Construcción de *la matriz cambio de base*: un análisis cognitivo en términos de la Teoría APOE

Esteban **Mendoza** Sandoval
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México (CIMATE-UAgro)
emendoza@uagro.mx
Solange **Roa Fuentes**
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander Colombia
(EDUMAT-UIS)
roafuentes@gmail.com
Flor M. **Rodríguez** Vasquez
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México (CIMATE-UAgro)
flor.rodriguez@uagro.mx

Resumen

El presente trabajo constituye parte de un proyecto de investigación que se inserta en el campo de la Matemática Educativa. El proyecto en general tiene como objetivo realizar una descomposición genética del concepto matriz cambio de base, que hace parte de los cursos básicos de Álgebra Lineal. Buscamos proponer una vía alternativa para la enseñanza de dicho concepto sobre la base de la teoría APOE; ésta es una teoría cognitiva que describe a partir de estructuras (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y mecanismos (interiorización, coordinación, encapsulación, entre otros) cómo un individuo construye conocimiento matemático. En particular, presentamos algunos antecedentes, aspectos teóricos y metodológicos, asimismo mostramos un diagnostico que será aplicado a estudiantes de nivel superior que refiere a los conceptos previos que son necesarios para la compresión del concepto matriz cambio de base que harán parte fundamental de la descomposición genética.

Palabras clave: descomposición genética, álgebra lineal, matriz cambio de base, estructuras, mecanismos.

Introducción

El presente trabajo constituye parte de un proyecto de investigación que se inserta en el campo de la Matemática Educativa (ME). Estos avances datan a las estructuras previas que deben tener estudiantes de Licenciatura en Matemáticas para la construcción del concepto matriz de cambio de base, dicho concepto trasciende dado que es un tema que aparece en los cursos de álgebra lineal de prácticamente todas las profesiones debido a las posibilidades de aplicación y solución a diversos problemas. La principal función de dicha matriz es transitar de unas coordenadas a otras, puesto que resultados más importantes se obtienen a partir de la capacidad que se tenga para cambiar de un sistema de coordenadas, es decir, de cambiar de base ordenada. El concepto matriz cambio de base se incluye en la formación de un estudiante de matemáticas, licenciados en matemáticas, e ingenierías en un primer curso de álgebra lineal y está articulado a otros conceptos como: combinación lineal, espacio vectorial, dimensión, conjunto generador, independencia lineal, coordenadas de un vector y base ordenada de un espacio vectorial.

Centraremos nuestra atención en los conceptos de base ordenada de un espacio vectorial y coordenadas de un vector, puesto que creemos que estos dos conceptos son fundamentales para la construcción del concepto de interés. Así hemos elaborado un análisis hipotético con base en nuestra experiencia y consulta de libros de texto de álgebra lineal, la cual será refinada por medio de una entrevista que aplicaremos a estudiantes de la Universidad Industrial de Santander (UIS, Colombia) después de haber participado en dos cursos de álgebra lineal.

La enseñanza y el aprendizaje en álgebra lineal

El álgebra lineal es una unidad de aprendizaje que se propone en diferentes planes de estudio de educación superior, debido a su importancia por las aplicaciones en las que trasciende. Los resultados teóricos en diferentes disciplinas profesionales hacen de esta asignatura y de sus conceptos un interesante objeto de estudio. Sin embargo dada su naturaleza abstracta, su tratamiento en el aula resulta complejo y, en consecuencia el aprendizaje de los estudiantes respecto de estos temas resulta endeble. Para Dorier citado en Roa-Fuentes (2008) cuando se presenta por primera vez los conceptos básicos de álgebra lineal a los estudiantes, sienten como si “aterrizaran en un nuevo planeta en el cual no logran ubicarse”.

