algunos estudiantes nos proporcionaron evidencia de una respuesta esperada como: en la figura N°13 hay 25 cuadrados ya que aumenta de 2 en 2 cada figura, gracias a la intervención del profesor-investigador nos da la premisa de que el estudiante hizo el proceso mental de contar de 2 en 2 , un estudiante facilito el proceso de dibujar la figura remplazando los cuadrados por puntos siguiendo la secuencia hasta llegar a la figura pedida para así poder hallar el número de cuadrados (estudiante 5). Otra de las respuesta que se evidencio es que algunos estudiantes establecieron una relación entre el número el cuadrados de la parte inferior de la figura con los de la parte superior para poder hallar el número de cuadrados así: en la figura número 13 hay 12 arriba y 13 abajo porque abajo da el número que buscamos y arriba un número menos (estudiante 16), gracias a esto pudimos notar la relación que pudieron establecer algunos estudiantes (en la parte inferior siempre el número de cuadrados es igual que el de la figura dada y en la parte superior uno menos que el de la inferior) y así solo tenían que sumar el número de cuadrados de la parte inferior con el de la parte superior para hallar el número de cuadrados de la figura pedida.

En la pregunta F que se les pidió encontrar una regla para hallar el número de cuadrados de la figura 1000 pudimos evidenciar que algunos estudiantes escribieron una sucesión de fracciones donde el denominador era el número de la figura y el numerador uno menos que el denominador así: 993/994, 994/995, 995/996, 996/997, 997/998, 998/999, 999/1000. Esto muestra que estos estudiantes organizaron sus ideas siguiendo la secuencia y forma de la figura para así llegar a esta respuesta. Pero también hubieron estudiantes que hallaron la expresión general para esa situación así: pues uso la fórmula que es 1000x2-1=1999 por lo tanto el número de cuadrados de la figura 1000 es 1999 (estudiante 4). Y también hubo un tipo de respuesta no esperada para esta pregunta así: sumando los cuadritos de la figura número 25 ocho veces (estudiante 5), este estudiante decía que si necesito saber el número de cuadrados de la figura 100 solamente debía sumar 4 veces el número de cuadrados de la figura 25.

Sesión 3: María y los helados.

- A: caso particular.
- B: Caso general.
- C: Reconoce los 2000 (básico) como una constante.
- D: Olvida los 2000 (básico), no los reconoce como una constante.
- E: Representación escrita.
- F: Representación numérica.
- G: No responde.

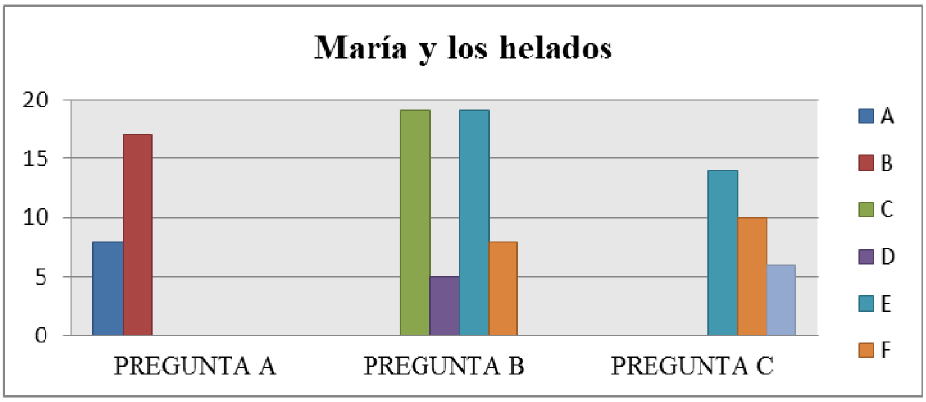



*Figura 3.* Resultados de la sesión 3.