Asimismo en álgebra lineal hay diferentes investigaciones en diversos tópicos de ella, tales como sistemas de ecuaciones (Trigueros, Oktaç y Manzanero, 2007), espacio vectorial (Oktaç, Trigueros y Vargas, 2006; Parraguez y Oktaç, 2010; Trigueros y Oktaç, 2005), transformación lineal (Roa-Fuentes, 2008; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010, 2012), Base de un espacio vectorial (Kú, 2007) por mencionar algunos, estos trabajos son abordados desde la teoría APOE. Por otro lado existen trabajos referente al álgebra lineal (Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002; Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 1997), Oktaç y Trigueros (2010) que atienden cuestiones referentes a la naturaleza epistemológica del álgebra lineal, diseños didácticos y uso de diversos tipos de lenguaje, fuentes de obstáculos en el aprendizaje, entre otras.

Particularmente partimos del supuesto que existen dificultades para el aprendizaje del concepto matriz cambio de base esto es, dadas dos bases ordenadas de un mismo espacio vectorial, construir dicha matriz para espacios vectoriales como $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, ambos sobre el campo de los números reales, los cuales deben de ser para los estudiantes espacios vectoriales bien estudiados en un curso inicial de álgebra lineal. Tenemos por tanto la hipótesis de que los alumnos no cuentan con argumentos necesarios para la construcción de dicha matriz en un caso general; es decir, para la construcción de la matriz cambio de base dado cualquier espacio vectorial de dimensión finita y cualesquiera dos bases ordenadas. Así pues, como una primera fase en nuestro afán de proponer un camino cognitivo para la construcción de nuestro objeto de interés, nos hemos planteado como objetivo: diseñar una descomposición genética hipotética del concepto matriz cambio de base y con esta herramienta proponer una alternativa de enseñanza que ayude a estudiantes universitarios a superarlas. Particularmente en este escrito se presenta únicamente una parte concerniente al marco teórico y el método que guía el desarrollo de nuestro trabajo.

La teoría APOE y su paradigma de investigación

Como hemos mencionado nuestra investigación se basa en la teoría APOE. Esta teoría es iniciada y desarrollada por Ed Dubinsky y miembros de *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC por sus siglas en inglés) (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas 1996; Dubinsky, 1996), la cual se basa en una reinterpretación del constructivismo a partir del concepto de *abstracción reflexiva* de Piaget.

Para efectos de esta investigación entenderemos por abstracción reflexiva, en el sentido de Dubinsky (2000), como los mecanismos necesarios para la construcción de objetos mentales a partir de las acciones físicas y/o mentales sobre estos objetos.

A continuación describimos las construcciones mentales que propone la Teoría APOE; entendidas éstas como todas las transformaciones que realizan los individuos para resolver determinadas tareas y que puedan tener significado de ellas, las cuales pueden darse como reconstrucciones exactas (correspondiente a la memoria y a la repetición de métodos, algoritmos previamente conocidos) o adaptaciones de algo previamente aprendido. Asimismo explicaremos brevemente los mecanismos mentales los cuales hacen transitar a un individuo de una estructura a otra.

Acción. Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir. Un individuo que tiene una profunda comprensión sobre un cambio dado puede ejecutar una acción cuando sea necesario, pero no se limita a operar en el nivel de acciones. (Asiala et al., 1996, p.9)

Por ejemplo, en el caso del concepto de función, "una persona que requiere una expresión explícita para poder pensar en el concepto de función y puede hacer un poco más que sustituir la variable en la expresión y manipularla se considera que tiene una concepción acción del concepto de función" (Dubinsky et al. 2005 a, p. 338). Por lo tanto, la expresión actúa como una señal externa que indica cómo se debe realizar la acción, paso a paso, por la sustitución de valores específicos.

Por otra parte los procesos se construyen utilizando uno de los mecanismos mentales: *interiorización o coordinación*. El primero significa que alguna construcción interna se hace en relación a la acción, este mecanismo permite interiorizar las acciones y obtener una concepción proceso, el segundo se utiliza para coordinar más de un proceso en un solo proceso, puesto que para encapsular esta estructura mental, se requiere de un único proceso y no de varios.

Proceso. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre ella, describir, o incluso invertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos. (Asiala et al., 1996, p. 10)

Por ejemplo en álgebra lineal: cuando las acciones involucradas en la construcción de una n-tupla están interiorizadas en un proceso, el individuo puede construir mentalmente una n-tupla incluso cuando no este especificado n; el individuo también puede considerar la construcción de n-tuplas en cualquier espacio vectorial (Arnon et al., 2014). Cuando un individuo tiene una concepción proceso puede mediante el mecanismo *encapsulación* pasar a la estructura mental objeto, para ello menciona Arnon y otros (2014) que se tiene que aplicar una acción sobre un proceso, es decir el individuo debe ver una estructura dinámica (proceso) como una estructura estática sobre el cual pueden aplicar acciones. Así pues, es como tenemos la siguiente estructura mental.

Objeto. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. (Asiala et al., 1996, p. 11)

Consideremos en álgebra lineal la comparación de n-tuplas o realizar operaciones binarias de n-tuplas, son estas acciones específicas sobre las n-tuplas. Pero para poder realizar dichas acciones necesitamos que la concepción proceso de la n-tupla sea encapsulada en un objeto. La última estructura mental es el esquema.

Esquema. Se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción continua el cual está determinado por la actividad matemática que involucra el individuo en situaciones matemáticas específicas. La coherencia de un esquema es determinado por la capacidad del individuo para determinar si se puede utilizar en una situación matemática particular. Una vez que el esquema se construye como una colección coherente de estructuras (acciones, procesos, objetos, y otros esquemas) y las conexiones que se establecen entre esas estructuras, que pueden transformarse en una estructura estática (Objeto) y / o utilizado como una estructura dinámica que asimila otra Objetos relacionados o esquemas (Arnon et al., 2014, p.25).

Por ejemplo, un esquema para un espacio vectorial pude incluir n-tuplas y matices como objetos, y polinomios, funciones como procesos. Todas estas estructuras pueden estar relacionadas por tener propiedades en común, satisfacer los axiomas de espacio vectorial. La concepción esquema como un objeto mental se logra a través del mecanismo mental *tematización.* Cada una de las caracterizaciones anteriores nos ayudará a identificar qué tipo de concepción tienen los estudiantes respecto del concepto matriz cambio de base (Dubisnky, 1991).

Un proyecto de investigación y/o plan de estudios basado en la APOE involucra tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y recolección y análisis de datos (Arnon et al, 2014) la Figura 1 muestra cómo se relacionan estas componentes.

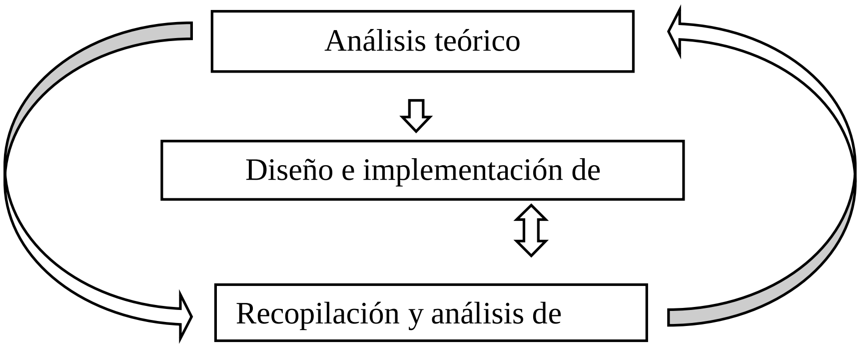

Figura 1. Ciclo de investigación (adaptado de Asiala et al. 1996)

Con este panorama teórico tomaremos las descripciones generales mostradas en Arnos y otros (2014) para explicar cada componente del ciclo. Una investigación se inicia con un análisis teórico del concepto a estudiar, esto da lugar a una descomposición genética preliminar la cual es una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que puede hacer un sujeto para la comprensión del concepto, el análisis impulsa al diseño y aplicación de enseñanza el cual a través de distintas actividades promuevan las construcciones mentales requeridas por el análisis, la recopilación y análisis de datos por su parte es una componente que retroalimenta al análisis hipotético inicial la veces que sea necesario.