En esta sesión asistieron 26 estudiantes, donde se pudo evidenciar que en la preguntan **A** 17 estudiantes generalizaron la pregunta de cuantos helados puede vender maría el domingo identificando así una variable que es el número de helados que ella venda, respondiendo así: Depende del número de helados que venda, y 8 estudiantes particularizaron tomando un caso en específico y haciendo las debidas operaciones para saber cuánto se ganaría suponiendo que hubiera vendido esa cantidad de helados así:

- Si maría vende 50 helados ganaría 5000 más los 2000 del básico y si sumamos el básico con los helados que vendió serian 7000 (estudiante 1).
- Si maría vende 47 helados ganaría 4700 más los 2000 del básico, si lo sumamos maría habría ganado en el domingo 6700 (estudiante 2).

En la pregunta B, se evidencio que 19 estudiantes reconocieron los 2000 del básico como una constante así:

- María tendría que vender 40 helados para ganar 4000 más los 2000 del básico da un igual de 6000. (estudiante 1).

Pero también hubo 5 estudiantes que no tomaron los 2000 como una constante, en lugar de eso lo omiten y no lo tienen en cuenta para dar una respuesta, así:

- 60 helados porque, 60x100=6000 (estudiante 3).

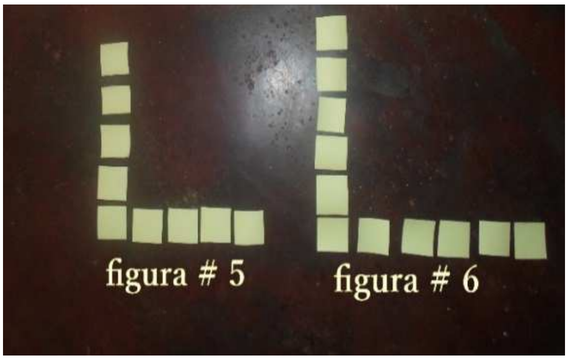
Y en la pregunta **C** hubo 6 estudiantes que no hicieron la expresión matemática para esta situación de la vida cotidiana, para esta sesión comparada con las anteriores se pudo evidenciar que los estudiantes tuvieron un desarrollo en identificar las regularidades y gracias a esto se les fue haciendo más fácil la construcción de la expresión general, algunos estudiantes construyeron las expresiones matemáticas de forma simbólica, lo que significa que están reconociendo las variables en una situación de la vida cotidiana y se están acercando cada vez más a su propio concepto de esta noción así:

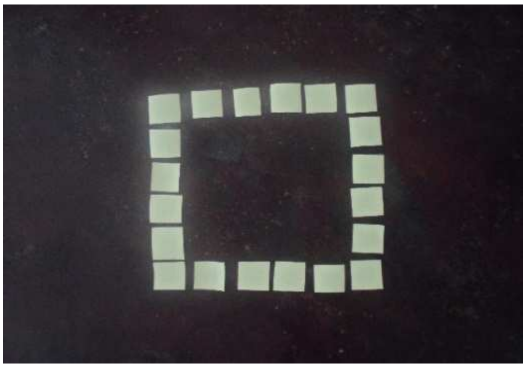
- 2000+ (100X), donde X es la cantidad de helados (estudiante 6).

## Otros análisis cualitativos

La sesión 2 (secuencia de figuras) fue la que más elementos matemáticos contenía, debido a que en esta parte de nuestro trabajo planteado se consideró de vital importancia hacer énfasis en el trabajo con patrones matemáticos. La actividad de secuencia de figuras trajo un resultado que nosotros como profesor investigador y observador no nos imaginamos, este resultado fue el siguiente:

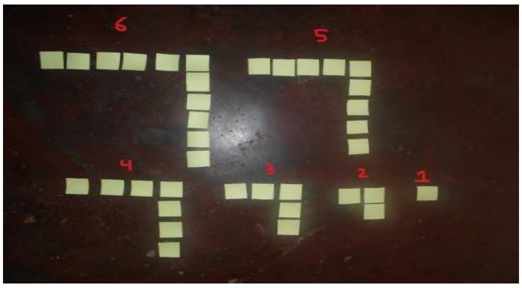
Después de haber construido la secuencia de figuras hasta la número 6, un grupo de estudiantes hicieron lo siguiente.