Análisis teórico: Este ciclo de investigación parte de un análisis teórico sobre el concepto donde se considera el análisis de los libros de texto y la experiencia del investigador para determinar un posible camino viable para la construcción de un concepto, a dicho camino se le considera una descomposición genética preliminar del concepto, la cual es una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que una persona puede hacer en la construcción de un concepto matemático.

Diseño e implementación de enseñanza: Estas actividades son impulsadas por el análisis teórico destinadas a fomentar las construcciones mentales requeridas por el análisis. Actividades y ejercicios diseñados para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizar a acciones en procesos, coordinar dos o más procesos para generar nuevos procesos y encapsular a los procesos en objetos.

Recopilación y análisis de los datos: La fase de recopilación y análisis de datos es crucial para la investigación basada en la teoría APOE, ya que sin evidencia empírica, una descomposición genética sigue siendo una mera hipótesis. El propósito del análisis de datos es responder a dos preguntas: ¿Los estudiantes parecen hacer las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien los estudiantes a aprenden el concepto de que se trata? Diferentes tipos de instrumentos se pueden utilizar para indagar sobre estas preguntas, depende mucho del objetivo de la investigación, éstos pueden incluir cuestionarios por escrito entrevistas semi-estructuradas (audio y/o grabadas en vídeo), etc.

Método en esta investigación

Tomando en cuenta el paradigma de investigación de la teoría APOE y cómo los componentes de dicho ciclo están mutuamente relacionados, en el presente trabajo nos basaremos en la primera y la tercera componente, es decir, solo transitaremos entre el Análisis Teórico el cual iniciamos con un análisis de las diferentes definiciones y el tratamiento que se leda a nuestro concepto de estudio, aunado a nuestra experiencia y tomando conceptos relacionados al de nuestro objetivo, deducimos la importancia de requisitos previos que necesita un estudiante para la comprensión de nuestro concepto, y para la componente Recopilación y análisis de datos, hemos diseñado un diagnóstico y una entrevista con el fin de refinar nuestra descomposición hipotética, y validar la necesidad de nuestros requisitos previos mediante un diagnóstico el cual además de validar los requisitos previos nos dará información sobre aquellos conceptos relacionados a la matriz cambio de base y no consideramos. Posteriormente usaremos el diagnostico como un cedazo para aplicar una entrevista a estudiantes, dicha entrevista nos brindara información sobre las estructuras mentales que hemos considerado y recaudaremos aspectos que no consideramos a través delas respuestas obtenidas por parte de los estudiantes, esto con el fin de refinar la descomposición genética hipotética que se tiene.

Análisis teórico de la matriz cambio de base

Sobre este concepto es posible encontrar diferentes definiciones en los libros de texto. En algunos libros de álgebra lineal recibe el nombre de "Matriz de transición"; a continuación aparecen algunas de las definiciones que hemos tenido en cuenta para la construcción de nuestra descomposición genética hipotética:

Definición. Si $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ y $B' = \{u'_1, u'_2, \cdots, u'_n\}$ son bases de un espacio vectorial V, entonces la **matriz de transición de B a B'** es la matriz de n x n

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{u}_1]_{B'}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{u}_2]_{B'}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{u}_n]_{B'}$$

(Anton, 1973, p. 237).

Definición. Sean $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bases para un espacio vectorial V. La matriz de n x n cuyas columnas son os vectores coordenados $[u_1]_C, \dots, [u_n]_C$ de los vectores en B con respecto a C se denota $P_{C\leftarrow B}$ y se llama matriz de cambio de base B a C. Esto es,

$$P_{C\leftarrow B} = [[u_1]_C\ [u_2]_C \dots [u_n]_C]$$

(Poole, 2011, p. 483).

Para expresar esta idea de otra manera, los autores consideraran a la transición como el paso de una base "antigua" a una base "nueva"; entonces, la columna *j-ésima* de la matriz de transición es la matriz de coordenadas del vector *j-ésimo* de la base anterior con respecto a la nueva base. Estas definiciones y otras hacen notar implícitamente que existe un orden en las bases pero creemos que es de mayor riqueza para el estudiante hacer explicita esta observación, puesto que de no hacerlo puede tener repercusiones a la hora de abordar temas como el de coordenadas de un vector respecto a una base ordenada. Así pues para efectos de esta investigación entenderemos por *Matriz de Cambio de Base* en el sentido del siguiente teorema en el cual describe sus propiedades.

Teorema. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F, y sean β y β' bases ordenadas de V. Entonces Existe una única matriz n x n, necesariamente invertible, con elementos de F, de modo que

$$[\alpha]_{\beta} = \mathrm{P}[\alpha]_{\beta'}$$

$$[\alpha]_{\beta'} = \mathrm{P}^{-1}[\alpha]_{\beta}$$

Para todo vector α de V. Las columnas de P están dadas por

$$\mathrm{P}_{\mathrm{j}} = [\alpha_{\mathrm{j}}']_{\beta} \qquad \mathrm{j} = 1, \cdots, \mathrm{n}.$$

(Hoffman y Kunze, 1973, p. 52).

Ahora bien, para tener una primera aproximación sobre un posible camino cognitivo que dé lugar a las estructuras mentales para construir el concepto de estudio, empezamos nuestro análisis teórico con base en nuestra experiencia y consulta de libros de texto de álgebra lineal. Con esto decidimos dos conceptos principales que debe tener un estudiante de los diferentes conceptos que están en torno a nuestro concepto de estudio, estos son: base ordenada y coordenadas de un vector, los cuales estarán entendidos por las siguientes definiciones:

Definición. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, una base ordenada de V es una sucesión finita de vectores linealmente independiente y que genera a V (Hoffman y Kunze, 1973, p. 50).

Notemos que la diferencia entre base y base ordenada es simplemente el orden que se establece en la base, este orden ayuda a la unicidad de lo que se entiende por coordenadas de un vector.

Definición. Sea $\mathrm{B} = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \cdots, \mathrm{u}_\mathrm{n}\}$ una base ordenada de un espacio vectorial V sobre un campo K de dimensión finita, para todo $\alpha \in$ V, existen escalares $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n} \in \mathrm{K}$ tal que $\alpha = \mathrm{a}_1\mathrm{v}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{v}_2 + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n}\mathrm{v}_\mathrm{n}$ entonces la matriz de las coordenadas de α respecto a la base ordenada B:

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{a}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{a}_\mathrm{n} \end{bmatrix}$$

en vez del n-tupla $(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n})$ de coordenadas. Para indicar la independencia de esta matriz de coordenadas respecto a la base se usará el símbolo $[\alpha]_\beta$, Para la matriz de coordenadas del vector α respecto a la base ordenada B.

Dentro de una descomposición genética es fundamental determinar las estructuras previas que un individuo debe tener para dar lugar a la construcción de un nuevo concepto y/o noción matemática. Como elementos previos dentro de este análisis teórico consideramos que un individuo debe tener una concepción Objeto del vector de coordenadas de un vector respecto a una base ordenada y una concepción Proceso del concepto de base ordenada. Cabe resaltar que la relación entre estas estructuras previas está determinada por la combinación lineal.

Recopilación y análisis de los datos

Para esta investigación diseñamos un diagnóstico inicial y una entrevista. Dichos instrumentos serán aplicados aún grupo de estudiantes de entre 17 a18 años de edad en la Universidad Industrial de Santander (UIS, Colombia) después de haber asistido aún curso de álgebra lineal en el cual abordaron el tema cambio de base. Dicho curso lo encontramos ubicado en el primer semestre de diferentes carreras afines a las matemáticas en el nivel de estudios de Pregrado. El diagnóstico consta de preguntas en torno a los requisitos previos que hemos considerado en nuestro análisis inicial, como por ejemplo cuestiones que tienen que ver con el orden de las bases, y la escritura de las coordenadas de un vector respecto a una base ordena (*véase Apéndice A*). La entrevista será aplicada a los estudiantes que muestren evidencia de los requisitos previos, consta de siete preguntas que tienen como objetivo identificar y fortalecer cuestiones que tienen que ver con los tipos de concepción Acción, Proceso, Esquema, Objetos que estamos proponiendo para nuestro concepto, esto con el fin de refinar nuestra descomposición hipotética de la matriz de cambio de base (*véase Apéndice B*).