Y dedujeron que no importa si la figura muestra una “L” porque la figura número 5 más la figura número 6 formaban un cuadrado, este análisis que los estudiantes hicieron indica que para ellos un patrón matemático puede presentarse de una sola manera pero es posible que se comporte de otras maneras diferentes. De tal manera demostraron para un caso particular, es decir si tuvieras la figura número 1 más la figura número 2, la figura número 2 más la figura número 3 y así sucesivamente tendríamos siempre un cuadrado.

Otros grupos de estudiantes dijeron que si la figura cambiaba de posición el patrón se conserva, es decir: la forma de la figura es diferente pero el número de cuadrados es el mismo.




Lo anterior permite reconocer y valorar más la forma en que los alumnos observan las cosas porque es una manera de inferir resultados esperados pero con puntos de vista distintos y para nosotros este tipo de observaciones se deben a que cierto tipo de estudiantes relacionan ideas o conceptos ya establecidos para obtener conceptos nuevos (Anna Sfard).

## Conclusiones

En este trabajo de investigación pudimos concluir que la mayoría de los estudiantes de grado noveno en la institución educativa Juan Lozano y Lozano optaron por dar a conocer la expresión general por medio del lenguaje natural (representación escrita) en las distintas sesiones. Aunque hubo casos en donde algunos estudiantes lograron por medio de una representación simbólica asignándole una letra a lo que en esta investigación denominaremos variable o cantidades cambiantes. También pudimos comprobar que en esta institución los estudiantes tienen una educación muy tradicionalista ya que cuando les llevamos ese tipo de actividades nos mostraron una sensación de confusión es decir que no estaban acostumbrados con este tipo de actividades y estaban con la mentalidad de que las matemáticas son solo algoritmos y dar la respuesta correcta.

Por medio de esta investigación pudimos fomentar la construcción del desarrollo del concepto de relación funcional en la mayoría de los estudiantes, determinando que este tipo de actividades es satisfactorio para promover un pensamiento variacional ya que por medio de estas actividades el alumno desarrolla facultades como expresar sus ideas y un sentido crítico.

Además pudimos notar que aunque los estudiantes estaban viendo funciones (cuadráticas) no eran capaces de identificar una variable y mucho menos establecer una relación entre 2 o más de estas.

## Limitaciones

Se habían planeado 3 sesiones para tomar 2 cursos distintos por lo tanto serian 6 sesiones pero la institución no podía suministrarnos tanto tiempo para hacer las sesiones, por lo cual el tiempo fue un factor que limito nuestro trabajo de investigación.

Al comienzo en este trabajo se pretendía tomar 2 cursos de noveno de la misma institución "Juan Lozano y Lozano" ya que pretendíamos hacer una inducción en un grado noveno y en el otro simplemente aplicar el cuestionario de recolección de información y así poder hacer comparación en estos cursos con el fin de poder concluir si la inducción dada en el curso fue de ayuda para que los estudiantes dieran una respuesta más significativa y fueran más claros en expresar sus ideas.

## Prospectivas

Por medio de estas actividades los estudiantes pueden llegar a la generalización de manera simbólica logrando así una mejor comprensión de la noción de función por medio del trabajo con patrones y que los alumnos por medio del trabajo con patrones matemáticos logren comprender los pasos que se pueden llevar a cabo para llegar a entender la noción de las relaciones funcionales

## Referencia Bibliográfica


Agudelo Valderrama, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Estándares Curriculares de Matemáticas.

McGregor M., & Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal, 7*(1), 69-85.

Kemmis, S., & McTaggart, R. (1988). The action research planer: Cómo planear la investigación acción. Barcelona: Laertes S. A.

Mcgregor M , & Stacey, K. (1998). Cognitive models underlyng algebraic and non- algebraic solutions to unequal partition problems, *10*(2), 46-60

Hurtado, A. (2013). *Caracterización de la comprensión del concepto de función en los estudiantes de grados noveno y once en los colegios público de la Virginia*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Sfard, A., (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification the case of function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Washington: MAA.

Sfard, A. (1994) .The gains and the pitfalls of reification the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.