Conclusiones previas

En estos momentos estamos trabajando sobre las ideas primarias de nuestra descomposición genética hipotética de nuestro concepto de estudio, por medio del diagnóstico buscamos validar que son indispensables los requisitos previos que hemos expuesto en el apartado del análisis teórico (concepción Objeto del vector de coordenadas de un vector respecto a una base ordenada y una concepción Proceso del concepto de base ordenada), con la entrevista se busca fortalecer la descripción de las estructuras mentales que se tiene para nuestro concepto de estudio.

Referencias y bibliografía

Anton, H. (1976). *Introducción al álgebra lineal* (3ª ed.). México: Limusa

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 1-32). Research in Collegiate Mathematics Education II.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, R., & Rogalski., M. (1997). L'Álgebra Linéare: L'obstacle du Formalisme a travers diverses recherches de 1987 a 1995. En J. L. Dorier (Ed.), *L'Enseignement de l´Algébre Loneaґé en Questión* (pp. 10-147). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage éditions.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Revista Educación Matemática, 8*(3), 24-41.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics, 58*, 335–359.

Hoffman, K. (1973). *Álgebra lineal*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Kú, D. (2012). *Análisis sobre la compresión de los conceptos conjunto generador y espacio generado desde la mirada de la teoría APOE* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Llana, Arnon., Cottill, Jim., Dubinsky, E., Oktaç., Roa Fuentes. S., Trigueros, María., & Weller, Kirk. (2014). *Apos theory: A Framenwork for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.*

Oktaç A., & Trigueros M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4-II), 373-385.

Oktaç, A., Trigueros, M. y Vargas, X. N. (2006). Understanding of vector spaces- a viewpoint from APOS theory. *Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics* (En CD-ROM) Istanbul. Turkey.

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal, Una introducción moderna tercera edición*. México: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Roa-Fuentes, S. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal* (Tesis de maestría no publicada) Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Siepinska, A., Nnadozie, A., & Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra.* Concordia University: Momtreal Disponible en http://www.annasierpinska .wkrib.com/pdf/Sierpinska-TT-Report, pdf.

Trigueros, M., Oktaç, A. y Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra, *Proceedings of the 5th CERME* (Congress of the European Society for Research in Mathemattics Education), (pp. 2359-2368). Larbaca, Chipre.

Apéndice A

Diagnóstico de requisitos previos al concepto Matriz Cambio de base en Álgebra Lineal

Diagnóstico de requisitos previos al concepto Matriz Cambio de base en Álgebra Lineal

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO	**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**
Unidad Académica de Matemáticas	Escuela de Matemáticas

Nombre: ____

Carrera que cursa: ____

1. Sea $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores:

$$v_1 = (1,0,-1),\ v_2 = (1,1,1),\ v_3 = (1,0,0).$$

(i) ¿Cuáles son las coordenadas del vector (5,-5,1) en términos de la base ordenada β?

(ii) ¿Cuáles son las coordenadas del vector (a,b,c) en términos de la base ordenada β?

2. Sean las bases ordenadas $\beta = \{v_1, v_2\}$ y $\beta' = \{e_1, e_2\}$ del espacio $\mathbb{R}^2$, formadas por los vectores:

$$v_1 = (1,2),\ v_2 = (2,1) \text{ y } e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)$$

(i) Encuentre la matriz de cambio de base de β a β'.

(ii) Encuentre la matriz de cambio de base de β' a β.

3. Dada la matriz de cambio de base $M_{\beta' \to \beta} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donde las bases ordenadas están definidas como:

$$\beta = \{(2,0,1),\ (1,2,0),(1,1,1)\}$$

$$\beta' = \{(6,3,3),(4,-1,3),(5,5,2)\}$$

Y sea el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Calcule el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_{\beta}$.

4. Sea la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ y, sean los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ vectores de una base ordenada $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$.

a) Encuentre una base $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$ para $\mathbb{R}^3$ tal que $P_{\beta' \to \beta}$ sea la matriz de cambio de base de $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$ a $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$.

5. ¿Qué entiendes por Matriz de cambio de base?

Apéndice B

Problemas para la entrevista respecto al concepto matriz cambio de base. Sea $V = \mathbb{R}^2$

PROBLEMAS DE LA ENTREVISTA
Álgebra Lineal

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

Unidad Académica de Matemáticas

Escuela de Matemáticas

<u>*Ejercicio 1*</u>

Sea $V = \mathbb{R}^2$ el espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sean:

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\},\ B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\},\ B_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}, \text{ bases ordenadas de } \mathbb{R}^2.$$

i) Encuentre la matriz $P_{B_1 \to B_2}$

ii) Encuentre la matriz $P_{B_3 \to B_2}$

iii) Encuentre la matriz $P_{B_2 \to B_3}$

iv) ¿La base B_1 es igual a la base B_3? Justifica tu respuesta.

v) ¿La matriz $P_{B_1 \to B_2}$ es igual a la matriz $P_{B_3 \to B_2}$? Justifica tu respuesta.

<u>*Ejercicio 2*</u>

Sean las bases $B_1 = \{ t_3, t_2, t_1 \}$ y $B_2 = \{q_0,\ q_1,\ q_2\}$ bases ordenadas del espació vectorial $\mathbb{P}_2[x]$, definido sobre $\mathbb{R}$. Donde

$$t_1 = 1$$
$$t_2 = x$$
$$t_3 = x^2$$
$$q_0 = 1 + 2x + x^2$$
$$q_1 = 2 + 9x$$
$$q_2 = 3 + 3x + 4x^2$$

a) Encuentre la matriz cambio de base B_1 a B_2.

b) Encuentre el vector de coordenadas de $[p]_{B_1}$ con $p = -1 + x$ y con ello calcule $[p]_{B_2}$.

<u>*Ejercicio 3*</u>

Sean $A = \{a_1, a_2,\ a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bases ordenadas para un espacio vectorial V. Suponga que $a_1 = 4b_1 - b_2$, $a_2 = -b_1 + b_2 + b_3$ y $a_3 = b_2 - 2b_3$.

a) Encuentre la matriz de cambio de base de A a B.

b) Encuentre $[x]_B$ para $x = 3a_1 + 4a_2 + a_3$.

<u>*Ejercicio 4*</u>

Consideremos la base $B_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$ ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ formada por los polinomios:

$p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 + x$ y $p_2 = (1 + x)^2$ y sea la matriz $P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 2\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Encuentre los polinomios de la base ordenada $B_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$, tal que P sea la matriz cambio de base de B_1 a B_2.

Ejercicio 5

Sea $V = \mathbb{R}^2$ el espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $B_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Si T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_1, 0).$$

La matriz asociada a T en la base canónica B_3 es $[T]_{B_3} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

a. Encuentre la matriz $[T]_{B_2}$.
b. Utilice la matriz de cambio de base $P_{B_2 \to B_3}$ (encontrada en Problema 1 inciso iii) para calcular $[T]_{B_2}$.

Ejercicio 6

Considera el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a n ($P_n[x]$) y dos bases ordenadas β_1 y β_2 de dicho espacio vectorial. Si se quiere construir la matriz de cambio de base $M_{\beta_1 \to \beta_2}$ ¿qué tamaño tendrá la matriz? ¿Por qué?

Ejercicio 7.

¿Qué entiendes por matriz cambio de base? Escribe tu definición de este concepto.

¿Dadas dos bases de un espacio vectorial de dimensión finita, siempre es posible definir la matriz cambio de base?

¿Dada una matriz cuadrada cualquiera A, siempre A representa una matriz cambio de base?